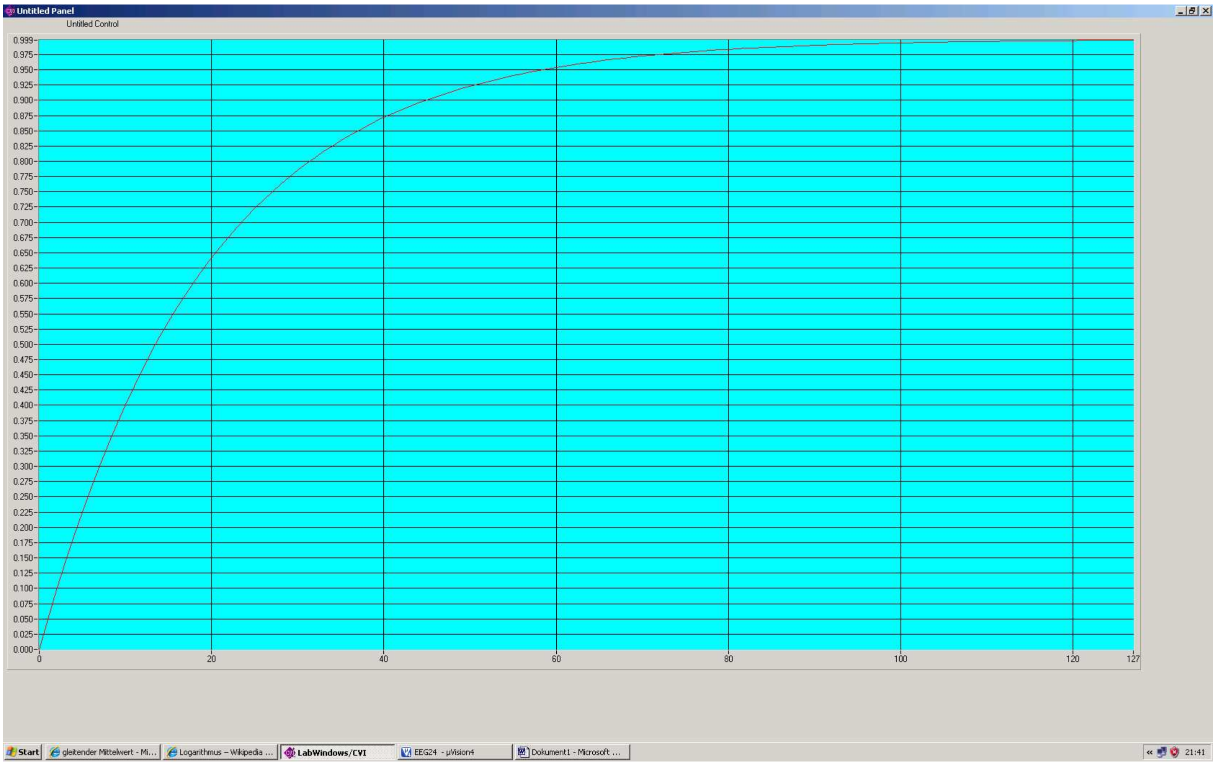
Der gleitende Mittelwert als Tiefpassfilter

$Yn = Y(n-1)*(1-K) + Xn*K$

Wobei:
Yn.........Ausgangswert
Y(n-1)...alter Ausgangswert
Xn........neuer Abtastwert
K..........Mittelwertkonstante, $0<K<1$

Eine schnelle Simulation für K=0,05 für den Einheitssprung ergibt folgendes:



Das ganze sieht ,von seinem Verhalten her ,verdächtig wie ein RC Tiefpass aus.
Es liegt auf der Hand, die 2 Dinge zu vergleichen. Der RC Tiefpass wird durch das Produkt $R*C = \tau$ = Zeitkonstante beschrieben. τ ist derjenige Zeitpunkt, in dem der Ausgangswert des RC-TP einen Level von 63% der Eingangsgröße erreicht hat (Sprungantwort).
Die uns interessierende Grenzfrequenz ist :

$Fg= 1/(2*\pi*\tau)$

Wie kann man nun die Grenzfrequenz des gleitenden Mittelwertfilters bestimmen?

Bleiben wir beim Einheitssprung, dann wird:
$Y0 = 0$
$Y1 = K$
$Y2 = K*(1-K) + K$
$Y3 = [K*(1-K) + K]*(1-K) + K = K*[(1-K)^2 + (1-K)^1 + (1-K)^0]$
$Y4 = Y3*(1-K) + K = K*[(1-K)^3+(1-K)^2+(1-K)^1 + (1-K)^0]$

Offenbar eine geometrische Reihe.

$$Ym = K \cdot \sum_{n=1}^{n=m} (1\text{-}K)^{(n-1)}$$

Die Frage lautet nun: Bei welchem „m“ ist Ym genau 0,63 ?
Die Summenformel für geometrische Reihen angewendet ergibt:

$K *[(1-K)^m - 1] / (-K) = 0{,}63$

$(1-K)^m = 0{,}37$ ➔ $m = \ln 0{,}37 / \ln (1-K)$

auf obiges Beispiel (K= 0,05) angewendet ergibt sich für m = 19

Bei K < 0,01 kann man sich den Taschenrechner sparen, es ergibt sich dann:
m = 1/K mit hinreichender Genauigkeit.

Die Zeitkonstante des gleitenden Mittelwertfilters ist also m*Ta (Ta... Abtastperiode)

Die Grenzfrequenz somit:

Fg = 1/(2*π*m*Ta)
bzw. für K<0,01
Fg = 1/(2*π*Ta/K)