

3 Theorie der Leitungen

3.1 Leitungsgleichungen

3.1.1 Spannungs- und Stromverteilung

In Abschn. 2.5.2 haben wir bereits die Leitungsgrößen $U(z)$ und $I(z)$ eingeführt und ihre enge Beziehung zu den Feldgrößen erkannt. Wir wollen in diesem Kapitel den Verlauf von Spannung und Strom entlang einer Hochfrequenzleitung von einem physikalisch begründeten Ersatzschaltbild ableiten. Insbesondere werden wir die Verhältnisse auf einer Leitung betrachten, wenn diese mit verschiedenen Impedanzen Z_2 abgeschlossen ist (Abb. 3.1). Die Impedanz Z_2 sehen wir allgemein als Verbraucher an. Ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit wählen wir das Leitungsende, also den Ort von Z_2 als Nullpunkt der Längenkoordinate z entlang der Leitung.

Am Leitungsanfang wird elektrische Leistung von einem Generator mit Innenwiderstand R_i in die Leitung eingespeist. Aufgabe der Leitung ist es, diese Leistung dem Verbraucher zuzuführen. Die folgenden Betrachtungen sollen auch zeigen, unter welchen Voraussetzungen diese Aufgabe optimal erfüllt wird.

Zur Berechnung der Strom- und Spannungsverteilung verwenden wir das Ersatzschaltbild in Abb. 3.2 zur Beschreibung eines Abschnitts der Länge Δz einer homogenen Doppelleitung. Die Leitungseigenschaften werden dabei durch längenbezogene Größen, so genannte *Beläge*, beschrieben. Eine verlustfreie Leitung besitzt einen Kapazitätsbelag C' (in F/m) und einen Induktivitätsbelag L' (in H/m). Bei realen Leitungen entstehen Wirkverluste durch den Widerstand der Leiter und durch Verluste des Dielektrikums. Letztere sind verursacht durch Leckströme und durch Polarisationsverluste. Die Leiterverluste werden durch den Widerstandsbelag R' (in Ω/m) beschrieben. Die dielektrischen und Isolationsverluste finden ihre Berücksichtigung im Ableitungsbelag G' (in S/m).

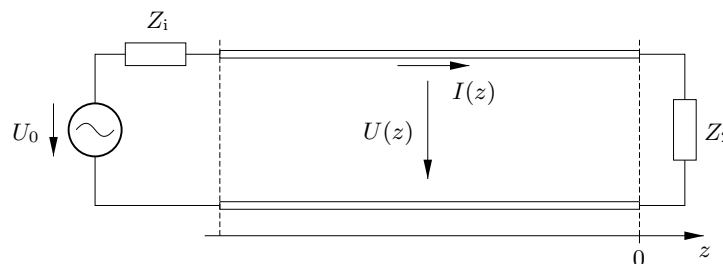


Abb. 3.1: Spannung und Strom auf einer Leitung

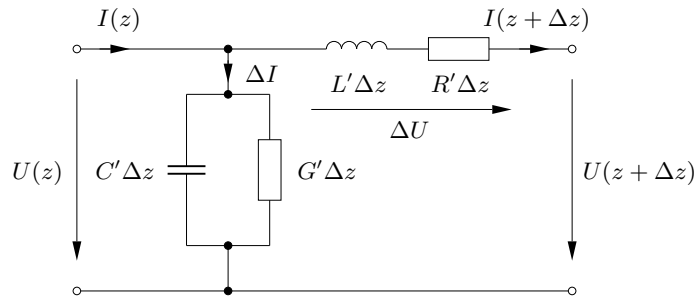


Abb. 3.2: Ersatzschaltbild eines Leitungsabschnitts der Länge Δz zur Herleitung der Leitungsgleichungen

Wir betrachten nun einen kurzen Leitungsabschnitt der Länge Δz . Die Elemente des Ersatzschaltbildes (Abb. 3.2) ergeben sich durch Multiplikation der Leitungsbeläge mit der Länge Δz des Abschnitts. An seinem Anfang (Längenkoordinate z) liege die Spannung $U(z)$ und der Strom $I(z)$ vor. An seinem Ende (Längenkoordinate $z + \Delta z$) haben sich diese beiden Größen um ΔU bzw. ΔI geändert. Wir können also

$$U(z + \Delta z) = U(z) - \Delta U \quad (3.1a)$$

$$I(z + \Delta z) = I(z) - \Delta I \quad (3.1b)$$

schreiben. ΔU ist der Spannungsabfall an den Längselementen und ΔI ist der in den Querelementen fließende Ableitungsstrom. Wir können daher schreiben:

$$\Delta U = (R' \Delta z + j\omega L' \Delta z) \cdot I(z + \Delta z) \quad (3.2a)$$

$$\Delta I = (G' \Delta z + j\omega C' \Delta z) \cdot U(z). \quad (3.2b)$$

Durch den Grenzübergang $\Delta z \rightarrow 0$ erhalten wir hieraus die gekoppelten Differenzialgleichungen

$$\frac{dU(z)}{dz} = (R' + j\omega L') \cdot I(z) \quad (3.3a)$$

$$\frac{dI(z)}{dz} = (G' + j\omega C') \cdot U(z), \quad (3.3b)$$

denen die Strom- und Spannungsverteilung der Leitung gehorcht. Wenn wir (3.3a) ein weiteres Mal nach z ableiten und den entstehenden Ausdruck dI/dz durch (3.3b) ersetzen, erhalten wir die homogene Differenzialgleichung

$$\frac{d^2 U(z)}{dz^2} - (R' + j\omega L')(G' + j\omega C') U(z) = 0 \quad (3.4)$$

für die Leitungsspannung $U(z)$. Differenzialgleichungen von dieser Gestalt sind uns schon öfter begegnet und wir wissen bereits, dass ihre Lösungen Exponentialfunktionen

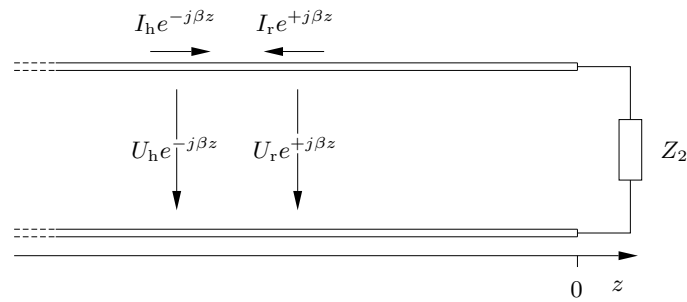


Abb. 3.3: Überlagerung von hin- und rücklaufender Welle zur Gesamtspannung und zum Gesamtstrom

sind. Durch Einsetzen bestätigt man leicht, dass die Funktion

$$U(z) = U_h e^{-\gamma z} + U_r e^{+\gamma z} \quad (3.5)$$

mit der Abkürzung

$$\gamma = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} = j\omega \sqrt{L'C'} \sqrt{(1 - j \frac{R'}{\omega L'})(1 - j \frac{G'}{\omega C'})} \quad (3.6)$$

eine allgemeine Lösung von (3.4) darstellt. Wir identifizieren (3.5) als Überlagerung zweier gegenläufiger Spannungswellen mit den komplexen Amplituden U_h und U_r und dem Ausbreitungsmaß γ . Im allgemeinen Fall ist $\gamma = \alpha + j\beta$ komplex und man bezeichnet α als *Dämpfungskonstante* und β als *Phasenkonstante*. Die Dämpfungskonstante α wird erwartungsgemäß Null, wenn $R' = 0$ und $G' = 0$, also wenn die Leitung verlustfrei ist. Die Amplituden der Spannungswellen bleiben in diesem Fall entlang der Leitung konstant und ihre Phase dreht mit $\pm\beta z$. Bei verlustbehafteten Leitungen werden die Spannungswellen entsprechend $e^{-\alpha z}$ exponentiell bedämpft. Bei verlustfreien Leitungen ist $\gamma = j\beta$ und es ergeben sich die Lösungen

$$U(z) = U_h \cdot e^{-j\beta z} + U_r \cdot e^{+j\beta z} \quad (3.7a)$$

$$I(z) = I_h \cdot e^{-j\beta z} - I_r \cdot e^{+j\beta z} \quad (3.7b)$$

für die Differentialgleichungen (3.3). Die Gleichungen (3.7a,b) beschreiben die Überlagerung zweier gegenläufiger Leitungswellen, die sich unbedämpft ausbreiten. Ihre Spannungsamplituden überlagern sich gleichgerichtet, die Stromamplituden entgegengesetzt gerichtet. Wir halten dieses zunächst als Ergebnis der Suche nach Lösungen für die Leitungsgleichungen fest. In Abschnitt 3.1.3 werden wir genauer auf die Ursachen für das Auftreten von reflektierten Wellen und deren Charakterisierung eingehen.

Zur besseren Vorstellung wollen wir die Bedeutung von (3.7) durch den Übergang in den Zeitbereich verdeutlichen. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass keine rücklaufende Welle vorliegt. Dies kann entweder durch geeignete Maßnahmen sichergestellt sein (reflexionsfreier Abschluss) oder wir begnügen uns zu diesem Zweck mit der

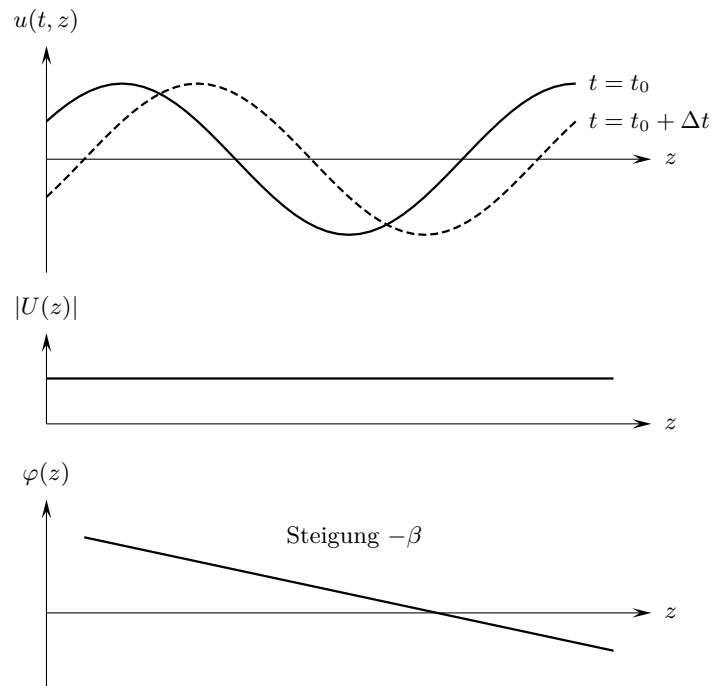


Abb. 3.4: Verlauf von Leitungsspannung, Spannungs- und Stromamplitude und deren Phase über der Längenkoordinate z

Vorstellung einer vom Generator aus unendlich ausgedehnten Leitung. Die Leitungsgleichungen (3.7) nehmen dann die einfachere Form

$$U(z) = U_h \cdot e^{-j\beta z} \quad (3.8a)$$

$$I(z) = I_h \cdot e^{-j\beta z} \quad (3.8b)$$

an. Die Bildung der entsprechenden harmonischen Zeitfunktionen geschieht durch Multiplikation mit $e^{j\omega t}$ und Realteilbildung:

$$u(t, z) = \operatorname{Re} \{ U_h \cdot e^{-j\beta z} \cdot e^{j\omega t} \} = |U_h| \cos(\omega t - \beta z + \varphi_h) \quad (3.9a)$$

$$i(t, z) = \operatorname{Re} \{ I_h \cdot e^{-j\beta z} \cdot e^{j\omega t} \} = |I_h| \cos(\omega t - \beta z + \varphi_h). \quad (3.9b)$$

Wie bei der ebenen Welle im freien Raum handelt es sich also um Funktionen mit kosinusförmiger Abhängigkeit sowohl über der Zeit t wie auch über dem Ort z . Betrachten wir den Verlauf von $u(t, z)$ zu festen Zeitpunkten und für alle z , so finden wir einen kosinusförmigen Spannungsverlauf, der sich mit wachsender Zeit als Ganzes in Richtung wachsender z verschiebt.

3.1.2 Wellenwiderstand

Im vorherigen Abschnitt haben wir gefunden, wie sich die Spannung $U(z)$ und der Strom $I(z)$ entlang einer Leitung, deren infinitesimale Abschnitte durch das Ersatzschaltbild in Abb. 3.2 beschrieben werden, bei monofrequentem Betrieb ändern. Sowohl Spannung als auch Strom ergeben sich als Überlagerung zweier entgegengesetzt laufender Wellen. Bei weiterer Betrachtung findet man, dass Spannung und Strom nicht unabhängig voneinander sind, sondern in einem festen Zusammenhang stehen, der durch die Gleichungen (3.3) gegeben ist. Die Umformung von (3.3a) ergibt

$$I(z) = -\frac{1}{R' + j\omega L'} \frac{dU}{dz}. \quad (3.10)$$

Die örtliche Änderung der Spannung

$$\frac{dU}{dz} = -\gamma U_h e^{-\gamma z} + \gamma U_r e^{\gamma z} \quad (3.11)$$

gewinnt man aus der Lösung (3.5). Setzt man (3.11) in (3.10) ein, so ergibt sich

$$I(z) = \frac{\gamma}{R' + j\omega L'} U_h e^{-\gamma z} - \frac{\gamma}{R' + j\omega L'} U_r e^{\gamma z}. \quad (3.12)$$

Zwischen $U(z)$ und $I(z)$ liegt also offenbar nur ein fester Faktor $(R' + j\omega L')/\gamma$, der deshalb die Dimension eines Widerstandes besitzt. Er heißt Leitungswellenwiderstand Z_L und kennzeichnet wesentlich die Eigenschaften von Hochfrequenzleitungen. Mit (3.6) ergibt sich

$$Z_L = \frac{R' + j\omega L'}{\gamma} = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}. \quad (3.13)$$

Der Leitungswellenwiderstand Z_L ist also wie das Ausbreitungsmaß γ ausschließlich durch die Leitungsbeläge und damit vom geometrischen Aufbau des Wellenleiters bestimmt. Allgemein setzt die Beschreibung der Verhältnisse durch den Leitungswellenwiderstand voraus, dass die Größen $U(z)$ und $I(z)$ – wie in Abschn. 2.5.2 dargelegt – sinnvoll definiert werden können.

Das auf einer Leitung vorliegende elektrische und magnetische Feld bestimmt auf diese Weise auch die örtlichen Werte von Spannung und Strom. Daher ist der Leitungswellenwiderstand letztendlich durch die Form des elektromagnetischen Leitungsfeldes und daher von der Leitungsgeometrie bestimmt. Allgemein führt der Weg zur Bestimmung des Wellenwiderstandes also über eine Analyse der Feldstruktur. Die einfache Struktur des idealisierten Bandleitungsfeldes erlaubt jedoch ein verständliches Beispiel für den Zusammenhang zwischen Z_L und den Abmessungen der Leitung. Wir betrachten dazu den verlustfreien Fall, in dem sich der Leitungswellenwiderstand aus

$$Z_L = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \quad (3.14)$$

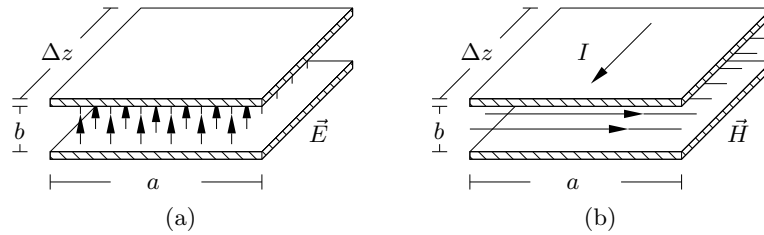


Abb. 3.5: Berechnung des Wellenwiderstandes am Beispiel einer Bandleitung (a) Kapazitätsbelag (b) Induktivitätsbelag

ergibt. Zur Berechnung der Beläge L' und C' betrachten wir kleine Leitungsabschnitte der Länge Δz (Abb. 3.5). Ein Leitungsstück der Länge Δz besitzt bei einem Leiterabstand b und einer Leiterbreite a die Kapazität $C = \varepsilon a \Delta z / b$. Der Kapazitätsbelag $C' = C / \Delta z$ ist also

$$C' = \frac{\varepsilon a}{b}. \quad (3.15)$$

Zur Bestimmung des Induktivitätsbelages ist der vom Strom I hervorgerufene magnetische Fluss Φ je Längeneinheit zu ermitteln (s. Abschn. 4.3). Unter Vernachlässigung des Streufeldes außerhalb der Bandleitung liefert das Durchflutungsgesetz den Zusammenhang $H = I/a$ zwischen Leitungstrom I und der homogenen magnetischen Feldstärke H zwischen den Bandleitern. Der magnetische Fluss durch einen Abschnitt der Länge Δz ist damit $\Phi = \mu H \cdot \Delta z \cdot b$ und der Induktivitätsbelag daher

$$L' = \frac{\Phi}{I \cdot \Delta z} = \mu \frac{b}{a}. \quad (3.16)$$

Der Leitungswellenwiderstand einer verlustfreien Bandleitung ist also näherungsweise

$$Z_L = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \sqrt{\frac{b^2 \mu}{a^2 \varepsilon}} = \frac{b}{a} Z_F. \quad (3.17)$$

Er hängt – wie bei allen TEM-Leitungen – nur von den Eigenschaften des Dielektrikums und vom geometrischen Aufbau der Leitung ab. Bei Leitungen mit mehreren Feldtypen (s. Abschn. 6.4.5) besitzt zudem jeder Feldtyp einen ihm eigenen Feldtypwiderstand. Die zugehörigen Leitungsgrößen Spannung und Strom sind wegen der bei höheren Feldtypen nicht mehr gegebenen transversalen Wirbelfreiheit entweder gar nicht mehr oder als flächenintegrale Größe definiert.

3.1.3 Reflexionsfaktor

In der Leitungstheorie erweist es sich als vorteilhaft, die Beziehung zwischen der hinlaufenden und der rücklaufenden Welle durch eine Kennzahl, den *Reflexionsfaktor* zu beschreiben. Die Behandlung und das Verständnis von Leitungsschaltungen vereinfacht

sich dadurch erheblich. Die Leitungsspannung $U(z)$ ergibt sich an jeder Stelle z durch die Addition (3.5) der komplexen Spannungsamplituden von hin- und rücklaufender Welle. Als Reflexionsfaktor $r(z)$ definiert man an jeder Stelle der Leitung

$$\text{Reflexionsfaktor} = \frac{\text{komplexe Amplitude der rücklaufenden Welle}}{\text{komplexe Amplitude der hinlaufenden Welle}}$$

also in Formelschreibweise

$$r(z) = \frac{U_r \cdot e^{+\gamma z}}{U_h \cdot e^{-\gamma z}}. \quad (3.18)$$

Zur Herleitung der Beziehung zwischen Impedanz und Reflexionsfaktor begeben wir uns zur Vereinfachung, aber ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit an die Stelle $z = 0$. Dort beträgt der Reflexionsfaktor

$$r_2 = \frac{U_r}{U_h} \quad (3.19)$$

und die Impedanz ist

$$Z_2 = Z_L \cdot \frac{U_h + U_r}{U_h - U_r}. \quad (3.20)$$

Nach Division dieser Gleichung mit U_h und Einsetzen von (3.19) erhalten wir die auf den Wellenwiderstand normierte Impedanz

$$z_2 = \frac{Z_2}{Z_L} = \frac{1 + r_2}{1 - r_2}. \quad (3.21)$$

Durch einfache algebraische Umformung erhält man

$$r_2 = \frac{z_2 - 1}{z_2 + 1} = \frac{Z_2 - Z_L}{Z_2 + Z_L}. \quad (3.22)$$

Weil die Stelle $z = 0$ willkürlich gewählt werden darf (sie stellt lediglich den Phasenbezug für U_h und U_r dar), gilt dieser eindeutige Zusammenhang zwischen normierter Impedanz und Reflexionsfaktor ganz allgemein. Wir werden davon in Abschnitt 3.3 noch intensiv Gebrauch machen.

3.1.4 Leistungstransport

Bevor wir die Betrachtungen zum Leistungstransport auf Leitungen anstellen, wollen wir kurz die Formeln zur Behandlung von Wirk-, Blind- und Scheinleistung wiederholen. Liegt an den Klemmen eines Zweipols die Spannung U und fließt der Strom I , so nimmt der Zweipol die komplexe Scheinleistung

$$S = \frac{1}{2} \cdot U \cdot I^* = P_W + jP_B \quad (3.23)$$

auf. Dabei wird ein Verbraucherzählpfeilsystem vorausgesetzt. Den Realteil der Scheinleistung bezeichnet man als Wirkleistung P_W und ihren Imaginärteil als Blindleistung P_B . Im Zeitbereich ist die Wirkleistung der zeitliche Mittelwert $\bar{p}(t)$ der Momentanleistung $p(t) = u(t) \cdot i(t)$, die sowohl positive als auch negative Werte annehmen kann. Das Vorzeichen kennzeichnet dabei lediglich die momentane Richtung (in den Zweipol hinein oder aus ihm heraus), in die Leistung transportiert wird. Ist $p(t)$ zu keiner Zeit negativ, so liegt ausschließlich Wirkleistung vor. Das andere Extremum tritt bei einer Phasendifferenz von $\pm 90^\circ$ zwischen $u(t)$ und $i(t)$ auf. Dann ist $\bar{p}(t) = 0$, es liegt ausschließlich Blindleistung vor. Im zeitlichen Mittel setzt der Zweipol dann keine Leistung um.

Wir können diese Betrachtungen direkt auf Leitungen übertragen. Im Fall einer rein vorlaufenden Welle erhalten wir mit (3.8) für die Scheinleistung am Ort z

$$S(z) = \frac{1}{2} \cdot U(z) \cdot I^*(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{|U_h|^2}{Z_L}, \quad (3.24)$$

wobei noch $I_h = U_h/Z_L$ verwendet wurde. Wir erkennen, dass $\text{Im}\{S(z)\} = 0$. Weil bei einer rein vorlaufenden Welle $U(z)$ und $I(z)$ phasengleich sind, tritt keine Blindleistung auf und wir identifizieren

$$P_{W,h} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|U_h|^2}{Z_L} \quad (3.25a)$$

als die von der hinlaufenden Welle transportierte Wirkleistung. Mit völlig analogen Überlegungen erhält man

$$P_{W,r} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|U_r|^2}{Z_L} \quad (3.25b)$$

als die Wirkleistung der rücklaufenden Welle.

Berechnen wir allgemein (bei Überlagerung einer hin- und einer rücklaufenden Welle) die transportierte Wirkleistung an der Stelle z als Realteil der Scheinleistung mit

$$P_W = \text{Re} \left\{ \frac{1}{2} \cdot U(z) \cdot I^*(z) \right\}, \quad (3.26)$$

so erhalten wir mit (3.7), mit (3.19) und mit $I_{h,r} = U_{h,r}/Z_L$

$$P_W = \frac{1}{2} \cdot \frac{|U_h|^2}{Z_L} \cdot (1 - |r_2|^2). \quad (3.27)$$

Aus (3.19) folgt auch, dass $P_{W,r} = |r|^2 \cdot P_{W,h}$. Die transportierte Wirkleistung ist bei einer verlustfreien Leitung also an jeder Stelle z gleich, und sie ergibt sich als Differenz $P_W = P_{W,h} - P_{W,r}$ zwischen der Wirkleistung $P_{W,h}$ der hinlaufenden und der Wirkleistung $P_{W,r}$ der rücklaufenden Welle.

Wir untersuchen noch den Fall einer rein vorlaufenden aber bedämpften Welle. Für Spannung und Strom auf der Leitung erhalten wir dann

$$U(z) = U_h \cdot e^{-\gamma z} \quad (3.28a)$$

$$I(z) = I_h \cdot e^{-\gamma z} \quad (3.28b)$$

mit $I_h = U_h/Z_L$, dem komplexen Ausbreitungsmaß $\gamma = \alpha + j\beta$ und der Spannung $U_h = U(0)$. Die Bildung der nun z -abhängigen Wirkleistung ergibt

$$P_W(z) = P_0 \cdot e^{-2\alpha z}, \quad (3.29)$$

wobei

$$P_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{|U_h|^2}{Z_L} = \frac{1}{2} \cdot |I_h|^2 Z_L \quad (3.30)$$

die von der hinlaufenden Welle transportierte Wirkleistung am Ort $z = 0$ ist. Die transportierte Wirkleistung nimmt also mit wachsendem z exponentiell ab, wie aufgrund der nun berücksichtigten Wirkverluste auch zu erwarten ist. Zur Berechnung der pro Längeneinheit dissipierten Leistung haben wir die Wirkleistung $P_W(z)$ lediglich nach z abzuleiten und erhalten

$$\frac{\partial P_W}{\partial z} = -2\alpha P_W(z) = -\alpha \frac{|U_h|^2}{Z_L} \cdot e^{-2\alpha z} = -\alpha |I_h|^2 Z_L \cdot e^{-2\alpha z}. \quad (3.31)$$

Damit können wir den Verlustleistungsbelag

$$P_V' = -\frac{\partial P_W}{\partial z} = \alpha Z_L |I(z)|^2 = \frac{\alpha}{Z_L} |U(z)|^2 \quad (3.32)$$

mit $|I(z)|^2 = |I_h|^2 e^{-2\alpha z}$ und $|U(z)|^2 = |U_h|^2 e^{-2\alpha z}$ definieren. Für die Dimension des Verlustleistungsbelages gilt $[P_V'] = \text{W/m}$. Schreibt man (3.32) durch Division der Einheiten V oder A in der Form

$$P_V' = \alpha Z_L \cdot A^2 \cdot \frac{|I(z)|^2}{A^2} = \frac{\alpha}{Z_L} \cdot V^2 \cdot \frac{|U(z)|^2}{V^2}, \quad (3.32')$$

dann kann man $\alpha Z_L \cdot A^2$ als den Wert des Verlustleistungsbelages betrachten, wenn ein Strom von $|I(z)| = 1 \text{ A}$ fließt. Ebenso ist $(\alpha/Z_L) \cdot V^2$ der Wert von P_V' , wenn die Leitungsspannung $|U(z)| = 1 \text{ V}$ beträgt. Beide Werte können (bei bekanntem Wellenwiderstand Z_L) zur eindeutigen Beschreibung der Verlusteigenschaften einer Leitung herangezogen werden.

3.1.5 Dämpfungskonstante bei kleinen Verlusten

Im allgemeinen Fall ergibt sich die Dämpfungskonstante α als Realteil des Ausbreitungsmasses γ nach (3.6). Unter der Annahme, dass die Wirkverluste klein seien, also $R' \ll \omega L'$ und $G' \ll \omega C'$, kann (3.6) mit der Näherung $\sqrt{1-x} \approx 1-x/2$ in der Form

$$\gamma = j\omega\sqrt{L'C'} \left(1 - j\frac{R'}{2\omega L'}\right) \left(1 - j\frac{G'}{2\omega C'}\right) \quad (3.33)$$

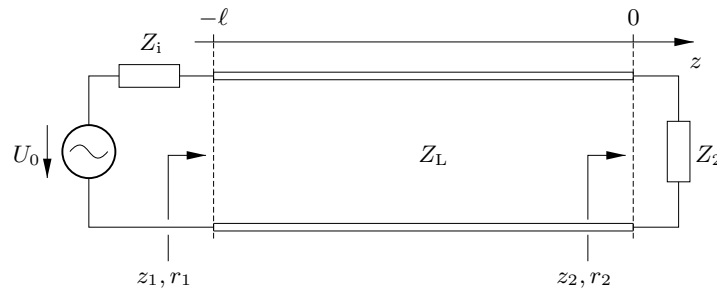


Abb. 3.6: Zur Transformation des Reflexionsfaktors

geschrieben werden. Für die Dämpfungskonstante α ergibt sich damit die einfachere Darstellung

$$\alpha = \frac{\sqrt{L'C'}}{2} \left(\frac{R'}{L'} + \frac{G'}{C'} \right) = \frac{1}{2} R' \sqrt{\frac{C'}{L'}} + \frac{1}{2} G' \sqrt{\frac{L'}{C'}}. \quad (3.34)$$

Falls es ferner zutrifft, dass die Leitungsverluste im Wesentlichen Längsverluste und weniger Querverluste sind, reduziert sich (3.34) weiter zu

$$\alpha = \frac{1}{2} R' \sqrt{\frac{C'}{L'}}. \quad (3.35)$$

Unter dieser Voraussetzung kann also die Leitungsdämpfung durch eine Vergrößerung des Induktivitätsbelages verkleinert werden. Eine entsprechende Maßnahme ist die sogenannte *Pupinisierung* einer Leitung. Dabei wird der Induktivitätsbelag durch in regelmäßigen Abständen eingeschaltete konzentrierte Serieninduktivitäten (Pupinspulen) vergrößert.

3.2 Leitungen mit beliebigem Abschluss

3.2.1 Transformation des Reflexionsfaktors

In diesem Abschnitt wollen wir untersuchen, auf welche Weise der Reflexionsfaktor entlang einer Leitung transformiert wird. Insbesondere führen diese Betrachtungen zur Bestimmung der Eingangsimpedanz Z_1 einer Leitung der Länge ℓ , die mit der Impedanz Z_2 abgeschlossen ist (Abb. 3.6).

Der Reflexionsfaktor r ist an jeder Stelle $z = -\ell$ definiert als das komplexe Verhältnis der Amplitude der rücklaufenden Welle zur Amplitude der hinlaufenden Welle. Mit dem Reflexionsfaktor $r_2 = U_r/U_h$ an der Stelle $z = 0$ ergibt sich

$$r_1 = \frac{U_r \cdot e^{+j\gamma(-\ell)}}{U_h \cdot e^{-j\gamma(-\ell)}} = r_2 \cdot e^{-j2\gamma\ell} = r_2 \cdot e^{-2\alpha\ell} \cdot e^{-j2\beta\ell}. \quad (3.36)$$

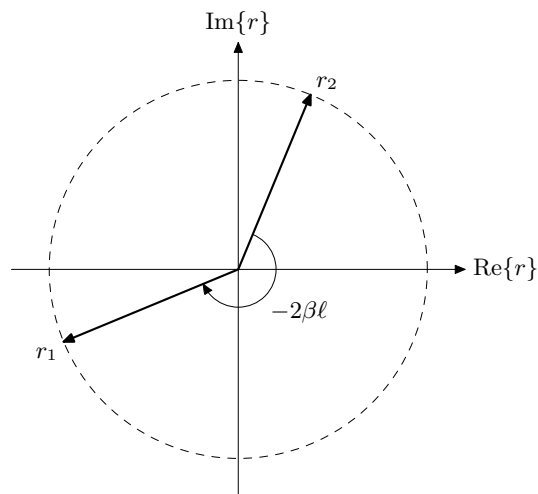


Abb. 3.7: Transformation des Reflexionsfaktors durch eine verlustfreie Leitung (Darstellung in der Reflexionsfaktorebene)

Im Fall einer verlustbehafteten Leitung nimmt der Betrag des Reflexionsfaktors mit wachsender Entfernung von der Reflexionsstelle $z = 0$ exponentiell ab. Für sehr lange verlustbehaftete Leitungen folgt hieraus, dass an ihrem Eingang immer $r_1 \approx 0$ ist, gleichgültig, mit welchem Wert Z_2 die Leitung abgeschlossen ist. Am Eingang einer sehr langen Leitung ›sieht‹ man also stets den Wellenwiderstand der Leitung. Hieraus ist freilich nicht zu folgern, dass die eingespeiste Wirkleistung in optimaler Weise dem Verbraucher Z_2 zugeführt wird. Die Reflexionsfreiheit ist in diesem Fall auf die Umsetzung der gesamten Wirkleistung in den Verlustelementen der Leitung zurückzuführen.

Bei einer verlustfreien Leitung ($\alpha = 0$) ist die Amplitude des Reflexionsfaktors auf der gesamten Leitung konstant. Der Reflexionsfaktor erfährt bei Entfernung von der Last in Richtung Generator lediglich eine Phasendrehung entsprechend $e^{-j2\beta\ell}$. Um den Eingangsreflexionsfaktor r_1 zu bestimmen ist also der Zeiger r_2 in der Reflexionsfaktorebene um den Winkel $-2\beta\ell$ zu drehen (Abb. 3.7).

Die einfache Beziehung (3.36) können wir dazu verwenden, die Eingangsimpedanz Z_1 einer verlustbehafteten Leitung mit Wellenwiderstand Z_L und Abschlussimpedanz Z_2 zu berechnen. Hierzu schreiben wir (3.21) in entnormierter Form als

$$Z_1 = Z_L \frac{1 + r_1}{1 - r_1}. \quad (3.37)$$

Nach einigen Umformungen unter Verwendung von (3.36) und (3.22) in der Form

$$r_1 = \frac{z_2 - 1}{z_2 + 1} \cdot e^{-2\gamma\ell}$$

und mit

$$\frac{e^{\gamma\ell} - e^{-\gamma\ell}}{e^{\gamma\ell} + e^{-\gamma\ell}} = \tanh \gamma\ell$$

folgt schließlich die Transformationsbeziehung

$$Z_1 = Z_L \frac{Z_2 + Z_L \tanh \gamma \ell}{Z_L + Z_2 \tanh \gamma \ell}, \quad (3.38)$$

die im Fall einer verlustfreien Leitung ($\gamma = j\beta$) wegen $\tanh x = -j \tan jx$ übergeht in die einfachere Form

$$Z_1 = Z_L \cdot \frac{Z_2 + jZ_L \tan \beta \ell}{Z_L + jZ_2 \tan \beta \ell}. \quad (3.39)$$

Die Umkehrung von (3.38) lautet

$$Z_2 = Z_L \frac{Z_1 - Z_L \tanh \gamma \ell}{Z_L - Z_1 \tanh \gamma \ell}. \quad (3.40)$$

Sie kann benutzt werden, um bei bekannten elektrischen Eigenschaften $\gamma \ell$ einer Leitung von der Eingangsimpedanz Z_1 auf die Abschlussimpedanz Z_2 zurückzurechnen.

$\lambda/4$ -Leitung

Als wichtigen Sonderfall betrachten wir ein verlustfreies Leitungsstück von der Länge einer viertel Wellenlänge. Mit $\ell = \lambda/4$ ist $\beta \ell = \pi/2$. Dieser Wert unter der Voraussetzung $\alpha = 0$ eingesetzt in (3.36) ergibt

$$r_1 = -r_2 \quad (3.41)$$

und hieraus folgt weiter

$$z_1 = \frac{1}{z_2}. \quad (3.42)$$

Durch Entnormierung dieser Beziehung mit Z_L folgt ebenso wie aus der Bestimmung des Grenzwertes $\lim_{\beta \ell \rightarrow \pi/2} Z_1$ aus (3.39) der Zusammenhang

$$Z_1 = \frac{Z_L^2}{Z_2}. \quad (3.43)$$

Damit erkennen wir die Bedeutung einer $\lambda/4$ -Leitung. Sie transformiert einen reellen Widerstand in einen anderen ebenfalls reellen Widerstand. Das Transformationsverhältnis kann durch Wahl des Wellenwiderstandes beliebig eingestellt werden. Zu beachten ist jedoch, dass diese Transformation gerade wegen der Bedingung $\ell = \lambda/4$ nicht besonders breitbandig erfolgt.

3.2.2 Stehwellenverhältnis und Anpassungsfaktor

Wir haben bereits festgestellt, dass sich auf einer Leitung im allgemeinen Fall zwei gegenläufige Spannungs- und Stromwellen überlagern. Ursache für das Auftreten einer

rücklaufenden Welle ist eine vorgegebene Impedanz, wenn sie vom Wellenwiderstand der Leitung verschieden ist¹. Die Beziehung zwischen vorlaufender und reflektierter Welle können wir mit dem Reflexionsfaktor r beschreiben, der in fester Beziehung zur normierten Impedanz z steht. Wir wollen nun untersuchen, wie sich im allgemeinen Fall die Amplituden $|U(z)|$ und $|I(z)|$ von Spannung und Strom entlang der Leitung verhalten und welcher Zusammenhang zur Abschlussimpedanz Z_2 besteht. Zu diesem Zweck schreiben wir (3.7) unter Verwendung des Reflexionsfaktors $r_2 = r(0)$ in der Form

$$U(z) = U_h \left(e^{-j\beta z} + r_2 \cdot e^{+j\beta z} \right) \quad (3.44a)$$

$$I(z) = I_h \left(e^{-j\beta z} - r_2 \cdot e^{+j\beta z} \right). \quad (3.44b)$$

Nachdem die Beträge $|U_h| = |U(0)|$ und $|I_h| = |U_h|/Z_L$ nicht ortsabhängig sind, gilt für die Beträge

$$|U(z)| \sim \left| e^{-j\beta z} + r_2 \cdot e^{+j\beta z} \right| \quad (3.45a)$$

$$|I(z)| \sim \left| e^{-j\beta z} - r_2 \cdot e^{+j\beta z} \right|. \quad (3.45b)$$

Bei den betragsbestimmenden Termen handelt es sich um gegenläufig rotierende Zeiger $e^{-j\beta z}$ und $r_2 e^{j\beta z}$ mit gleichem Phasenmaß aber verschiedenen Beträgen. Die Spannungsamplitude $|U(z)|$ ist dann maximal, wenn diese Zeiger gleich orientiert sind. An welchen Orten z dieses der Fall ist, hängt von $\arg\{r_2\}$ ab und ist hier von untergeordneter Bedeutung. Es kann aber gefolgert werden, dass im Abstand $\Delta z = \lambda/4$ von einem Maximum ein Minimum von $|U(z)|$ auftreten wird, weil die gleichorientierten Zeiger dann mit ihren entgegengesetzten Drehrichtungen um $\pi/2$ fortgeschritten sind und nunmehr entgegengesetzt orientiert sind.

Wenn die Zeiger $e^{-j\beta z}$ und $r_2 e^{j\beta z}$ gleich orientiert sind und in ihrer Summe daher maximalen Betrag aufweisen, dann wird ihre Differenz einen Zeiger minimaler Länge ergeben, und umgekehrt. Wir können also ferner folgern, dass ein Maximum von $|U(z)|$ mit einem Minimum von $|I(z)|$ zusammenfällt. Ebenso ist $|U(z)|$ gerade dann minimal, wenn $|I(z)|$ seinen größten Wert annimmt.

Entsprechend seiner Definition als Quotient aus der komplexen Amplitude von hin- und rücklaufender Welle ist der Reflexionsfaktor $r(z)$ immer dann reell, wenn die Zeiger $e^{-j\beta z}$ und $r_2 e^{j\beta z}$ entweder gleich oder entgegengesetzt orientiert sind. Im ersten Fall ist $r(z) > 0$, im zweiten Fall ist $r(z) < 0$. Dieses ist also jeweils am Ort eines Spannungsmaximums bzw. -minimums der Fall.

Wir halten zusammenfassend fest:

- Der Abstand zwischen benachbarten Maxima und Minima der Spannung oder des Stromes beträgt $\lambda/4$.

¹Allgemein treten reflektierte Wellen auch an allen Störungen der Wellenleitergeometrie auf. Diese Störungen können jedoch häufig durch ein Ersatzschaltbild aus konzentrierten Elementen beschrieben werden, sodass die hier gezeigte Behandlung reflektierter Wellen die Grundlage auch für weitergehende Problemstellungen bildet.

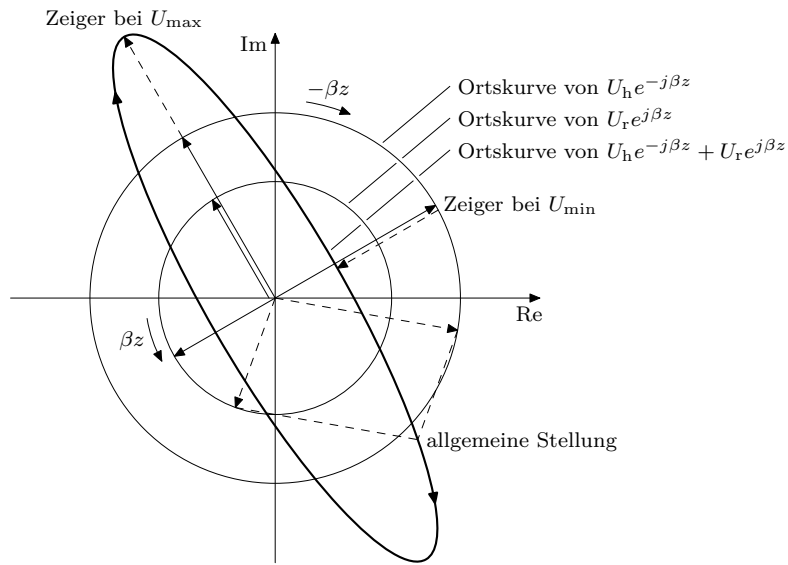
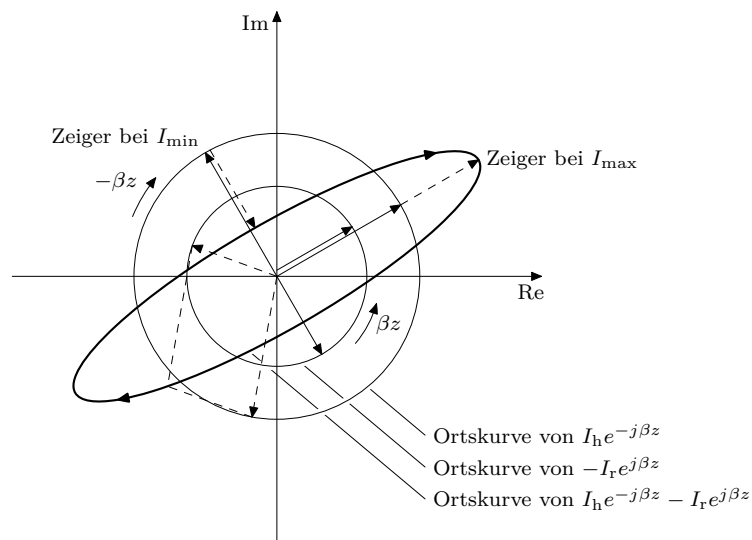
(a) Ortskurve von $U(z)$ (b) Ortskurve von $I(z)$

Abb. 3.8: Konstruktion der Ortskurven von $U(z)$ und $I(z)$ durch Überlagerung der komplexen Zeiger von Spannung und Strom der hinlaufenden und der rücklaufenden Welle

- $|U(z)|$ und $|I(z)|$ sind periodisch mit der Periode $\lambda/2$. Dabei fällt U_{\max} mit I_{\min} zusammen und umgekehrt.
- Bei einem Spannungsmaximum ist $\arg\{r\} = 0^\circ$. Die Zeiger $U_{\text{h}}e^{-j\beta z}$ und $U_{\text{r}}e^{j\beta z}$ sind gleich orientiert.
- Bei einem Spannungsminimum ist $\arg\{r\} = 180^\circ$. Die Zeiger $U_{\text{h}}e^{-j\beta z}$ und $U_{\text{r}}e^{j\beta z}$ sind entgegengesetzt orientiert.

Die Zeiger $U(z)$ und $I(z)$ entstehen durch Überlagerung der Zeiger $U_{\text{h}}e^{-j\beta z}$ und $U_{\text{r}}e^{j\beta z}$ bzw. $I_{\text{h}}e^{-j\beta z}$ und $-I_{\text{r}}e^{j\beta z}$. Dieses entspricht der Addition zweier komplexer Zeiger, deren Spitzen sich mit zunehmender Koordinate z auf Kreisen mit i. A. verschiedenen Radien bewegen. Die Winkelinkremente bezogen auf das Inkrement z sind gleich aber mit entgegengesetztem Vorzeichen. Die zu überlagernden Zeiger haben also entgegengesetzten Umlaufsinn. Hieraus folgt, dass die Ortskurven der Summenzeiger $U(z)$ und $I(z)$ ursprungszentrierte Ellipsen mit den Halbachsen $|U_{\text{h}}| + |U_{\text{r}}|$ und $|U_{\text{h}}| - |U_{\text{r}}|$ bzw. $|I_{\text{h}}| + |I_{\text{r}}|$ und $|I_{\text{h}}| - |I_{\text{r}}|$ sind (Abb. 3.8). Der Verdrehwinkel der Ellipsen hängt dabei von der Phase φ_r des Reflexionsfaktors r_2 ab. Aus den vorangegangenen Betrachtungen ist aber klar, dass die große Halbachse der Ortskurve $U(z)$ genau bei dem Winkel zu liegen kommt, bei dem die kleine Halbachse der Ortskurve $I(z)$ liegt und umgekehrt.

Ein Beispiel für den Verlauf von $|U(z)|$ und $|I(z)|$ zeigt Abb. 3.9. Es wurde dort willkürlich $r_2 = j0,7$ gesetzt.

Bei bekannter Amplitude $|U_{\text{h}}|$ und bekannten Reflexionsfaktorbetrag $|r_2|$ können wir den Maximal- und den Minimalwert der Spannung berechnen. Aus (3.45a) und den vorangegangenen Überlegungen folgt

$$U_{\max} = \max \{|U(z)|\} = |U_{\text{h}}| + |U_{\text{r}}| = |U_{\text{h}}| \cdot (1 + |r|) \quad (3.46a)$$

$$U_{\min} = \min \{|U(z)|\} = |U_{\text{h}}| - |U_{\text{r}}| = |U_{\text{h}}| \cdot (1 - |r|) \quad (3.46b)$$

und ebenso

$$I_{\max} = \max \{|I(z)|\} = |I_{\text{h}}| + |I_{\text{r}}| = |I_{\text{h}}| \cdot (1 + |r|) \quad (3.47a)$$

$$I_{\min} = \min \{|I(z)|\} = |I_{\text{h}}| - |I_{\text{r}}| = |I_{\text{h}}| \cdot (1 - |r|) \quad (3.47b)$$

Das Verhältnis

$$s = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{1 + |r|}{1 - |r|} \quad (3.48)$$

bezeichnet man als *Stehwellenverhältnis*. Es hängt, ebenso wie die zur Last transportierte Wirkleistung P_{W} nur vom Betrag des Reflexionsfaktors ab. Das Stehwellenverhältnis ist daher ein Maß für die Güte der Leistungsanpassung. Im Fall bestmöglicher Anpassung ($|r| = 0$) ist $s = 1$, bei vollständiger Reflexion ($|r| = 1$) nimmt s den Wert ∞ an. Ein inzwischen weniger gebräuchliches Maß ist der *Anpassungsfaktor*

$$m = \frac{1}{s} = \frac{1 - |r|}{1 + |r|}, \quad (3.49)$$

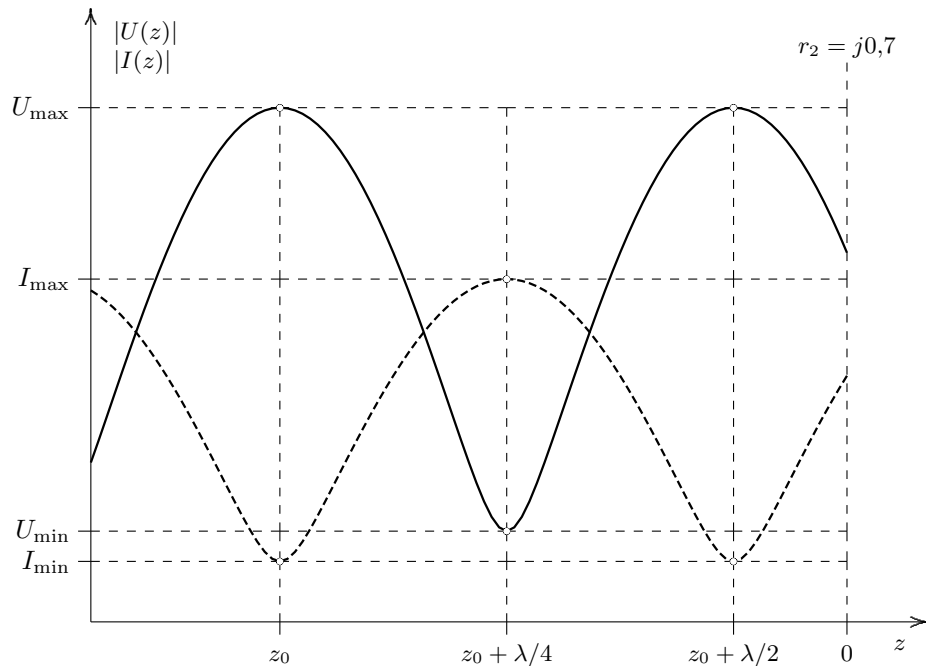


Abb. 3.9: Strom- und Spannungsamplitude auf einer Leitung. Im dargestellten Beispiel ist $r_2 = j0,7$

der sich für passive Lastimpedanzen zwischen den Extremwerten $m = 0$ (vollständige Reflexion) und $m = 1$ (Anpassung) bewegt.

3.2.3 Blindleitungen

Mit *Blindleitung* bezeichnet man Leitungen, die mit einem Blindwiderstand abgeschlossen sind. Zu den Blindwiderständen zählen Induktivitäten, Kapazitäten und allgemein auch der Leerlauf und der Kurzschluss. Blindabschlüsse sind gekennzeichnet durch eine rein imaginäre Impedanz $z = jx$ oder Admittanz $y = jb$. Durch Einsetzen in die Formel für den Reflexionsfaktor zeigt man leicht, dass für Blindwiderstände

$$|r| = 1 \quad (3.50)$$

gilt, weil $|jx - 1| = |jx + 1|$. Diese Eigenschaft ist äquivalent zu der Aussage, dass Blindwiderstände keine Wirkleistung aufnehmen. Die Leistung der hinlaufenden Welle wird vollständig reflektiert.

Weil die komplexen Amplituden von hin- und rücklaufender Welle gleich sind, weisen sowohl $|U(z)|$ als auch $|I(z)|$ Nullstellen auf. Der in Abb. 3.9 gezeigte Verlauf der Spannungs- und Stromamplitude geht über in den in Abb. 3.10 dargestellten Verlauf.

Die vorliegende Überlagerung zweier gegenläufiger Wellen gleicher Amplitude bezeichnet man als *stehende Welle* im engeren Sinne.

Wir betrachten als Beispiel eine an ihrem Ende kurzgeschlossene Leitung. Mit $z_2 = 0$ ergibt sich der Reflexionsfaktor $r_2 = -1$. Für Spannung und Strom am Eingang der Leitung erhalten wir dann

$$U_1 = U_h (e^{j\beta\ell} - e^{-j\beta\ell}) = 2jU_h \sin \beta\ell \quad (3.51a)$$

$$I_1 = \frac{U_h}{Z_L} (e^{j\beta\ell} + e^{-j\beta\ell}) = \frac{2U_h}{Z_L} \cos \beta\ell. \quad (3.51b)$$

Auch dieses Ergebnis bestätigt, dass an keiner Stelle $z = -\ell$ Wirkleistung auftritt. Die Phasendifferenz zwischen U_1 und I_1 beträgt 90° , unabhängig von ℓ . Die Eingangsimpedanz einer kurzgeschlossenen Leitung ist

$$Z_1 = \frac{U_1}{I_1} = jZ_L \tan \beta\ell = jX \quad (3.52)$$

und damit rein imaginär. Der periodische Verlauf der Tangensfunktion mit Werten $-\infty \leq \tan \beta\ell \leq \infty$ zeigt, dass Z_1 durch entsprechende Wahl der Leitungslänge ℓ jeden beliebigen induktiven oder kapazitiven Wert annehmen kann. Zum Beispiel ist $X > 0$ für $0 < \beta\ell < \pi/2$, der Eingangswiderstand einer kurzgeschlossenen Leitung ist also induktiv, solange die Leitung kürzer als $\lambda/4$ ist. Für $\ell = \lambda/4$ ist X unendlich groß, der Eingang der Leitung ist einem Leerlauf äquivalent. An dieser Stelle tritt auch eine Nullstelle des Stromes und ein Maximum der Spannung auf. Im Bereich $\pi/2 < \beta\ell < \pi$ ist $X < 0$. Der Eingangswiderstand bleibt kapazitiv, bis er bei $\beta\ell = \pi$ wieder Null wird.

Eine Leitung mit einem verschiebbaren Kurzschluss ist daher ein wichtiges hochfrequenztechnisches Bauelement, mit dem abstimmbare jedes Blindelement zumindest für eine Frequenz realisiert werden kann. Prinzipiell würde jedes verschiebbare Blindelement den gleichen Zweck erfüllen. Ein Kurzschluss kann aber technisch sehr definiert realisiert werden. Gerade die Realisierung eines Leerlaufes bereitet Schwierigkeiten, weil ein offenes Leitungsende immer eine Streukapazität aufweist. Bei hohen Frequenzen kommt noch die Abstrahlung am offenen Leitungsende hinzu, wodurch sogar ein merklicher Realteil des Abschlusswiderstandes entsteht.

Wegen $\beta\ell = \omega\ell/c_0$ zeigt X bei fester Leitungslänge den gleichen Verlauf über der Frequenz f wie bei fester Frequenz über der Leitungslänge ℓ . Bei kleiner Leitungslänge $\ell/\lambda \ll 1$ kann die Funktion $X \tan \beta\ell$ durch eine Ursprungsgerade ωL angenähert werden. Mit $\tan \beta\ell \approx \beta\ell = 2\pi\ell/\lambda$ ergibt sich

$$Z_1 = jZ_L \frac{2\pi\ell}{\lambda} := j\omega L'\ell \quad (3.53)$$

mit der äquivalenten Induktivität $L'\ell = Z_L\ell/c_0$.

In der Nähe der Nullstellen und Polstellen von $X = \tan(\omega\ell/c_0)$ verhält sich eine Blindleitung bei fester Länge jeweils wie ein Serien- und ein Parallelresonanzkreis. Mit verlustarmen Leitungen können so Resonatoren mit hoher Güte aufgebaut werden. Auf Resonatoren und den Begriff der Güte werden wir in 5.2 näher eingehen.