a) Aus den Kettengleichungen $\begin{bmatrix} \underline{U}_a \\ \underline{I}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(2\cdot\pi\cdot\frac{l_1}{\lambda}) & \mathrm{j}\cdot Z_L\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot\frac{l_1}{\lambda}) \\ \mathrm{j}\cdot\frac{1}{Z_L}\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot\frac{l_1}{\lambda}) & \cos(2\cdot\pi\cdot\frac{l_1}{\lambda}) \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \underline{Z}_2\cdot\underline{I}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}$ folgt für die

<u>horizontale</u> , sekundär mit $\underline{Z}_2 = R_2+\mathrm{j}\cdot X_2, \quad X_2 < 0\,\Omega$ abgeschlossene Leitung die Impedanz

$$\underline{Z}_a = \frac{\underline{U}_a}{\underline{I}_a} = \frac{\overbrace{(R_2+\mathrm{j}\cdot X_2)}^{\underline{Z}_2}\cdot\overbrace{\cos(2\cdot\pi\cdot\frac{l_1}{\lambda})}^{\sqrt{1-y_1^2}}+\mathrm{j}\cdot Z_L\cdot\overbrace{\sin(2\cdot\pi\cdot\frac{l_1}{\lambda})}^{y_1}}{\mathrm{j}\cdot\frac{\overbrace{R_2+\mathrm{j}\cdot X_2}^{\underline{Z}_2}}{Z_L}\cdot\underbrace{\sin(2\cdot\pi\cdot\frac{l_1}{\lambda})}_{y_1}+\underbrace{\cos(2\cdot\pi\cdot\frac{l_1}{\lambda})}_{\sqrt{1-y_1^2}}} \quad \text{mit} \quad \frac{l_1}{\lambda} = \frac{\mathrm{asin}(y_1)}{2\cdot\pi} .$$

Für die sekundär leerlaufenden <u>Stichleitung</u> ergibt sich aus den Kettengleichungen

$\begin{bmatrix} \underline{U}_b \\ \underline{I}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(2\cdot\pi\cdot\frac{l_2}{\lambda}) & \mathrm{j}\cdot Z_L\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot\frac{l_2}{\lambda}) \\ \mathrm{j}\cdot\frac{1}{Z_L}\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot\frac{l_2}{\lambda}) & \cos(2\cdot\pi\cdot\frac{l_2}{\lambda}) \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \underline{U}_3 \\ 0\,\mathrm{A} \end{bmatrix}$ die imaginäre Impedanz

$$\underline{Z}_b = \frac{\underline{U}_b}{\underline{I}_b} = -\mathrm{j}\cdot Z_L\cdot\frac{\cos(2\cdot\pi\cdot\frac{l_2}{\lambda})}{\sin(2\cdot\pi\cdot\frac{l_1}{\lambda})} = -\mathrm{j}\cdot\frac{Z_L}{\tan(2\cdot\pi\cdot\frac{l_2}{\lambda})} \quad \{\ \mathrm{Re}(\underline{Z}_b) = 0\,\Omega\ \}.$$

Für die <u>Serieschaltung</u> gilt $\boxed{Z_1 = \underline{Z}_a + \underline{Z}_b,\ \mathrm{Im}(Z_1) = 0\,\Omega}$. Aus dem Realteil $\boxed{Z_1 = \mathrm{Re}(\underline{Z}_a)}$ folgt nach Umformungen und quadrieren die Gleichung $\alpha\cdot y_1^4 - 2\cdot\beta\cdot y_1^2 + \gamma = 0\,\Omega^6$ mit

$\alpha = Z_1^2\cdot\{(R_2-Z_L)^2+X_2^2\}\cdot\{(R_2+Z_L)^2+X_2^2\}$, $\beta = Z_1\cdot Z_L^2\cdot\{(Z_1+R_2)\cdot X_2^2+(R_2-Z_1)\cdot(R_2^2-Z_L^2)\}$ und

$\gamma = Z_L^4\cdot(R_2-Z_1)^2$. Auflösen dieser quadratischen Gleichung in y_1^2 liefert $y_1 = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}\mp\sqrt{\frac{\beta^2}{\alpha^2}-\frac{\gamma}{\alpha}}}$. Ein Test ergibt, dass für y_1 die kleinere Lösung (mit dem "-") gilt.

Einsetzen der Werte $Z_1 = 15\,\Omega$, $Z_L = 50\,\Omega$, $R_2 = 175\,\Omega$ und $X_2 = -100\,\Omega$ ergibt die elektrische Länge $\underline{\frac{l_1}{\lambda} = 0.13611\cdots}$. Damit wird $\mathrm{Im}(\underline{Z}_a) = -\overbrace{31.1677\cdots\Omega}^{X_b}$. Aus dem Imaginärteil

$\boxed{\underline{Z}_b = -\mathrm{Im}(\underline{Z}_a)}$ folgen $\overbrace{-\mathrm{j}\cdot\frac{Z_L}{\tan(2\cdot\pi\cdot\frac{l_2}{\lambda})}}^{\underline{Z}_b} = \mathrm{j}\cdot X_b$, $\overbrace{\tan(\pi-2\cdot\pi\cdot\frac{l_2}{\lambda})}^{-\tan(2\cdot\pi\cdot\frac{l_2}{\lambda})} = \frac{Z_L}{X_b}$ und

$$\underline{\frac{l_2}{\lambda} = \frac{1}{2}-\frac{\mathrm{atan}(\frac{Z_L}{X_b})}{2\cdot\pi} = 0.33871\cdots} .$$

b) Aus den Kettengleichungen $\begin{bmatrix} \underline{U}_b \\ \underline{I}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(2\cdot\pi\cdot\frac{l_2}{\lambda}) & \mathrm{j}\cdot Z_L\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot\frac{l_2}{\lambda}) \\ \mathrm{j}\cdot\frac{1}{Z_L}\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot\frac{l_2}{\lambda}) & \cos(2\cdot\pi\cdot\frac{l_2}{\lambda}) \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \overbrace{\mathrm{j}\cdot X_L}^{\underline{Z}_3}\cdot\underline{I}_3 \\ \underline{I}_3 \end{bmatrix}$ zu der sekundär

induktiv abgeschlossenen <u>Stichleitung</u> ergibt sich diesmal die (immer noch) imaginäre Impedanz

$$\underline{Z}_b = \frac{\underline{U}_b}{\underline{I}_b} = \mathrm{j}\cdot\overbrace{\frac{X_L\cdot\overbrace{\cos(2\cdot\pi\cdot\frac{l_2}{\lambda})}^{\sqrt{1-y_2^2}}+Z_L\cdot\overbrace{\sin(2\cdot\pi\cdot\frac{l_2}{\lambda})}^{y_2}}{-\frac{X_L}{Z_L}\cdot\underbrace{\sin(2\cdot\pi\cdot\frac{l_2}{\lambda})}_{y_2}+\underbrace{\cos(2\cdot\pi\cdot\frac{l_2}{\lambda})}_{\sqrt{1-y_2^2}}}}^{X_b} \quad \text{mit} \quad \frac{l_2}{\lambda} = \frac{\mathrm{asin}(y_2)}{2\cdot\pi}$$

. Auflösen nach y_2 ergibt

$y_2 = Z_L\cdot\frac{X_b-X_L}{\sqrt{(Z_L^2+X_b^2)\cdot(Z_L^2+X_L^2)}}$. Einsetzen der Werte $X_b = 31.1677\cdots\Omega$ {aus a)}, $Z_L = 50\,\Omega$ und $X_L = 20\,\Omega$ liefert $\underline{\frac{l_2}{\lambda} = 0.028155\cdots}$.