Betrachtet werden zwei Sinusgrößen a(t) und b(t) mit beliebigen Amplituden und Phasenwinkeln, jedoch gleicher Kreisfrequenz ω.

Aus

$$\boxed{a(t) = \hat{A}\sin(\omega t + \varphi_{0a})} \tag{1}$$

und

$$\boxed{b(t) = \hat{B}\sin(\omega t + \varphi_{0b})} \tag{2}$$

folgt unter Verwendung des Additionstheorems

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}$$

die Darstellung

$$a(t) = \hat{A}\sin(\omega t)\cos(\varphi_{0a}) + \hat{A}\cos(\omega t)\sin(\varphi_{0a})$$

$$b(t) = \hat{B}\sin(\omega t)\cos(\varphi_{0b}) + \hat{B}\cos(\omega t)\sin(\varphi_{0b})$$

Also gilt für

$$\boxed{c(t) = a(t) + b(t)} \tag{3}$$

$$c(t) = \hat{A}\sin(\omega t)\cos(\varphi_{0a}) + \hat{A}\cos(\omega t)\sin(\varphi_{0a}) + \hat{B}\sin(\omega t)\cos(\varphi_{0b}) + \hat{B}\cos(\omega t)\sin(\varphi_{0b})\,.$$

Sortiert man die Terme um, so erkennt man, dass c(t) als Summe einer reinen Kosinus- und einer reinen Sinusschwingung (jeweils ohne Phasenverschiebung) mit der ursprünglichen Kreisfrequenz ω darstellbar ist:

$$c(t) = \left[\hat{A}\sin(\varphi_{0a}) + \hat{B}\sin(\varphi_{0b})\right]\cos(\omega t) + \left[\hat{A}\cos(\varphi_{0a}) + \hat{B}\cos(\varphi_{0b})\right]\sin(\omega t)\,. \tag{4}$$

Die rechte Seite von (4) hat die gleiche Form wie die linke Seite von (10) auf dem Arbeitsblatt „Harmonische Schwingungen: Zerlegung in Sinus- und Kosinus-Komponenten".
Daraus folgt

$$c(t) = \sqrt{\left[\hat{A}\sin(\varphi_{0a}) + \hat{B}\sin(\varphi_{0b})\right]^2 + \left[\hat{A}\cos(\varphi_{0a}) + \hat{B}\cos(\varphi_{0b})\right]^2}\,\sin\left(\omega t + \arctan\frac{\hat{A}\sin(\varphi_{0a}) + \hat{B}\sin(\varphi_{0b})}{\hat{A}\cos(\varphi_{0a}) + \hat{B}\cos(\varphi_{0b})}\right)$$

Also lässt sich c(t) genau wie a(t) und b(t) in der Form

$$\boxed{c(t) = \hat{C}\sin(\omega t + \varphi_{0c})} \tag{5}$$

darstellen.

Mit

$$\left[\hat{A}\sin(\varphi_{0a}) + \hat{B}\sin(\varphi_{0b})\right]^2 + \left[\hat{A}\cos(\varphi_{0a}) + \hat{B}\cos(\varphi_{0b})\right]^2 = \hat{A}^2 + \hat{B}^2 + 2\hat{A}\hat{B}(\sin\varphi_{0a}\sin\varphi_{0b} + \cos\varphi_{0a}\cos\varphi_{0b})$$

sowie den Additionstheoremen

$$\boxed{\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))} \tag{6}$$

$$\boxed{\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))}$$

folgt

$$\boxed{\hat{C} = \sqrt{\hat{A}^2 + \hat{B}^2 + 2\hat{A}\hat{B}\cos(\varphi_{0a} - \varphi_{0b})}} = \sqrt{\hat{A}^2 + \hat{B}^2 + 2\hat{A}\hat{B}\cos(\varphi_{0b} - \varphi_{0a})} \tag{7}$$

wegen cos(x) = cos(-x). Weiterhin gilt

$$\boxed{\varphi_{0c} = \arctan\frac{\hat{A}\sin(\varphi_{0a}) + \hat{B}\sin(\varphi_{0b})}{\hat{A}\cos(\varphi_{0a}) + \hat{B}\cos(\varphi_{0b})}} \quad \text{(Quadrantenproblematik beachten!).} \tag{8}$$