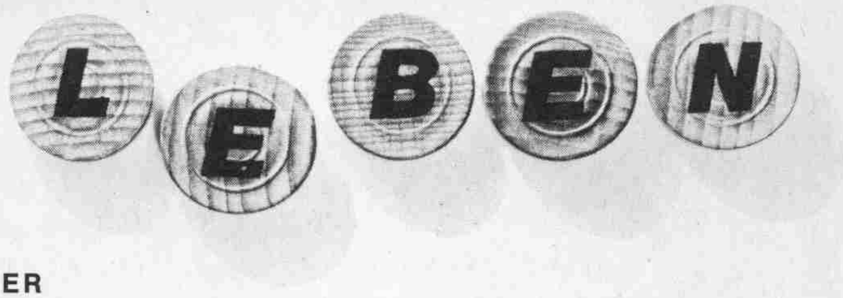
Ein Spiel namens



VON WALTER BAIER

Ungezählte Schülergenerationen haben im Mathematikunterricht gelitten. Mathematik gilt sehr vielen Menschen als eine grausam trockene Wissenschaft, und es kommt gar nicht so selten vor, daß sie fast noch stolz darauf sind, nichts von ihr zu verstehen. Zu Unrecht, denn die Mathematik ist eine der reinsten Ausdrucksweisen der Logik; des folgerichtigen Denkens also. Vielleicht macht gerade das sie so schwierig.

Mathematik und die Mathematiker müssen aber gar nicht so sein, wie mancher es meint. Dafür hat es gerade in den letzten Jahren ein neues Beispiel gegeben, von dem hier die Rede sein soll. Es geht um ein Spiel, das aus einem Sondergebiet der höheren Mathematik stammt und doch so vertrackt einfach ist, daß man – so widersinnig das klingen mag – schon genau aufpassen muß, wenn man es richtig spielen will. Das Spiel heißt LEBEN.

Zu LEBEN braucht es nur einen einzigen Spieler. Sieger und Gewinner gibt es nicht, oftmals nicht einmal ein Ende. Trotzdem kann es aufregend sein – am aufregendsten vielleicht sogar, wenn man es von einer programmgesteuerten Rechenanlage spielen läßt und zuschaut. Es soll Mathematiker geben, die durch LEBEN nahezu süchtig geworden sind. Computerzeit im Wert von Millionen Mark ist auf diese Weise schon „verspielt“ worden.

Die Anfangsgründe von LEBEN kann man auf einem Schachbrett mit Mühle- oder Damesteinen üben. Zuerst werden ein paar Steine auf die Felder gelegt, wobei Zahl und Anordnung völlig gleichgültig sind. Damit geht es los.

Jedes Feld auf dem Schachbrett (man kann genau so gut Millimeterpapier oder ein mit Karos bedrucktes Blatt nehmen) hat acht Nachbarfelder, je zwei in der Senkrechten und der Waagerechten, sowie in den beiden Diagonalen. Das Schicksal eines jeden Steins – das ist die Spielregel – hängt nun davon ab, was in diesen Nachbarfeldern ist:

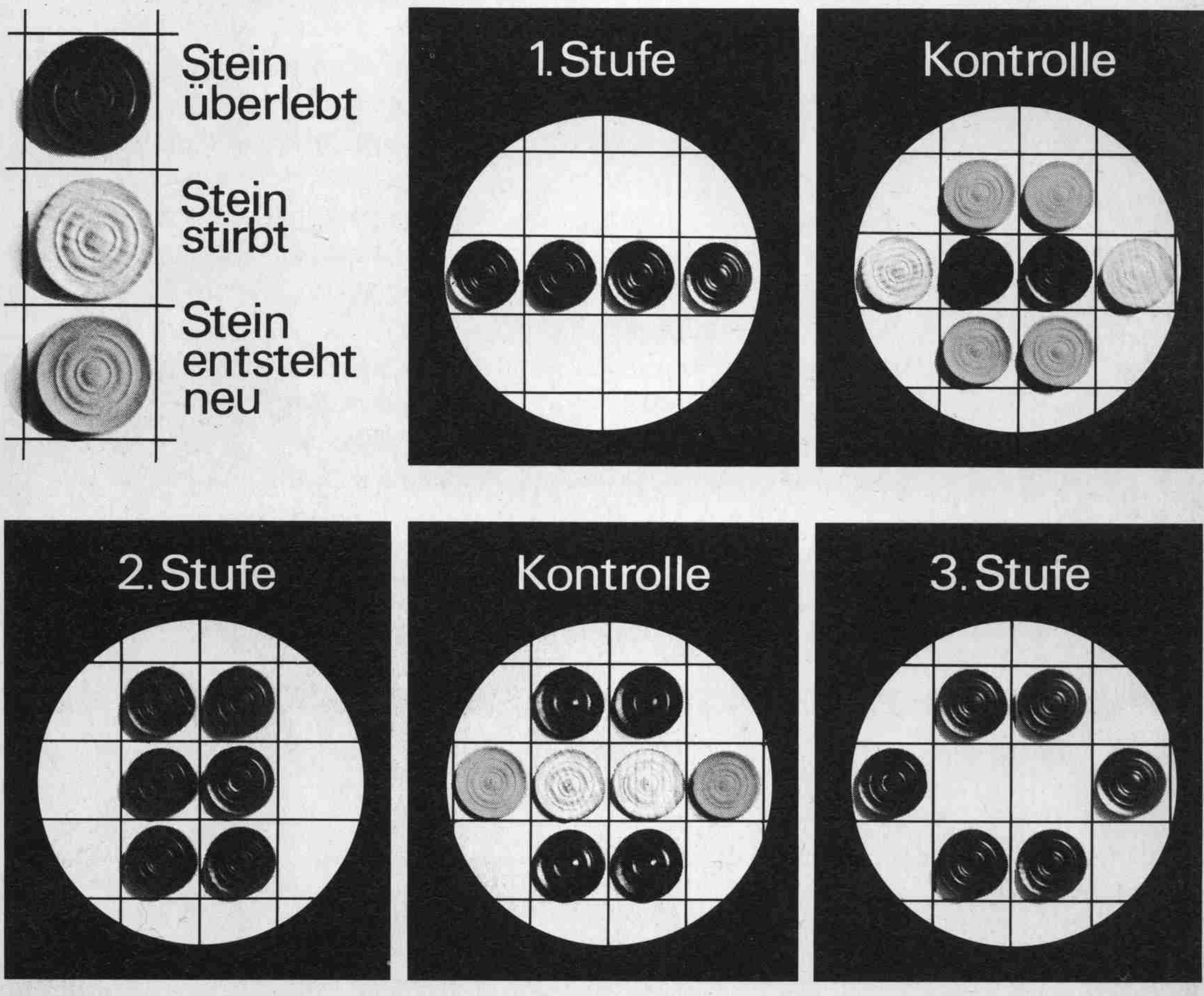
1 Der Stein „stirbt“ an Einsamkeit, wenn in den acht Nachbarfeldern kein oder nur ein anderer Stein ist. Er stirbt auch an Ersticken, wenn die acht Nachbarfelder vier oder mehr andere Steine enthalten.

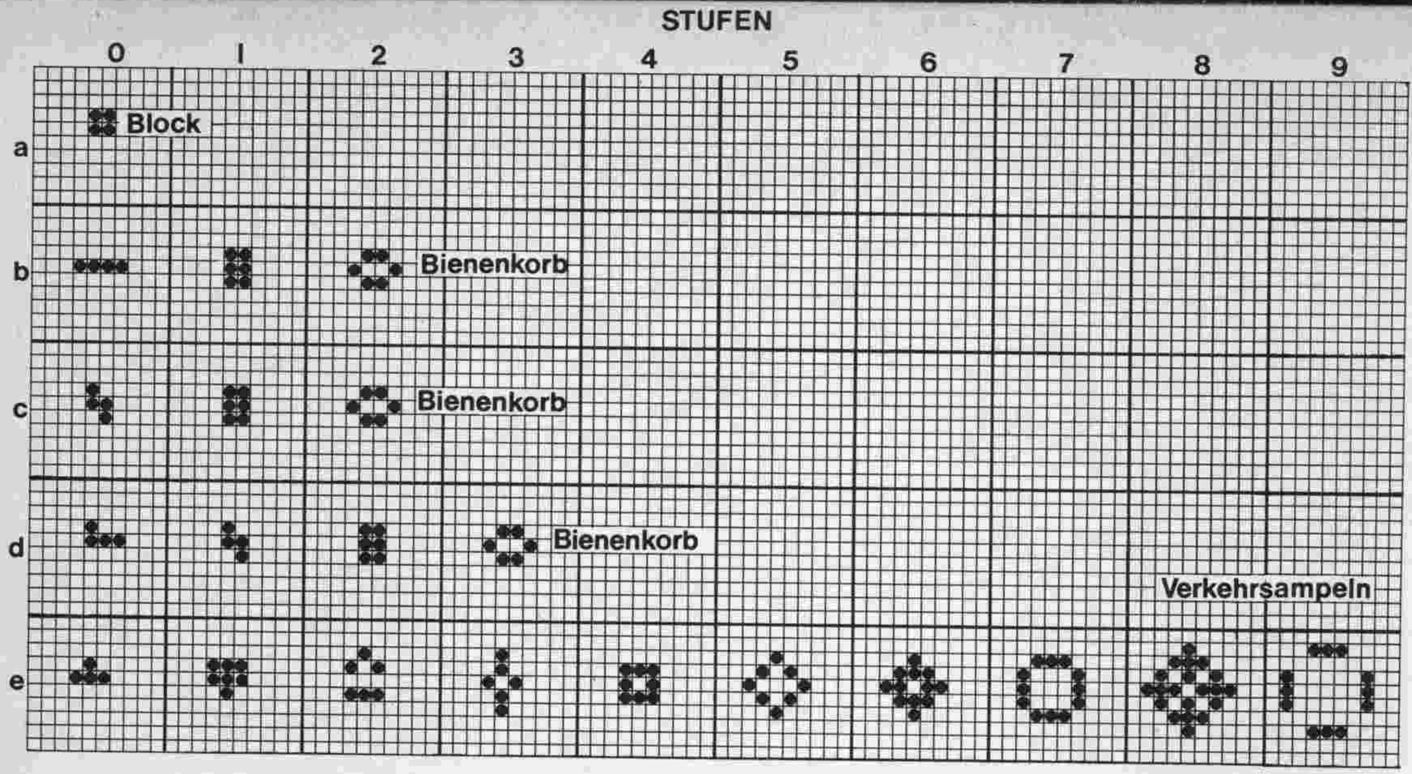
2 Der Stein „überlebt“, wenn sich in den acht Nachbarfeldern entweder zwei oder drei andere Steine befinden.

3 Ein Stein wird „geboren“, wenn die acht Nachbarfelder eines Leerfeldes genau drei Steine aufweisen. Er erhält seine Position in diesem Leerfeld.

Das ist schon alles. Hat der Spieler seine Steine ins Spielfeld gesetzt, beginnt anhand der Regeln die Überprüfung: Für jeden einzelnen Stein wird überlegt – wobei man am besten die Nachbarfelder im Uhrzeigersinn abstreicht –, welche Regel für ihn zutrifft. Das gleiche gilt für Leerfelder, in deren Nachbarschaft Steine vorkommen. Um Fehler zu vermeiden, werden Steine und Felder während der Kontrolle zunächst nur markiert. Beispielsweise kann ein „sterbender" Stein durch einen aufgesetzten zweiten bezeichnet und ein neu auftauchender Stein durch ein Fetzchen Papier angemerkt werden. Erst wenn der Spieler die Überprüfung aller Steine abgeschlossen hat, wird der Austausch vorgenommen. Im praktischen Beispiel sieht das so aus wie in Bild 1 (Der Einfachheit halber nehmen wir gleich eine bestimmte Figur, nicht eine regellose Verteilung von Steinen).

Bild 1. Mühle- oder Damesteine eignen sich besonders gut, um die Regeln dieses Spiels deutlich zu machen. Hier die Entwicklung eines Tetrominos. In der 3. Stufe entsteht ein „Bienenkorb". Er ist stabil, die Entwicklung ist am Ende.





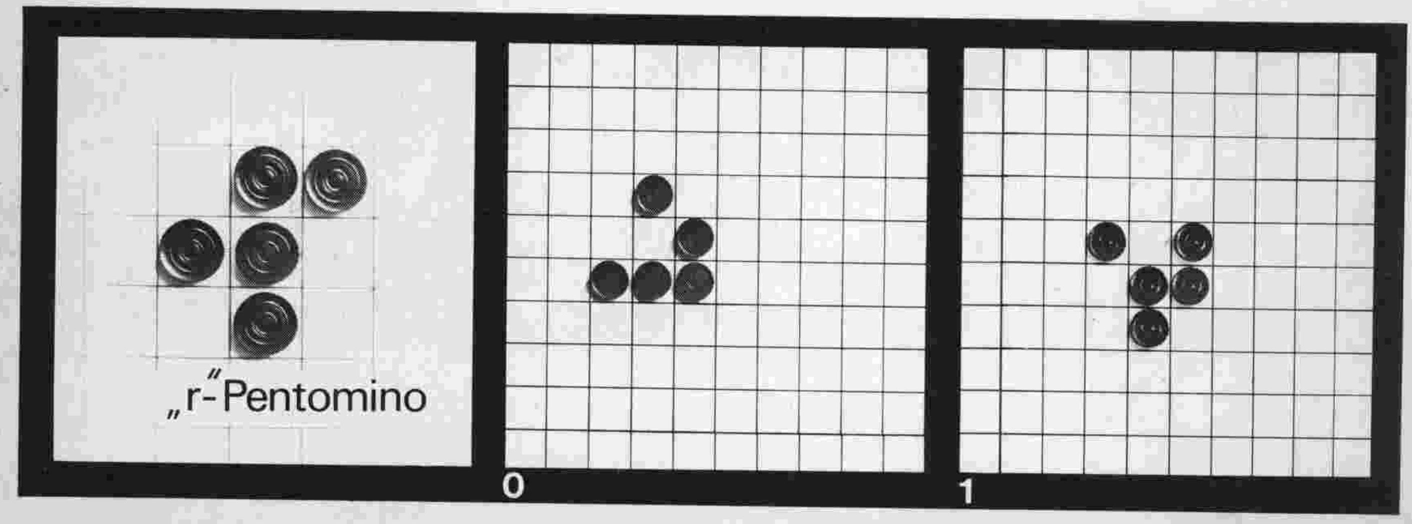
Die Anfangsfigur dieses Beispiels wird „Tetromino“ genannt, weil sie aus vier zusammenhängenden Steinen besteht. Die Endfigur trägt die Bezeichnung „Bienenkorb“. Sie kann sich nach den Regeln nicht mehr verändern, ist also stabil.

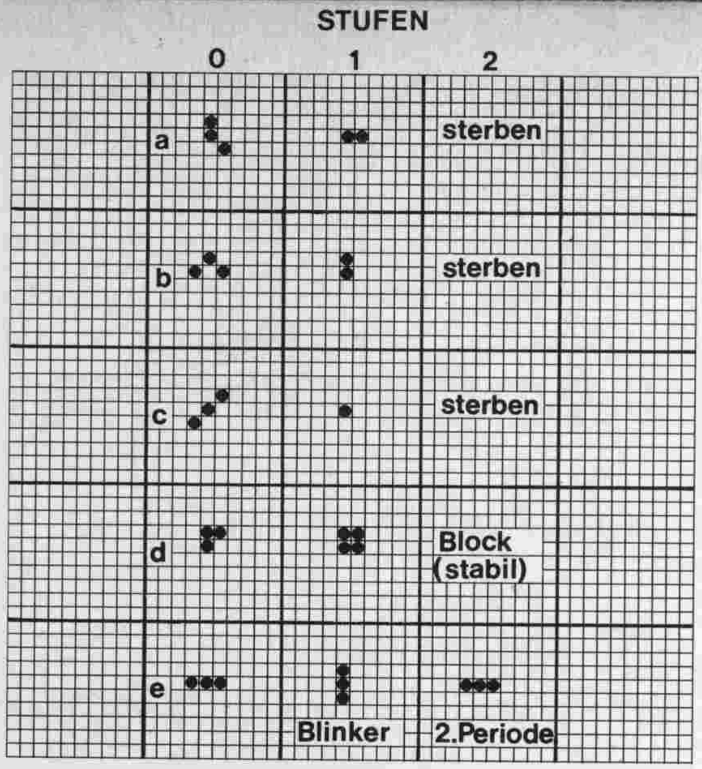
Tetrominos sind aber nur zum Üben geeignet. Von den fünf Figuren, die Bild 2 zeigt, verändert eine sich überhaupt nicht, drei bilden schnell einen Bienenkorb, und nur einer entwickelt sich zu einer „Verkehrsampel“ aus vier Blinkern.

Ebenso reizlos sind Triplets (Bild 3), das heißt Figuren, die drei Steine enthalten. Zumeist sterben sie in den beiden ersten Stufen aus. Eine bildet sofort einen stabilen Block, und nur der Blinker hüpft ständig aus der Senkrechten in die Waagerechte und umgekehrt.

Bei den Pentominos wird es schon spannender. Insgesamt gibt es zwölf mögliche Anfangsfiguren, die aus fünf Steinen bestehen. Sechs davon verschwinden spätestens bei der fünften Stufe, zwei bilden recht schnell ein stabiles Muster aus sieben Steinen, und drei werden zu „Verkehrsampeln“.

Oben links: Bild 2 zeigt die Entwicklung der fünf Tetrominos. Während sich eine Figur überhaupt nicht verändert, bilden drei bald einen stabilen „Bienenkorb“, nur eine entwickelt sich weiter.
Oben rechts: Bild 3. Von kurzer Dauer ist das Leben der Triplets-Figuren aus drei Steinen.
Unten links: Bild 4. Das „r“-Pentomino ist bis jetzt über 460 Stufen hinweg verfolgt worden.

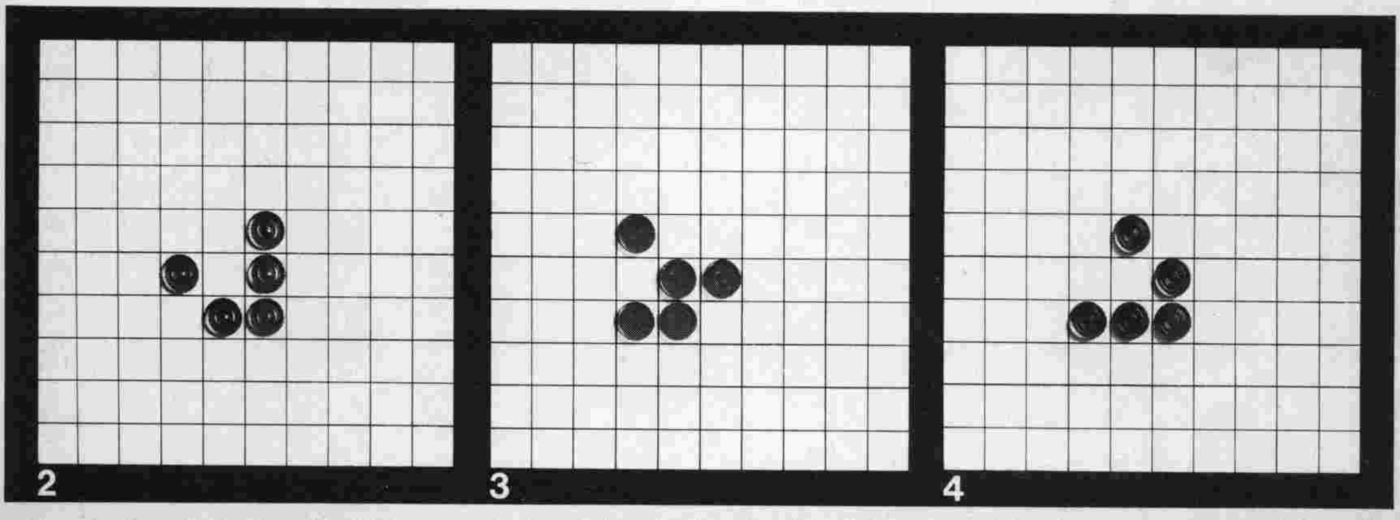


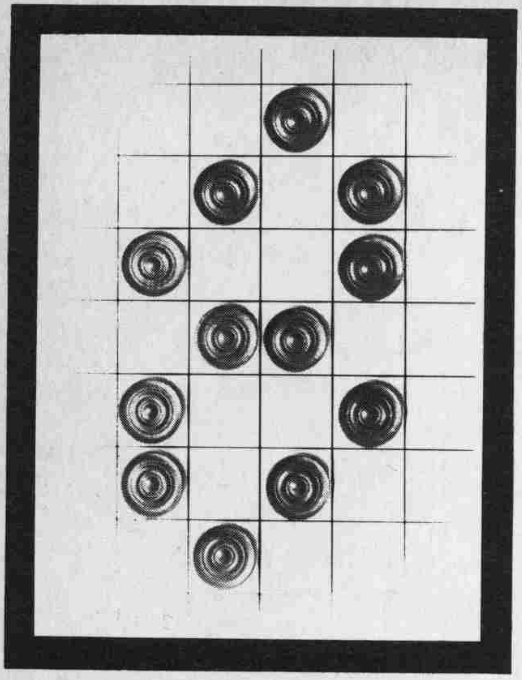


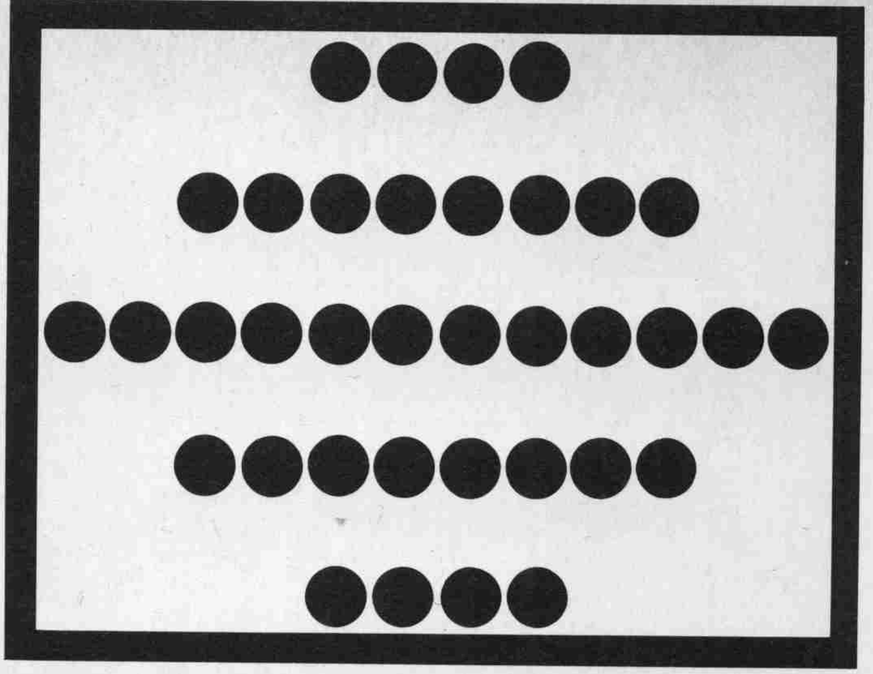
Von dem zwölften, dem „r“-Pentomino, weiß man noch nicht genau, was es wird (Bild 4). Seine Entwicklung ist bisher erst über 460 Stufen hinweg verfolgt worden. Dabei bilden sich eine Reihe stabiler und Blinker-Figuren, zugleich aber auch andere, die „Segler“ ausstoßen. Weil diese Wanderfiguren mit den ortsfesten zusammenstoßen, bringen sie letztlich alles wieder durcheinander (Bild 5 und 6).

Richtig aufregend wird es allerdings erst bei den größeren Anfangsfiguren. Der britische Mathematiker, der LEBEN erfunden hat, hatte es zuerst für unmöglich gehalten, daß irgendwelche Figuren ins Unendliche wachsen könnten. Er setzte einen Geldpreis für denjenigen aus, der ihm das Gegenteil beweisen könnte. Innerhalb eines Monats war er gewonnen: Eine amerikanische Mathematikergruppe hatte eine „Seglerkanone“ entwickelt! Solche Figuren, von denen man inzwischen mehrere kennt, stoßen in regelmäßigen Abständen Segler aus, die langsam davonwandern. Die erste Kanone (Bild 7) war ein schwingendes Gebilde, das heißt, es wiederholte sich bei jeder 30. Stufe und stieß überdies alle 30 Stufen einen Segler aus. Wenig später meldete sich ein anderer Amerikaner, der 13 Segler so zusammenstoßen lassen konnte, daß sie eine Seglerkanone bildeten. Danach erfand die erste Gruppe wieder ein „Pentadekathlon“, ein schwingendes Gebilde aus zwölf Steinen, das sich bei jedem 15. Schritt wiederholt. Es wird gebildet, wenn wir als Anfangsfigur eine waagerechte, ununterbrochene Reihe von zehn Steinen wählen. Wird es auf der Spielfläche an der richtigen Stelle angeordnet, kann

Unten rechts: Bild 5. Einer der bei der Entwicklung des „r“-Pentominos entstehenden „Segler“ und seine Bewegung. In vier Schritten schiebt er sich um ein Feld nach rechts und eines nach unten. Da die höchstmögliche Geschwindigkeit die Verschiebung um ein Feld bei jedem Schritt ist, sagen die Mathematiker, daß dieser Segler sich mit ein viertel Lichtgeschwindigkeit bewegt.







Oben: Bild 6. Zwei einfache „Seglerkanonen“. Der „Doppellaib“ (links) bildet nach vier Stufen zwei Segler, die sich voneinander fortbewegen. Der „4-8-12-Diamant“ (rechts) läßt vier Segler entstehen, die in alle vier Windrichtungen davonziehen. Er braucht 15 Stufen dazu. Von beiden „Kanonen“ bleibt keine Spur übrig.

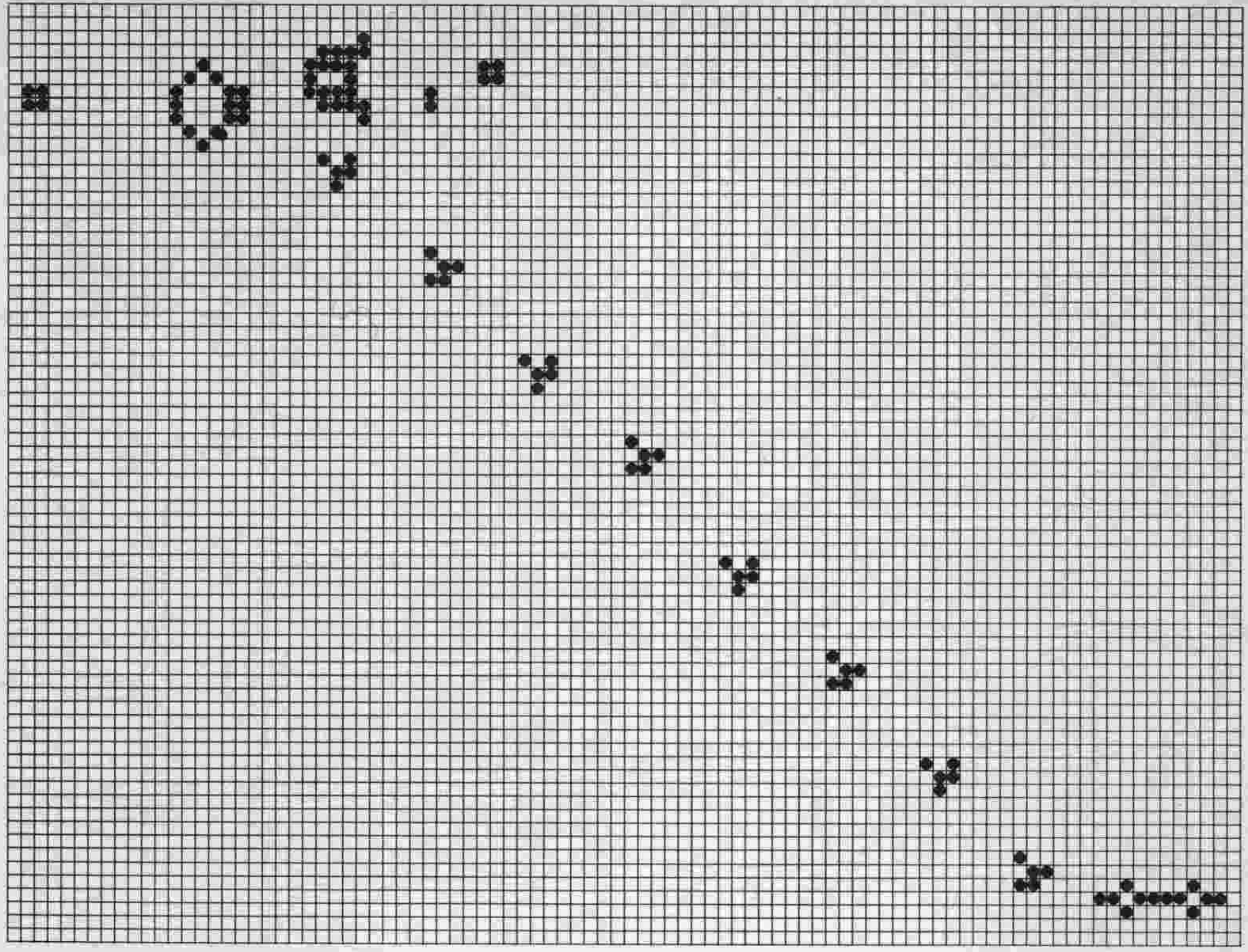
Rechte Seite: Bild 7. Eine kontinuierliche „Seglerkanone“ (oben links), die alle 30 Stufen einen Segler ausstößt, und ein Pentadekathelon (unten rechts), das die Segler „auffrißt“.

es die Segler aus der Seglerkanone „auffressen“. Ein Pentadekathlon kann einen Segler auch zurückwerfen – zwei Pentadekathlons können sich, wenn sie richtig stehen, einen Segler unaufhörlich zuspielen.

Wenn Seglerströme einander schneiden, kommt es zu den wildesten Ergebnissen. Manchmal entstehen neue Figuren, die ihrerseits wieder Segler ausstoßen. Es kann sogar vorkommen, daß diese später entstandenen Seglerkanonen die zuerst bestehenden zerstören, indem sie zurückschießen. Eine der letzten Entwicklungen auf diesem Gebiet ist die Anordnung von Seglerkanonen, bei der im Schnittpunkt der Ströme eine „Fabrik“ entsteht, die jeweils innerhalb von 300 Stufen ein „leichtes Raumschiff“, das heißt einen größeren Segler, aufbaut und verschießt. Auch sie bedeutet einen unaufhörlichen Zuwachs von Steinen, also unendliches Wachstum. Daneben gibt es Figuren wie den „Erntearbeiter“ (Bild 8), der quer über das Feld zieht und in regelmäßigen Abständen stabile Viererblocks (Tetrominos) hinterläßt.

Andere Mathematiker haben sich aufs „Impfen“ spezialisiert. Eines der bekannten Beispiele dafür ist ein völlig stabiles Gebilde aus Viererblocks, das unendlich groß sein kann. Wird ein einziger Stör-Stein hineingesetzt, so kann er je nach seiner Stellung ausgemerzt werden oder aber das ganze Gebilde zur Explosion bringen (Bild 9).

Leben ist erst im Jahre 1970 an der Universität Cambridge in England von dem Mathematiker John Horton Conway erfunden worden. Spielt man es mit richtigen Steinen auf einem karierten Papier oder besser noch auf einer karierten Tischdecke, muß man schon höllisch aufpassen, um keine Fehler zu



machen. Ein Versehen, das häufig passiert, besteht darin, Steine, die neu entstehen, bei der Überprüfung schon mitzurechnen, so daß sie das Schicksal der Steine der vorherigen Stufe beeinflussen. Das darf natürlich nicht sein.

Gerade weil Computer so phantasielos sind, machen sie diesen Fehler nicht. Sie können das Spiel zudem vielhundertmal schneller ablaufen lassen, als Menschen es vermögen. Dabei wird es wirklich atemberaubend. Man kann die Ergebnisse vom Rechner ausdrucken lassen, noch eindrucksvoller ist es aber, den Ablauf auf dem Bildschirm eines Datensichtgeräts zu verfolgen. Dann erst versteht man, was Mister Conway bewogen hat, sein Spiel „Leben“ zu nennen. Die Anfangsfiguren breiten sich über den Schirm aus wie Schneeflocken. Scheinbar gesunde Gebilde brechen in sich zusammen, während winzige Häufchen urplötzlich wie wild zu wachsen beginnen. Hier und dort erstarrt alles in stabilen Figuren, während ein Stückchen weiter Blinker hin und her hüpfen. Oft bleibt es dabei.

Anders, wenn Segler oder Raumschiffe im Spiel sind, die quer über den Bildschirm ziehen. Sie bringen wieder Bewegung in bereits erstarrte Gebilde. Wo sie sie treffen, entsteht neues Leben, oft genug aber auch ein Zusammenbruch, der im völligen Verschwinden endet.

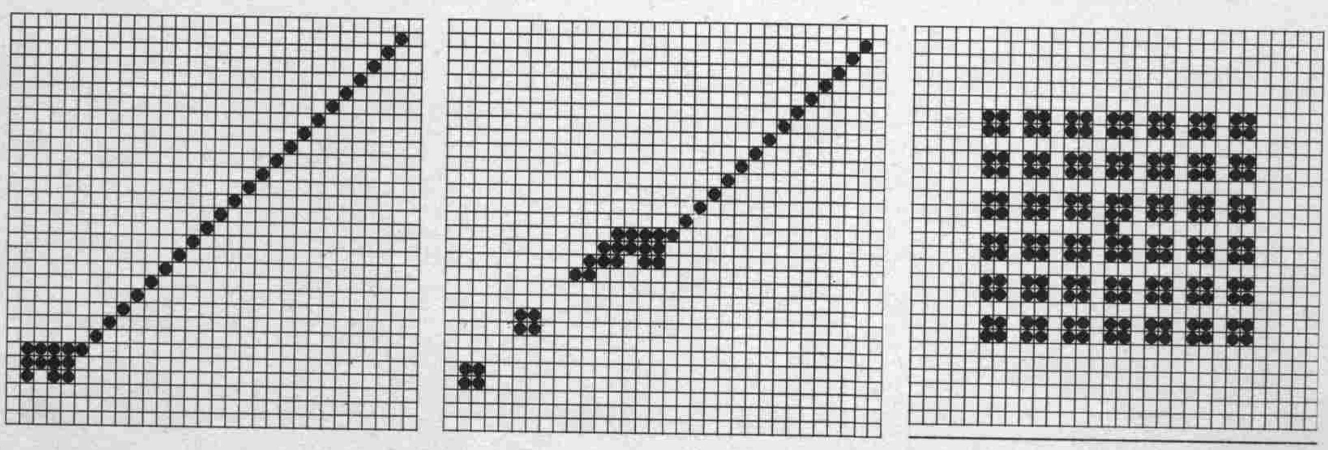
Es ist für den Laien aussichtlos, sich von einem Mathematiker erklären lassen zu wollen, was es alles damit auf sich hat. Die Erläuterungen erinnern einen an Komiker, die Fremdsprachen imitieren: Alles klingt ganz richtig, aber man ist froh, wenn man hier und da ein verständliches Wort aufschnappen kann. Tatsächlich aber hat dieses aufregende Spiel eine Bedeutung, die

weit über das hinausgeht, was man als Zeitvertreib für Mathematiker betrachten würde.

Die Frage ist einerseits, ob sich bei LEBEN Gebilde ergeben, die sich selbst reproduzieren, das heißt sich fortzupflanzen vermögen. Andererseits suchen die Mathematiker auch nach dem „Garten Eden", das heißt einem Gebilde, das im Verlauf des Spiels nicht entstehen kann und deshalb vom Spieler erschaffen werden muß. Da ein „Garten Eden" keinen Vorläufer hat, kann er sich auch nicht selbst reproduzieren – er ist also im Grunde unfruchtbar.

Der Erfinder dieses aufregenden Spiels, der britische Mathematiker John Horton Conway, vor dem Bildschirm eines Datensichtgerätes. Computer lassen das Spiel vielhundertmal schneller ablaufen, als Menschen das vermögen.

Bild 8. Ein „Erntearbeiter", hier in Stufe 0 (links) und 10 (Mitte), hinterläßt stabile Viererblocks. Die Stange kann unendlich lang sein. – Bild 9 (rechts). Dieses Muster aus stabilen Viererblocks, das unendlich groß sein kann, wird durch einen eingesetzten Stein („Virus") zur Explosion gebracht. Um die zerstörte Partie bildet sich eine grob ovale „Welle", die sich mit „Lichtgeschwindigkeit" ausbreitet. Wird das „Virus" dagegen so gesetzt, daß es die Ecken von 4 Blocks verbindet, ist es nach zwei Stufen verschwunden. Das stabile Gefüge hat sich „repariert".



Trotzdem ist die Frage nach ihm reizvoll, wenn auch nicht gerade leicht: Berechnungen haben ergeben, daß man ein Quadrat mit einer Seitenlänge von zehn Milliarden Feldern braucht, um einen „Garten Eden“ aufzubauen.

Schon die Seglerkanonen – nur Mathematiker können wirklich verstehen, wieso – eröffnen die Aussicht, mit Hilfe von Conways Spiel einen Allzweckrechner nachzubilden, der alles das kann, was die leistungsfähigste Datenverarbeitung vermag. Der Trick wäre, die Segler als Impulse zu benützen, um Informationen zu speichern und weiterzugeben, ja sogar die erforderlichen logischen Operationen auszuführen, die von den elektronischen Computern in ihren Schaltkreisen bewältigt werden. Davon mögen wir noch weit entfernt sein. Es scheint aber möglich, daß man diese Automaten-Theorie in absehbarer Zeit praktisch dazu benutzen kann, Schaltkreise zu entwerfen, die sich bei Fehlern selbst reparieren würden.

Vor solchen Möglichkeiten darf jedoch nicht vergessen werden, daß LEBEN ein abstraktes Spiel ist. Mit ihm kann entsprechend den vereinbarten Regeln etwas durchgespielt werden. Es ist also ganz ähnlich wie bei dem in der Technik bereits viel gebrauchten Verfahren, die Eigenschaften eines Werkstückes, beispielsweise einer Flugzeugtragfläche, in eine Rechenanlage einzugeben und dann mit Belastungen zu „spielen“. Die Maschine zeigt in endlosen Zahlenkolonnen, wie die gedachte Tragfläche sich verhält. Treten schwache Stellen auf, kann man die Voraussetzungen verändern. Auf diese Weise erhält man nach und nach eine „bestmögliche“ Tragfläche. Sie wird dann in die technische Wirklichkeit umgesetzt. Das ist aber schon wieder die nächste Stufe, und sie hat ihre eigenen Schwierigkeiten. Nicht jedes Rezept aus dem Computer erweist sich als technisch durchführbar. Denn die Mathematik ist insofern frei, als ihre Voraussetzungen nach Belieben bestimmt werden können, während die Technik an gegebene Voraussetzungen gebunden ist, und seien es auch nur die Eigenschaften der verfügbaren Werkstoffe.

Das ist besonders für die Folgen wichtig, die sich aus Conways Spiel LEBEN ergeben, wenn man mit ihm einen Allzweckrechner simulieren (also durchspielen) könnte. Als nächster Schritt würde sich nämlich ein Universalbauer anschließen, das heißt eine Maschine, die anderes und nicht zuletzt ihresgleichen zu bauen vermöchte.

In der Theorie sind solche „selbst reproduzierenden Zellular-Automaten“ vorstellbar. Wem das schreckliche Wort unverständlich ist, kann sich an Conway halten: „Tiere“, meint er, „ist das kürzere Wort dafür“. Das Unheimliche an dieser hingeworfenen Erklärung ist aber, das Conways LEBEN-Spiel eigentlich sehr einfach ist. Schließlich kennt es für ein Feld (eine Zelle) nur zwei Zustände – voll oder leer – und für den Übergang von einer Stufe (Generation) zur anderen nur drei Möglichkeiten – entstehen, bestehen oder sterben. Trotzdem hat es den Anschein, daß sich in Conways Spiel fortpflanzungsfähige Gebilde ergeben können.

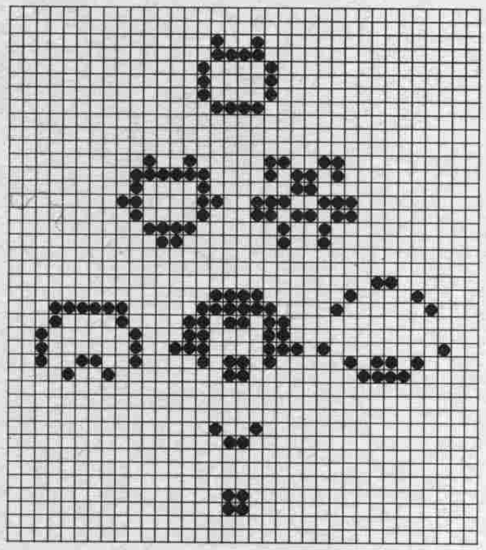


Bild 10. Das „Katzengesicht" (oben) zerfällt in sechs Stufen zu einem Grinsen. Zurück bleibt nur ein „Tatzenabdruck" – ein stabiler Viererblock (Stufe 7).

Das verführt zu dem Vergleich mit der Entstehung von wirklichem Leben. Wenn die „Ursuppe", das heißt ein ursprüngliches Gemisch von Aminosäure-Molekülen – den Eiweißbausteinen –, nur in genügender Menge vorhanden war und sie genügend Zeit hatte, so konnten in ihr nach Spielregeln, die sich aus dem Aufbau der Materie und den Naturgesetzen ergeben, wie auch immer geartete fortpflanzungsfähige Gebilde entstehen. Das Spiel LEBEN wäre ein mathematisches Modell der Entstehung von Leben.

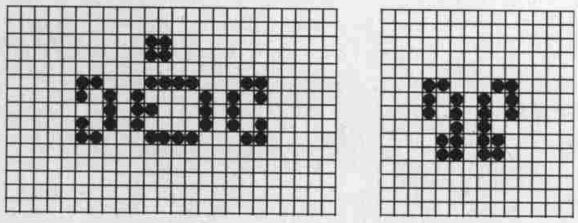
Und was wäre dann der Mensch, der dieses Spiel spielt?

„Irdisches Leben", meint Conway, „ist viel verwickelter, als es eigentlich zu sein brauchte. Wir haben 92 Elemente, aber man braucht eigentlich nur zwei: aus und ein."

Diese Feststellung läßt hoffen, daß das auf dem Computerschirm simulierte Leben doch noch ein bißchen anders wäre als unseres, auch wenn es gelänge, fortpflanzungsfähige Gebilde herauszufinden. Trotzdem wäre das lehrreich. Denn wenn es sich anhand des mathematischen Modells LEBEN zeigen läßt, daß Leben nur eine Sache des hinreichend vielfältigen Aufbaus ist und sich selbst aus ganz einfachen Grundbausteinen ableiten läßt, dann wird die Frage nach den Spielregeln, die am Ursprung unseres Lebens stehen, wichtiger als die nach den einzelnen Stufen der Lebensentstehung.

Woher diese Spielregeln kommen könnten, ist allerdings eine Frage, die nicht mehr die Mathematik betrifft.

Doch auch sonst könnten solche mathematischen Spiele kaum vorstellbare Folgen für unsere Vorstellung von der Welt haben: Die Erkenntnisse der Physik lassen es denkbar erscheinen, daß das sogenannte Raum-Zeit-Kontinuum, die Raum-Zeit-Einheit, aus Quanten besteht. Es gäbe also eine kleinstmögliche Länge, wie es eine kleinstmögliche Zeitspanne gäbe. Sie würden Zellen bilden, die den Feldern des mathematischen Spiels entsprächen. Der amerikanische Mathematiker Edward Fredkin hat bereits vor einiger Zeit den Verdacht geäußert, daß vielleicht das ganze Weltall ein „zellulärer Automat" ist, der von einem unvorstellbaren Computer in Gang



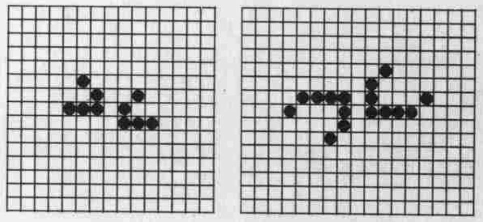


Bild 11. Zwei bekannte schwingende Figuren: Ganz links der sogenannte Hertz-Oszillator, ein Gebilde, das sich nach immer der gleichen Zahl von Schritten wiederholt, und daneben der „Tumbler“, diese Figur stellt sich auf den Kopf und schwingt wieder zurück.

Bild 12. Zwei Arten von „Seglern“ auf Kollisionskurs. Wie deren Entwicklung weitergeht, kann jeder selbst herausfinden. Man braucht dazu nur einen Bogen karierten Papiers und einige Mühlesteine – notfalls genügt sogar Papier und Bleistift. Und nun wünschen wir viel Vergnügen!

gehalten wird. Dann wäre beispielsweise jede Bewegung der eines Seglers in Conways Spiel vergleichbar – sie wäre nur scheinbar und würde durch die Zustandsveränderung einzelner Zellen verursacht. Auch dafür müßten Spielregeln gelten, die noch der Entdeckung harren. Obschon man den Vergleich nicht überbeanspruchen darf, reizt der Umstand zu Gedankenspielen, daß es in Conways Leben eine höchstmögliche Geschwindigkeit gibt, die der Erfinder selbst als „Lichtgeschwindigkeit“ bezeichnet: Eine Figur erreicht sie, wenn sie bei jedem Übergang in immer der gleichen Richtung um ein Feld weiterrückt (Der Segler in Abbildung 5 hat sich nach vier Übergängen um ein Feld in der Diagonalen nach rechts unten bewegt; ihm kommt also nur ein viertel „Lichtgeschwindigkeit“ zu.)

Eigentlich ist es aber viel zu früh für solche Spekulationen. Die Mathematiker werden noch sehr lange zu tun haben, um auch nur die wichtigsten Verläufe des Spiels Leben herauszufinden. Wie das Spiel nach und nach andere Wissenschaften befruchten mag, wird sich herausstellen müssen.

Und wer will da noch sagen, Mathematik sei trocken?