Herleitung von *RMS* bei Zusammengesetzten Schwingungen

$$x(t) = A_1 sin(\frac{2\pi}{T_1}t + \phi_1) + A_2 sin(\frac{2\pi}{T_2}t + \phi_2) \tag{1}$$

Allgemein wird *root mean square* nach der folgenden Formel berechnet.

$$RMS(x(t)) = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt} \tag{2}$$

Bei Addition von Schwingungen unterschiedlicher Periodendauer, T_1 und T_2 in Gleichung (1), ergibt sich eine neue Periodendauer T in Gleichung (2). Um die weitere Rechnung einfacher zu halten, sollen ganzzahlige Werte für die Frequenzen $f_1 = \frac{1}{T_1}$ und $f_2 = \frac{1}{T_2}$ genommen werden. Wähle ich zum Beispiel $f_1 = P$ und $f_2 = Q$ mit $P, Q \in \mathbb{N}$, so wird die Funktion $x(t)$ sicherlich 1-Sekunde Periode haben, die natürlich nicht notwendigerweise die kleinste Periode sein wird. So wird zum Beispiel bei $P = 2$ und $Q = 4$ die kleinste Periode $T = \frac{1}{2}$ s sein. Allgemein kann die Periodizitätseigenschaft wie folgt formal geschrieben werden.

$$x(t) = x(t \pm kT) \tag{3}$$

T ist hier die kleinste Periode und $k \in \mathbb{N}$.

Wenn wir in die Formel (2) nicht mit der kleinsten Periode von $x(t)$ reingehen, ändert es nichts am Ergebnis. Beweis hierzu: Sei T_{min} die kleinste Periode und $T = nT_{min}$, dann steht da

$$RMS(x(t)) = \sqrt{\frac{1}{nT_{min}}\left(\underbrace{\int_0^{T_{min}} x^2(t)dt + \int_{T_{min}}^{2T_{min}} x^2(t)dt + ...}_{n\int_0^{T_{min}} x^2(t)dt}\right)} \tag{4}$$

Speziell können wir nun einfach mit $T = 1$ s rechnen. Die Formel die sich dann ergibt ist

$$RMS(x(t)) = \sqrt{\int_0^1 x^2(t)dt} \tag{5}$$

Um den Überblick zu behalten, zerlegen wir zuerst (1) in eine günstigere Form. Dabei nutzen wir die Beziehung $sin(a+b) = cos(a)sin(b) + sin(a)cos(b)$.[1]

$$\begin{aligned} x(t) = A_1\left(cos(2\pi f_1 t)sin(\phi_1) + sin(2\pi f_1 t)cos(\phi_1)\right) + \\ A_2\left(cos(2\pi f_2 t)sin(\phi_2) + sin(2\pi f_2 t)cos(\phi_2)\right) \end{aligned} \tag{6}$$

[1] diese Beziehung, so wie viele Weitere, lassen sich einfach über den Zusammenhang $e^{j(a+b)} = cos(a+b) + jsin(a+b) = e^{ja}e^{jb} = (cos(a) + jsin(a)) \cdot (cos(b) + jsin(b))$ über die Trennung nach *Real* und *Imag* Teil mit Anschließenden Koeffizientenvergleich herleiten

Dieser Ausdruck muss nun quadriert und in die Gleichung (5) eingesetzt werden.

$$\begin{aligned} x^2(t) = A_1^2 \left(cos^2(2\pi f_1 t) sin^2(\phi_1) + 2cos(2\pi f_1 t) sin(\phi_1) sin(2\pi f_1 t) cos(\phi_1) + sin^2(2\pi f_1 t) cos^2(\phi_1) \right) + \\ A_2^2 \left(cos^2(2\pi f_2 t) sin^2(\phi_2) + 2cos(2\pi f_2 t) sin(\phi_2) sin(2\pi f_2 t) cos(\phi_2) + sin^2(2\pi f_2 t) cos^2(\phi_2) \right) + \\ 2A_1 A_2 (cos(2\pi f_1 t) sin(\phi_1) cos(2\pi f_2 t) sin(\phi_2) + cos(2\pi f_1 t) sin(\phi_1) sin(2\pi f_2 t) cos(\phi_2) + \\ sin(2\pi f_1 t) cos(\phi_1) cos(2\pi f_2 t) sin(\phi_2) + sin(2\pi f_1 t) cos(\phi_1) sin(2\pi f_2 t) cos(\phi_2) \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} x^2(t) = {\color{red} A_1^2 \left(cos^2(2\pi f_1 t) sin^2(\phi_1) + sin^2(2\pi f_1 t) cos^2(\phi_1) \right)} + {\color{blue} A_1^2 2cos(2\pi f_1 t) sin(\phi_1) sin(2\pi f_1 t) cos(\phi_1) +} \\ {\color{red} A_2^2 \left(cos^2(2\pi f_2 t) sin^2(\phi_2) + sin^2(2\pi f_2 t) cos^2(\phi_2) \right)} + {\color{blue} A_2^2 2cos(2\pi f_2 t) sin(\phi_2) sin(2\pi f_2 t) cos(\phi_2) +} \\ {\color{cyan} 2A_1 A_2 (cos(2\pi f_1 t) sin(\phi_1) cos(2\pi f_2 t) sin(\phi_2) + cos(2\pi f_1 t) sin(\phi_1) sin(2\pi f_2 t) cos(\phi_2) +} \\ {\color{cyan} sin(2\pi f_1 t) cos(\phi_1) cos(2\pi f_2 t) sin(\phi_2) + sin(2\pi f_1 t) cos(\phi_1) sin(2\pi f_2 t) cos(\phi_2))} \end{aligned} \tag{8}$$

Die rot markierten Terme sind ≥ 0 für alle Werte von t. Für die Integration der zeitabhängigen Terme gilt außerdem allgemein.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{T_1}{2}} sin^2(2\pi f_1 t) dt = \int_0^{\frac{T_1}{2}} cos^2(2\pi f_1 t) dt = \frac{T_1}{4} \\ \int_0^{\frac{T_2}{2}} sin^2(2\pi f_2 t) dt = \int_0^{\frac{T_2}{2}} cos^2(2\pi f_2 t) dt = \frac{T_2}{4} \end{aligned} \tag{9}$$

Der erste wesentliche Punkt dabei ist, dass die rot markierten Terme in einen Ausdruck der Form $A^2 V(sin^2(\phi) + cos^2(\phi))$ überführt werden können. Das führt letztlich auf die einfachere Form $A^2 V$. Dabei entspricht V dem Wert, der sich bei der Integration von 0 bis 1 in der Gleichung (5) über $sin^2(2\pi f t)$ ergibt.

Da die Integration in der Gleichung (5) von 0 bis 1 geht, und T_1 genau f_1-mal in 1 Sekunde passt, sind die Beiträge zum Integral $\frac{T_1}{4} \cdot 2 \cdot f_1 = \frac{1}{2}$. Analog auch für die zweite Schwingung. In Gleichung (9) war nur die halbe Periode berücksichtigt, deswegen steht hier zusätzlich Faktor 2.

Betrachtet man also nur die rot markierten Terme alleine, ergibt sich.

$$RMS(x(t)) = \sqrt{\frac{A_1^2 + A_2^2}{2}} \tag{10}$$

Die blau markierten Terme bilden ungerade Funktionen und integrieren sich zu 0.

Die cyan farbig markierten Terme bestehen aus einem Produkt zweier periodischer Funkionen, deren Perioden jedoch unterschiedlich sind! Unter der Berücksichtigung der Eigenschaften dieser Funktionen muss man die Eigenschaften ableiten, die für das Produkt gelten. Seien $w(t) = p(t)q(t)$ mit

ungerade	-a	-b	-c	-d	d	b	c	a
ungerade	-y	-x	-y	-x	x	y	x	y
gerade	ay	bx	cy	dx	dx	by	cx	ay
gerade	a	b	c	d	d	b	c	a
gerade	y	x	y	x	x	y	x	y
gerade	ay	bx	cy	dx	dx	by	cx	ay
gerade	a	b	c	d	d	b	c	a
ungerade	-y	-x	-y	-x	x	y	x	y
ungerade	-ay	-bx	-cy	-dx	dx	by	cx	ay

Tabelle 1: Überlegungen zu den Eigenschaften eines Produktes

$$p(t) = p(t - T_1) \tag{11}$$
$$p(t) = p(-t) \tag{12}$$
$$q(t) = q(t - T_2) \tag{13}$$
$$q(t) = -q(-t) \tag{14}$$

$$w(t) = w(t - max\{T_1, T_2\}) \tag{15}$$
$$w(t) = w(-t) \tag{16}$$

Damit integriert sich jeder einzelne cyan farbige Term auch zu 0. Denn sowohl gerade wie ungerade Funktionen sind mittelwertfrei. Wenn jedoch die Frequenzen gleich sind, ergibt sich

$$2A_1A_2(cos(2\pi ft)sin(\phi_1)cos(2\pi ft)sin(\phi_2) + cos(2\pi ft)sin(\phi_1)sin(2\pi ft)cos(\phi_2) + sin(2\pi ft)cos(\phi_1)cos(2\pi ft)sin(\phi_2) + sin(2\pi ft)cos(\phi_1)sin(2\pi ft)cos(\phi_2)) \tag{17}$$

Zum Integral trägt dann nur der Ausdruck

$$2A_1A_2(cos^2(2\pi ft)sin(\phi_1)sin(\phi_2) + sin^2(2\pi ft)cos(\phi_1)cos(\phi_2)) \tag{18}$$

bei. Nach dem Integrieren kommt zum Ausdruck unter der Wurzel in (10) zusätzlich der Term

$$\frac{2A_1A_2(sin(\phi_1)sin(\phi_2) + cos(\phi_1)cos(\phi_2))}{2} = A_1A_2cos(\phi_1 - \phi_2) = A_1A_2cos(\phi_2 - \phi_1) \tag{19}$$

dazu.