## Herleitung von *RMS* bei Zusammengesetzten Schwingungen

$$x(t) = A_1 sin(\frac{2\pi}{T_1}t + \phi_1) + A_2 sin(\frac{2\pi}{T_2}t + \phi_2) \tag{1}$$

Allgemein wird *root mean square* nach der folgenden Formel berechnet.

$$RMS(x(t)) = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt} \tag{2}$$

Bei Addition von Schwingungen unterschiedlicher Periodendauer, $T_1$ und $T_2$ in Gleichung (1), ergibt sich eine neue Periodendauer $T$ in Gleichung (2). Um die weitere Rechnung einfacher zu halten, sollen ganzzahlige Werte für die Frequenzen $f_1 = \frac{1}{T_1}$ und $f_2 = \frac{1}{T_2}$ genommen werden. Wähle ich zum Beispiel $f_1 = P$ und $f_2 = Q$ mit $P, Q \in \mathbb{N}$, so wird die Funktion $x(t)$ sicherlich 1-Sekunde Periode haben, die natürlich nicht notwendigerweise die kleinste Periode sein wird. So wird zum Beispiel bei $P = 2$ und $Q = 4$ die kleinste Periode $T = \frac{1}{2}$ s sein. Allgemein kann die Periodizitätseigenschaft wie folgt formal geschrieben werden.

$$x(t) = x(t \pm kT) \tag{3}$$

Bei $T$ ist hier die kleinste Periode, $k \in \mathbb{N}$ .

Wenn wir in die Formel (5) nicht mit der kleinsten Periode von $x(t)$ reingehen, ändert es nichts am Ergebnis. Beweis hierzu: Sei $T_{min}$ die kleinste Periode und $T = nT_{min}$, dann steht da

$$RMS(x(t)) = \sqrt{\frac{1}{nT_{min}}\left(\underbrace{\int_0^{T_{min}} x^2(t)dt + \int_{T_{min}}^{2T_{min}} x^2(t)dt + ...}_{n\int_0^{T_{min}} x^2(t)dt}\right)} \tag{4}$$

Speziell können wir nun einfach mit $T = 1$ s rechnen. Die Formel die sich dann ergibt ist

$$RMS(x(t)) = \sqrt{\int_0^1 x^2(t)dt} \tag{5}$$

Um den Überblick zu behalten, zerlegen wir zuerst (1) in eine günstigere Form. Dabei nutzen wir die Beziehung $sin(a+b) = cos(a)sin(b) + sin(a)cos(b)$.[1]

$$x(t) = A_1\left(cos(2\pi f_1 t)sin(\phi_1) + sin(2\pi f_1 t)cos(\phi_1)\right) \cdot A_2\left(cos(2\pi f_2 t)sin(\phi_2) + sin(2\pi f_2 t)cos(\phi_2)\right) \tag{6}$$

[1] diese Beziehung, so wie viele Weitere, lassen sich einfach über den Zusammenhang $e^{j(a+b)} = cos(a+b) + jsin(a+b) = e^{ja}e^{jb} = (cos(a) + jsin(a)) \cdot (cos(b) + jsin(b))$ über die Trennung nach *Real* und *Imag* Teil mit Anschließenden Koeffizientenvergleich herleiten

$$
\begin{aligned}
x(t) = A_1 A_2 \cdot (&cos(2\pi f_1 t)sin(\phi_1)cos(2\pi f_2 t)sin(\phi_2)+\\
&cos(2\pi f_1 t)sin(\phi_1)sin(2\pi f_2 t)cos(\phi_2)+\\
&sin(2\pi f_1 t)cos(\phi_1)cos(2\pi f_2 t)sin(\phi_2)+\\
&sin(2\pi f_1 t)cos(\phi_1)sin(2\pi f_2 t)cos(\phi_2))
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Noch unübersichtlicher wird es wenn wir $x^2(t)$ bilden.

$$
\begin{aligned}
x^2(t) = A_1^2 A_2^2 \cdot (&cos^2(2\pi f_1 t)sin^2(\phi_1)cos^2(2\pi f_2 t)sin^2(\phi_2)+\\
&cos^2(2\pi f_1 t)sin^2(\phi_1)sin^2(2\pi f_2 t)cos^2(\phi_2)+\\
&sin^2(2\pi f_1 t)cos^2(\phi_1)cos^2(2\pi f_2 t)sin^2(\phi_2)+\\
&sin^2(2\pi f_1 t)cos^2(\phi_1)sin^2(2\pi f_2 t)cos^2(\phi_2))+\\
2A_1^2 A_2^2 \cdot (&cos(2\pi f_1 t)sin(\phi_1)cos(2\pi f_2 t)sin(\phi_2)cos(2\pi f_1 t)sin(\phi_1)sin(2\pi f_2 t)cos(\phi_2)+\\
&cos(2\pi f_1 t)sin(\phi_1)cos(2\pi f_2 t)sin(\phi_2)sin(2\pi f_1 t)cos(\phi_1)cos(2\pi f_2 t)sin(\phi_2)+\\
&cos(2\pi f_1 t)sin(\phi_1)cos(2\pi f_2 t)sin(\phi_2)sin(2\pi f_1 t)cos(\phi_1)sin(2\pi f_2 t)cos(\phi_2)+\\
&cos(2\pi f_1 t)sin(\phi_1)sin(2\pi f_2 t)cos(\phi_2)sin(2\pi f_1 t)cos(\phi_1)cos(2\pi f_2 t)sin(\phi_2)+\\
&cos(2\pi f_1 t)sin(\phi_1)sin(2\pi f_2 t)cos(\phi_2)sin(2\pi f_1 t)cos(\phi_1)sin(2\pi f_2 t)cos(\phi_2)+\\
&sin(2\pi f_1 t)cos(\phi_1)cos(2\pi f_2 t)sin(\phi_2)sin(2\pi f_1 t)cos(\phi_1)sin(2\pi f_2 t)cos(\phi_2))
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Im ersten, rot markierten, Term sind alle Teilausdrücke positiv und tragen daher alle zum Integral bei. Um zu sehen welche Terme beim Integrieren verschwinden, lassen wir im zweiten, blau markierten, Ausdruck nur zeitabhängige Terme stehen.

$$
\begin{aligned}
&cos(2\pi f_1 t)cos(2\pi f_2 t)cos(2\pi f_1 t)sin(2\pi f_2 t)+\\
&cos(2\pi f_1 t)cos(2\pi f_2 t)sin(2\pi f_1 t)cos(2\pi f_2 t)+\\
&cos(2\pi f_1 t)cos(2\pi f_2 t)sin(2\pi f_1 t)sin(2\pi f_2 t)+\\
&cos(2\pi f_1 t)sin(2\pi f_2 t)sin(2\pi f_1 t)cos(2\pi f_2 t)+\\
&cos(2\pi f_1 t)sin(2\pi f_2 t)sin(2\pi f_1 t)sin(2\pi f_2 t)+\\
&sin(2\pi f_1 t)sin(2\pi f_1 t)cos(2\pi f_2 t)sin(2\pi f_2 t) =\\
&cos(2\pi f_1 t)cos(2\pi f_1 t)cos(2\pi f_2 t)sin(2\pi f_2 t)+\\
&cos(2\pi f_1 t)sin(2\pi f_1 t)cos(2\pi f_2 t)cos(2\pi f_2 t)+\\
&cos(2\pi f_1 t)sin(2\pi f_1 t)cos(2\pi f_2 t)sin(2\pi f_2 t)+\\
&cos(2\pi f_1 t)sin(2\pi f_1 t)sin(2\pi f_2 t)cos(2\pi f_2 t)+\\
&cos(2\pi f_1 t)sin(2\pi f_1 t)sin(2\pi f_2 t)sin(2\pi f_2 t)+\\
&sin(2\pi f_1 t)sin(2\pi f_1 t)cos(2\pi f_2 t)sin(2\pi f_2 t)
\end{aligned}
\tag{9}
$$