Warum hat ein linear phasiges System eine symmetrische Impulsantwort?

Vereinfacht / ausgeführt zu

A. V. Oppenheim
R. W. Schafer
"Discrete-Time Signal Processing"
Prentice Hall, 2. ed. S. 296 ff

Ein Linearphasensystem hat die Übertragungsfkt.

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})\, e^{-j\omega\alpha}, \quad A(e^{j\omega}) \text{ reell}$$

$$= A(e^{j\omega}) \cos(-\omega\alpha) + j\, A(e^{j\omega}) \sin(-\omega\alpha) \qquad (1)$$

Die Übertragungsfkt ausgedrückt mit der Impulsantwort $h(n)$ lautet:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)\, e^{-j\omega n}$$

$$= \sum h(n) \cos(\omega n) - j \sum h(n) \sin(\omega n) \qquad (2)$$

Der Tangens des Winkels von $H(e^{j\omega})$ ist der Quotient der Imaginärteile / Realteile von (1) und (2):

$$\tan(\angle H(e^{j\omega})) = \frac{\sin(-\omega\alpha)}{\cos(-\omega\alpha)} = \frac{-\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \sin(\omega n)}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \cos(\omega n)}$$

$$\Rightarrow \sin(-\omega\alpha) \cdot \sum h(n) \cos(\omega n) = -\cos(-\omega\alpha) \sum h(n) \sin(\omega n)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \left(\sin(-\omega\alpha) \cos(\omega n) + \cos(-\omega\alpha) \sin(\omega n) \right) = 0 \qquad (3)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \sin(\omega(n-\alpha)) = 0 \qquad (4)$$

jetzt sei $h(n)$ um α symmetrisch:

2α : integer

$$h(2\alpha - n) = h(n) \qquad (5)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big(h(2\alpha-n)\sin(\omega(2\alpha-n-\alpha)) + h(n)\sin(\omega(n-\alpha))\Big) = 0$$

$$= \sum \Big(h(n)\big(\underline{\sin(\omega(\alpha-n)) + \sin(\omega(n-\alpha))}\big)\Big) = 0$$

$$= \sum h(n)\big(\sin(\omega(\alpha-n)) - \sin(\omega(\alpha-n))\big) = 0$$

$$= \underline{\underline{\sum h(n)\cdot 0 = 0}}$$

Forderung nach Symmetrie von $h(n)$ (Gl. 5) führt dazu, daß (4) für alle ω erfüllt ist und damit die Darstellung von $H(e^{j\omega})$ als Linearphasensystem (Gl. (1)) zulässig ist.