Effektivwert einer Summe von Sinussignalen

Für die Berechnung werden zwei trigonometrische Gleichungen verwendet, die zwar in den meisten Formelsammlungen stehen, aber vielleicht gerade nicht geläufig sind.

Das Produkt von zwei Sinusausdrücken ist

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{\cos(x-y)}{2} - \frac{\cos(x+y)}{2} \tag{1}$$

Als Spezialfall davon ist das Quadrat einer Sinusausdrucks

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2} \tag{2}$$

Die Funktion, deren quadratisches Mittel zu bestimmen ist, lautet allgemein

$$x(t) = a_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + a_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Quadriert ergibt die Funktion

$$\begin{aligned} x(t)^2 &= a_1^2 \sin^2(\omega_1 t + \varphi_1) + a_2^2 \sin^2(\omega_2 t + \varphi_2) \\ &\quad + 2a_1 a_2 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned}$$

Wendet man darauf die Gleichungen (1) und (2) an, ergibt sich

$$\begin{aligned} x(t)^2 = {} & \frac{a_1^2}{2} - \frac{a_1^2 \cos(2(\omega_1 t + \varphi_1))}{2} + \frac{a_2^2}{2} - \frac{a_2^2 \cos(2(\omega_2 t + \varphi_2))}{2} \\ & + a_1 a_2 \cos((\omega_1 - \omega_2)t + \varphi_1 - \varphi_2) - a_1 a_2 \cos((\omega_1 + \omega_2)t + \varphi_1 + \varphi_2) \end{aligned}$$

Von diesem Ausdruck ist nun der Mittelwert zu bilden, wobei jeder der sechs Summanden einzeln gemittelt werden darf. Der erste und der dritte Summand bleiben stehen, da sie konstant sind. Der zweite, vierte und letzte Summand fallen weg, weil der Mittelwert der Cosinusfunktionen mit von 0 verschiedener Frequenz 0 ist.

Beim fünften Summanden müssen zwei Fälle unterschieden werden: Ist $\omega_1 \neq \omega_2$, fällt der Summand weg, da der Cosinus gemittelt 0 ergibt. Ist hingegen $\omega_1 = \omega_2$, fällt der zeitabhängige Teil weg, und es bleibt der konstante Wert $a_1 a_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ übrig.

Bildet man vom Mittelwert die Wurzel, lautet das Ergebnis schließlich

$$\operatorname{rms}(x(t)) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{a_1^2 + a_2^2}{2} + a_1 a_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} & \text{falls } \omega_1 = \omega_2 \\ \sqrt{\dfrac{a_1^2 + a_2^2}{2}} & \text{sonst} \end{cases}$$