

5 Grundlagen der Regelungstechnik	2
5.1 Mathematische Grundlagen	4
5.1.1 Systeme und Systemeigenschaften	4
5.2 Basiselemente zur Modellierung von Regelkreisen	12
5.2.1 Beschreibungsformen von Regelsystemen	12
5.2.2 Basissysteme	12
5.3 Entwurf von Regelkreisen	21
5.3.1 Einstellen des Verhaltens von Regelkreisen	26
5.3.2 Entwurfsaufgabe	37
5.3.3 Digitale Regelung	39

5 Grundlagen der Regelungstechnik

Regeln ist ein technischer Vorgang in einem abgegrenzten System, bei dem eine physikalische Größe, die **Regelgröße** (Istwert), fortlaufend erfasst und mit einem vorgegebenen Signal, der **Führungsgröße** (Sollwert), verglichen wird. Bei Abweichungen des Istwerts vom Sollwert (Regeldifferenz = Sollwert - Istwert $\neq 0$) beeinflusst der Regler die Regelstrecke mit dem Ziel, den Istwert dem Sollwert anzugleichen (Bild 5.1.1).

Im Allgemeinen ist eine solche zunächst eingestellte Gleichheit nicht von Dauer. Störgrößen verschiedenster Art verändern die Regelgröße und verlangen ein Nachregeln. Dabei kann es vorkommen, dass das Nachregeln keinen Erfolg hat, d.h. Gleichheit von Ist- und Sollwert ist nicht einstellbar, vielmehr ist der Istwert mal größer und mal kleiner als der Sollwert. Man sagt der Regelkreis schwingt.

Definition: Strecke

Die Strecke ist derjenige Teil eines Systems, in dem physikalische Größen mit einem bestimmten Ziel beeinflusst werden sollen. Manche Autoren rechnen auch Aktoren und Sensoren mit zur Regelstrecke. In dieser Darstellung gehen wir zunächst davon aus, dass es für die Strecke ein mathematisches Modell in Form einer linearen Differentialgleichung gibt. Häufig arbeitet man allerdings auch mit ungenauen Modellen (Fuzzy-Modellen).

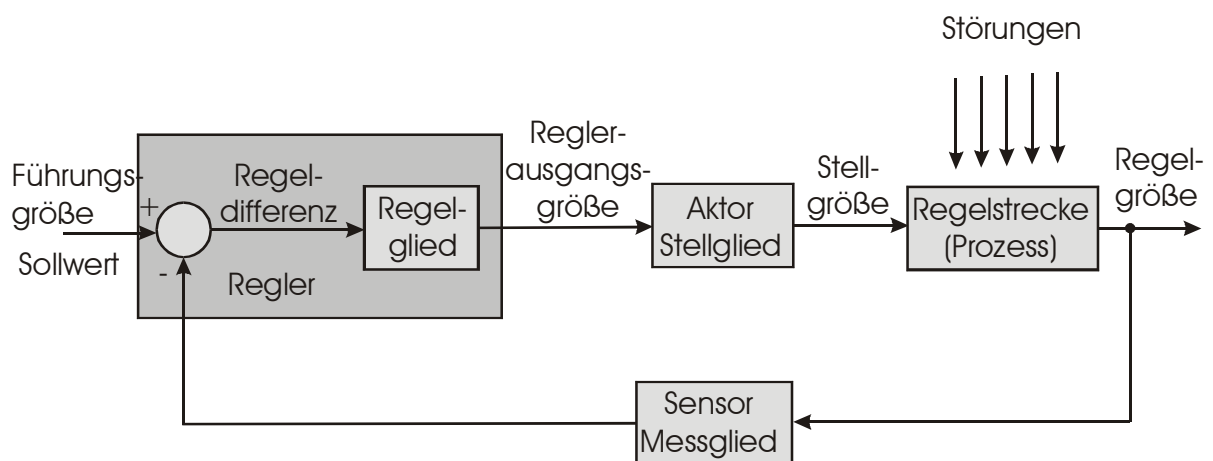


Bild 5.1.1: Aufbau eines Regelkreises

Definition: Regler

Ein Regler ist eine Schaltung oder ein programmierter Prozessor, zur Durchführung der Regelung. Diese muss verschiedene Zielvorgaben erfüllen.

Die Güte einer Regelung wird beispielsweise durch die Genauigkeit bestimmt, mit welcher der Sollwert eingestellt werden kann. Auch die Verzögerung, mit welcher der Istwert dem Sollwert folgt, ist eine wichtige Kenngröße.

Beispiel: Tempomat

Ein Tempomat hat die Aufgabe ein Fahrzeug mit konstanter Geschwindigkeit zu führen. Der Sollwert (Führungsgröße) ist also eine einstellbare konstante Geschwindigkeit. Regelstrecke ist das Fahrzeug, dessen Geschwindigkeit über den Aktor "Gaspedal" eingestellt werden kann. Die Geschwindigkeit wird durch ein Tachosystem gemessen. Daher kann die aktuelle Geschwindigkeit laufend mit der Sollgeschwindigkeit verglichen und die Einstellung des Gaspedals entsprechend verändert werden.

Ein Fahrzeug ist ein sehr komplexes technisches System. Zum Entwurf eines Reglers genügt aber ein einfaches Modell, das die wichtigsten regelungstechnischen Aspekte berücksichtigt. Wir arbeiten hier mit einem mathematischen Modell.

Modell der Regelstrecke:

Unser extrem vereinfachtes Modell betrachtet die Summe der Kräfte, die auf ein Auto wirken.

Seien k : Kraft, die der Motor erzeugt. Physikalische Einheit: Newton (N)

v : Geschwindigkeit. Physikalische Einheit: m/s

m : Masse des Fahrzeugs. Physikalische Einheit: $\text{kg} = \text{Ns}^2/\text{m}$

b : Reibungskonstante: Physikalische Einheit: Ns/m

Die Motorkraft k beschleunigt das Fahrzeug (Masse) und überwindet die Reibungskraft.

Dabei gilt:

Beschleunigungskraft ist proportional zur Beschleunigung: $\sim \frac{dv}{dt}$

Reibungskraft ist proportional zur Geschwindigkeit: $\sim v$

Die Gleichung des Kräftegleichgewichts nach Newton besagt:

Beschleunigungskraft + Reibungskraft = Motorkraft

$$m * \frac{dv}{dt} + b * v = k$$

Dabei sind m ($m \in \mathbb{R}_{>0}$) und b ($b \in \mathbb{R}_{>0}$) als Konstanten anzusehen, so dass diese Gleichung die Abhängigkeit der Geschwindigkeit des Fahrzeugs von der eingestellten Kraft darstellt.

Stellt man eine konstante Kraft ein, dann rollt das Fahrzeug nach einer Anlaufzeit mit konstanter Geschwindigkeit. Tatsächlich wirken aber Störgrößen etwa durch Berg- und Talfahrt. Bei Bergfahrt muss die Kraft k vergrößert werden, da die Geschwindigkeit sinkt und bei Talfahrt muss die treibende Kraft entsprechend reduziert werden.

5.1 Mathematische Grundlagen

5.1.1 Systeme und Systemeigenschaften

Systeme verarbeiten Eingangssignale dadurch, dass sie wieder andere Signale an ihrem Ausgang erzeugen.

Beim Tempomat ist die Kraft k Eingangsgröße des Systems Fahrzeug, die Geschwindigkeit v ist seine Ausgangsgröße

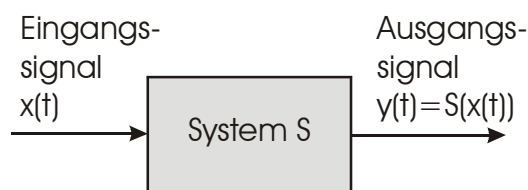


Bild 5.1.2: System mit je einem Ein- und Ausgangssignal

Für ein Eingangssignal $x(t)$ bezeichnet $S[x](t) = y(t)$ das entsprechende Ausgangssignal des Systems S . Eine derartige Funktionalbeziehung beschreibt das Verhalten des Systems.

Im folgenden werden einige wichtige Systemeigenschaften beschrieben.

Definition: Statisch/dynamisch

Ein System S mit $y_1(t) = S[x_1](t)$ und $y_2(t) = S[x_2](t)$ heißt *statisch*, wenn gilt:

$$\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R} : (x_1(t_1) = x_2(t_2)) \Rightarrow (y_1(t_1) = y_2(t_2)).$$

Systeme, die nicht statisch sind, heißen *dynamisch*.

Wenn also zu beliebigen Zeitpunkten t_1 und t_2 die Werte zweier Eingangssignale x_1 und x_2 eines statischen Systems gleich sind, dann sind es auch die Ausgangssignale y_1 und y_2 .

Zur formalen Definition der folgenden Systemeigenschaft verwenden wir die Substitution in einem Term: $x(t)[(t-\tau) \text{ für } t]$ bedeutet, dass wir in dem Term für $x(t)$ jedes Vorkommen von t durch $t-\tau$ ersetzen.

Definition: Zeitinvarianz

Ein System S mit $y(t) = S[x](t)$ heißt zeitinvariant, wenn es auf eine zeitversetzte Eingabe mit einer zeitversetzten Ausgabe reagiert, d.h., wenn

$$y(t - \tau) = S[x](t)[(t - \tau) \text{ für } t] \quad (5.1)$$

Ist dies nicht der Fall, so heißt das System zeitvariant oder zeitvariabel.

Man beachte dabei, dass die Substitution im Term $S[x](t)$ und nicht nur in der Eingabe $x(t)$ vorgenommen wird.

Definition: Linearität:

Lineare Systeme besitzen die Eigenschaft der Superposition. Besteht eine Eingabe aus der gewichteten Summe mehrerer Signale, so besteht die Ausgabe aus der gewichteten Summe der Ausgaben des Systems für jedes dieser Signale, also der Superposition dieser Ausgangssignale.

Ein System S mit $y_1(t) = S[x_1](t)$ und $y_2(t) = S[x_2](t)$ heißt *linear*, wenn es für alle möglichen Signalverläufe $x_1(t)$ und $x_2(t)$ die beiden folgenden Eigenschaften besitzt:

1. *Additivität* oder Überlagerungseigenschaft

$$\forall t \in \mathbb{R} : S[x_1 + x_2](t) = y_1(t) + y_2(t)$$

2. *Homogenität* oder Skalierung

$$\forall t \in \mathbb{R} \wedge \forall \alpha \in \mathbb{R} : S[\alpha * x_1](t) = \alpha * y_1(t)$$

Zusammengefasst ist ein System dann linear, wenn gilt:

$$\forall t \in \mathbb{R} \wedge \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} : S[\alpha_1 * x_1 + \alpha_2 * x_2](t) = \alpha_1 * y_1(t) + \alpha_2 * y_2(t) \quad (5.2)$$

Erfüllt ein System eine der beiden angegebenen Bedingungen nicht, so ist es nichtlinear.

Das Verhalten von Systemen, die linear und zeitinvariant sind, kann durch lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschrieben werden. Sei S ein solches System mit $S[x](t) = y(t)$. Dann kann das Systemverhalten wie folgt angegeben werden:

$$\left(a_n \frac{d^n}{dt} + \dots + a_1 \frac{d}{dt} + a_0 \right) * y(t) = \left(b_m \frac{d^m}{dt} + \dots + b_1 \frac{d}{dt} + b_0 \right) * x(t) \quad (5.3)$$

5.1 Mathematische Grundlagen

6

Jeder Summand in den Klammern ist ein mit konstanten Koeffizienten multiplizierter Differentialoperator. Man schreibt diese Gleichung auch in der Form:

$$a_n * y^{(n)}(t) + \dots + a_1 * y^{(1)}(t) + a_0 * y(t) = b_m * x^{(m)}(t) + \dots + b_1 * x^{(1)}(t) + b_0 * x(t),$$

wobei $y^{(i)} = \frac{d^i y}{dt}$ zwei Darstellungen der i -ten Ableitung von $y(t)$ bezeichnen.

Damit die Lösung $y(t)$ bei *gegebener* Eingangsgröße $x(t)$ und damit die Transformation $S[x]$ für das vorgegebene Eingangssignal und alle positiven Zeiten ($t \geq 0$) bestimmt werden kann, müssen Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$ an die Ausgangssignale erfüllt sein. Dabei bezeichnen $C_i \in \mathbb{R}$ beliebige Konstanten.

$$y(0) = C_0$$

$$y^{(1)}(0) = C_1$$

.....

$$y^{(n-1)}(0) = C_{n-1}$$

Äquivalent dazu ist die Forderung an das Eingangssignal: $\forall t < 0 : x(t) = 0$.

Eine explizite Darstellung der Transformation $y(t) = S[x](t)$ für alle x lässt sich im Allgemeinen nicht angeben.

Beispiel:

Das hier betrachtete elektrische System (Bild 5.1.3) ist ein RC-Glied mit der Eingangsgröße $x(t) = u_e(t)$ (Eingangsspannung) und der Ausgangsgröße $y(t) = u_a(t)$ (Ausgangsspannung) und könnte Modell eines Reglers sein.

Für den Widerstand R gilt:

$$x(t) = i(t) \cdot R + y(t)$$

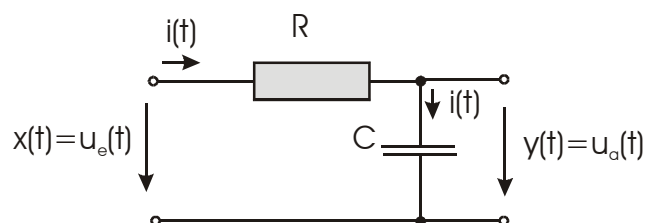


Bild 5.1.3: RC-Glied

Für die Kapazität C gilt:

$$i(t) = C * y^{(1)}(t)$$

Wir setzen in die Widerstandsgleichung ein und erhalten:

$$x(t) = R * C * y^{(1)}(t) + y(t)$$

Wir teilen durch $R * C$:

$$y^{(1)}(t) + \frac{1}{R * C} * y(t) = \frac{1}{R * C} * x(t)$$

Die Gleichung ist von der oben angegebenen Form linearer Differentialgleichungen. Die Anfangsbedingung sei beispielsweise $y(0) = 0$. Eine Auflösung nach $y(t)$ gelingt nur für ein vorgegebenes $x(t)$.

Beispiel: Tempomat

Als mathematisches Modell der Regelstrecke haben wir abgeleitet:

$$m * \frac{dv}{dt} + b * v = k$$

Wir schreiben diese Differentialgleichung in der Standardform:

$$v^{(1)} + \frac{b}{m} * v = \frac{k}{m}$$

Zur Charakterisierung und zum Vergleich des Verhaltens verschiedener Systeme verwendet man bestimmte praktisch wichtige Eingangssignalverläufe $x(t)$, beispielsweise einen Sprung bei $t = 0$, und bezeichnet das zugehörige $y(t)$ als *Systemantwort*, z.B. für den Sprung als *Sprungantwort*.

Definition der Sprungfunktion (Bild 5.1.4):

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

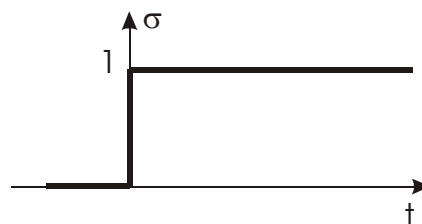


Bild 5.1.4: Sprungfunktion $\sigma(t)$

Eine solche Funktion bezeichnet man auch als *Einheitsschritt* oder *Einheitssprung* (Symbol $\sigma(t)$).

Im Beispiel des RC-Gliedes erhält man als Sprungantwort:

$$y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{RC}}$$

Man weist dies durch Einsetzen in die Differentialgleichung und Feststellung des Wertes $y(0)$ zur Zeit $t = 0$ nach.

Definition: Stabilität

(1) Ist die Eingabe eines stabilen linearen und zeitinvarianten Systems beschränkt, so ist die Ausgabe dieses Systems ebenfalls beschränkt (kein Divergieren der Ausgabe).

Ein System S mit $y(t) = S[x](t)$ ist *stabil*, wenn für konstante Werte $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\forall t \in \mathbb{R}, k_1 \in \mathbb{R} : \exists k_2 \in \mathbb{R} : |x(t)| \leq k_1 \Rightarrow |y(t)| \leq k_2 \quad (5.4)$$

In der Regelungstechnik verwendet man alternativ noch die folgende Definition:

(2) Ein lineares zeitinvariantes System heißt stabil, wenn für die Eingabe

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

die Ausgabe einem endlichen Grenzwert zustrebt.

Eine andere wichtige Eingangsgröße zur Charakterisierung von Regelkreisen ist der *Dirac-Impuls* $\delta(t)$. Er ist der Grenzwert für $a \rightarrow 0$ der in Bild 5.1.5 gezeigten Funktion mit der konstanten Fläche $\frac{1}{a} * a = 1$

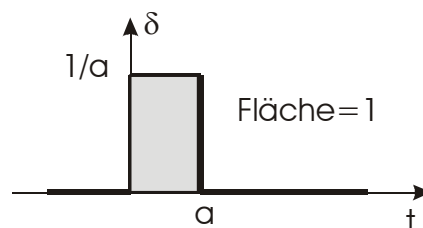


Bild 5.1.5: Dirac-Impuls

$$\delta(t) = \lim_{a \rightarrow 0} \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{für } 0 \leq t \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Regelssysteme unterscheiden sich in den Eigenschaften der Reaktion auf einen solchen Dirac-Impuls. Dieser entspricht einer kurzzeitigen Anregung (z.B. Stein fällt ins Wasser, es entstehen Wasserwellen), deren Reaktion auch innerhalb kurzer Zeit abgeklungen sein sollte.

In der "klassischen" Regelungstechnik sind Regler auf der Basis linearer, zeitinvarianter Basissysteme definiert, die so entworfen werden, dass sie ein stabiles Verhalten zeigen.

Es gibt Regler mit statischem oder dynamischem Verhalten. Nichtlineare statische Regler (z.B. Fuzzy-Regler) sind Gegenstand aktueller Forschung.

Das dynamische Verhalten von Systemen wird in der Regelungstechnik statt durch Zeitfunktionen häufig durch deren Laplace-Transformierte beschrieben, die viele Gemeinsamkeiten mit der Fouriertransformation besitzt. Dies führt zu übersichtlicheren Darstellungen und zu einfacheren Berechnungen. Auf diese Methode können wir hier nicht eingehen. Wir beschränken uns vielmehr auf Systemanalysen, die Sprungantworten zu Grunde legen.

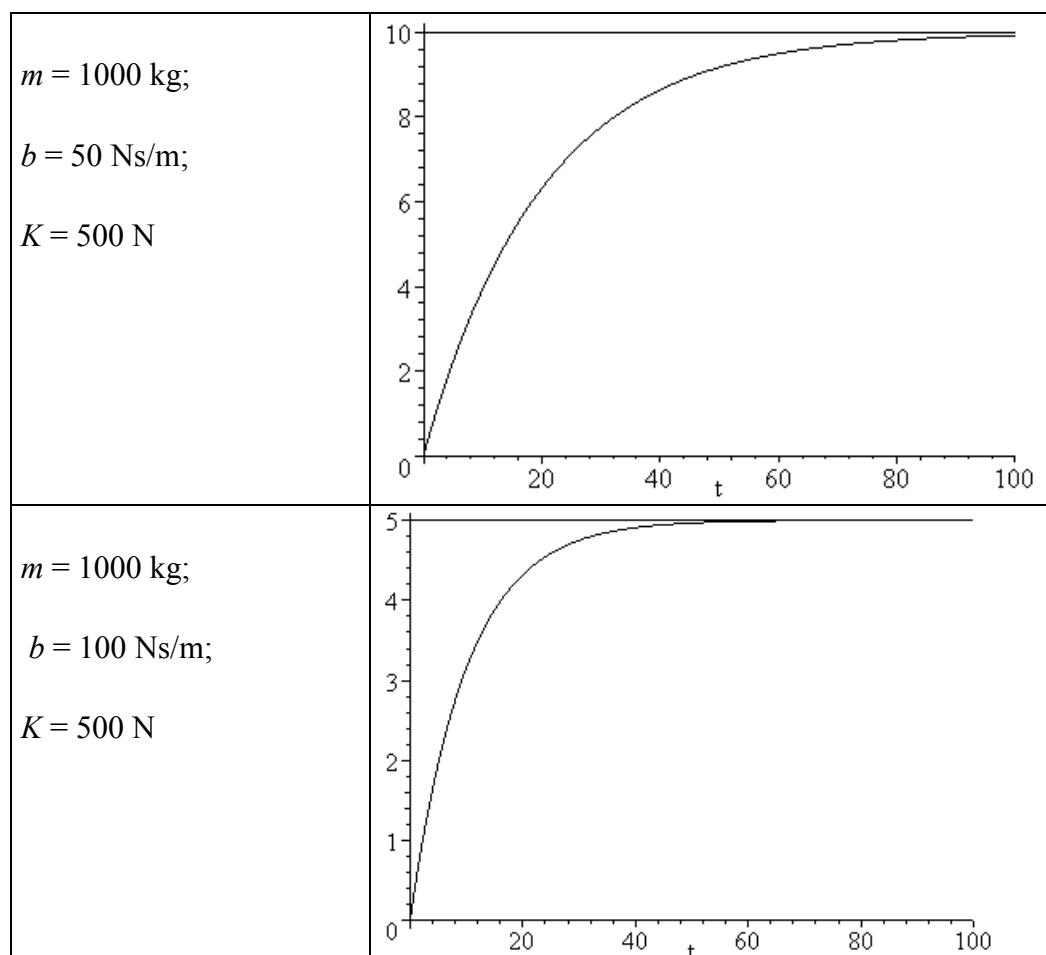


Bild 5.1.6: Entwicklung der Fahrzeuggeschwindigkeit $v(t)$ für verschiedene Werte der Parameter

Beispiel: Tempomat

Wir lösen die Differentialgleichung:

$$v^{(1)} + \frac{b}{m} * v = \frac{k}{m}$$

für den Eingangssprung $k = K * \sigma$ mit konstanter Kraft K

Außerdem gelte für die Sprungantwort $v_{off,\sigma}$ des unregelten Fahrzeugs:

$$\forall t < 0 : v_{off,\sigma} = 0$$

Das Fahrzeug werde also aus dem Stand beschleunigt. Als Lösung der Differentialgleichung erhalten wir:

$$v_{off,\sigma} = \frac{K}{b} * \left(1 - e^{-\frac{b}{m} * t} \right)$$

Das Fahrzeug erreicht also für $t \rightarrow \infty$ seine Endgeschwindigkeit $\frac{K}{b}$. Eine

Vergrößerung der Masse m verzögert die Erreichung des Endwertes. Eine Vergrößerung des Wertes von b hat zwei Wirkungen, zum einen verringert er die Endgeschwindigkeit, zum anderen wird diese niedrigere Endgeschwindigkeit früher erreicht. Der Wert von $\frac{m}{b}$ steht für diese Zeit.

Zahlenbeispiele:

$m = 1000$ kg; $b = 50$ Ns/m; $K = 500$ N: (Bild 5.1.6a) Die Endgeschwindigkeit wird erst nach ca. 100 s ungefähr erreicht. Regelungstechnische Maßnahmen haben zum Ziel, diese langsame Reaktion zu beschleunigen, ohne sich allerdings dafür die Gefahr einer Instabilität des Systems (Schwingung mit ansteigender Amplitude) ein zu handeln.

Wir haben festgestellt, dass lineare Systeme in ihrem Verhalten durch lineare Differentialgleichungen beschrieben werden können:

$$\left(a_n \frac{d^n}{dt} + \dots + a_1 \frac{d}{dt} + a_0 \right) * y(t) = \left(b_m \frac{d^m}{dt} + \dots + b_1 \frac{d}{dt} + b_0 \right) * x(t)$$

Für einfache Differentialgleichungen haben wir auch entsprechende Sprungantworten angegeben. Im allgemeinen besitzen Systemantworten Lösungsterme der Form:

$$R_0 * e^{\mu * t}, R_1 * t * e^{\mu * t}, R_2 * t^2 * e^{\mu * t}, \dots$$

$$A_0 * e^{\mu * t} * \cos(\omega * t) + B_0 * e^{\mu * t} * \sin(\omega * t),$$

$$A_1 * e^{\mu * t} * t * \cos(\omega * t) + B_1 * e^{\mu * t} * t * \sin(\omega * t),$$

$$A_2 * e^{\mu * t} * t^2 * \cos(\omega * t) + B_2 * e^{\mu * t} * t^2 * \sin(\omega * t), \dots,$$

wobei $R_i, A_i, B_i, \mu \in \mathbb{R}$ Konstanten sind, eine Sprungantwort kann aber additive Komponenten mit unterschiedlichen konstanten Werten für diese Parameter enthalten. Selbst für $\mu = 0$ erhält man in diesen Fällen mit der Zeit t unbegrenzt wachsende Komponenten. Treten diese in einer Lösung tatsächlich auf, ist das System instabil, da der Sprung ein auf den Sprungwert begrenzte Funktion darstellt, deren Antwort bei stabilen Systemen ebenfalls begrenzt sein muss.

Welche Termstrukturen tatsächlich in einer Lösung auftreten können, hängt vom Grad n der Differentialgleichung ab.

Bei unseren einfachen Untersuchungen treten aber Komponenten auf, die keinen Faktor t enthalten. Dann besteht die Lösung der Differentialgleichung nur aus einer Summe von Exponentialfunktionen, wobei allerdings der Exponent komplex sein kann. Dann nutzt man die Beziehung:

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega * t) + j * \sin(\omega * t),$$

wobei

$$j =_{\text{def}} \sqrt{-1}$$

gilt. Auf die Interpretation komplexer Größen können wir hier nicht eingehen. Der Bezeichner i ist in der Regelungstechnik für elektrische Ströme reserviert.

5.2 Basiselemente zur Modellierung von Regelkreisen

5.2.1 Beschreibungsformen von Regelsystemen

Eine analytische Beschreibung einzelner Elemente eines Regelsystems S kann beispielsweise mit Hilfe von

- 1) funktionalen Beziehungen $y(t) = S[x](t)$
- 2) Sprungantworten $S[\sigma](t)$

erfolgen.

Funktionale Beziehungen beschreiben das physikalische Verhalten eines Systems, indem sie einer Eingangsgröße $x(t)$ eine Ausgangsgröße $y(t)$ zuordnen:

$$y(t) = S[x](t).$$

Die *Sprungantwort* $S[\sigma](t)$ beschreibt das zeitliche Verhalten der Ausgangsgröße, das sich bei Erregung des Systems durch eine sprungförmige Eingangsfunktion $\sigma(t)$ (Einheitssprung) ergibt.

Basissysteme sind einfache Komponenten, die zur Modellierung von Regelstrecken, Sensorik und Aktorik verwendet werden und die zum Aufbau von Reglern geeignet hinzu komponiert werden müssen.

5.2.2 Basissysteme

Die Basissysteme P-, I- und D-Glied werden im folgenden ausführlicher beschrieben, weitere Basissysteme sind in der Tabelle 5.2.1 zusammengestellt. Dabei ist die konkrete Implementierung, etwa als elektrisches, mechanisches oder pneumatisches System hier ohne Interesse.

Benennung	Funktionale Beziehung	Sprungantwort (0 für $t < 0$)	Symbol
P-Glied	$y = k_P * x$	k_P	
I-Glied	$y = k_I * \int_0^t x(\tau) dt$	$k_I * t$	
D-Glied	$y = k_D * \frac{dx}{dt}$	$k_D * \delta(t)$	
VZ ₁ -Glied Verzögerung	$T_{VZ} * \frac{dy}{dt} + y = k_{VZ} * x$	$y(t) = k_{VZ} * \left(1 - e^{-\frac{t}{T_{VZ}}}\right)$	
TZ-Glied Totzeit	$y(t) = k_T * x(t - T_t)$	$k_T * \sigma(t - T_t)$	
S-Stelle (Summieren)	$y = \pm x_1 \dots \pm x_p$		

Tabelle 5.2.2: Zusammenstellung verschiedener Basissysteme

Die Symbole in der letzten Spalte der Tabelle 5.2.1 dienen zur grafischen Darstellung von Regelkreisen.

Definition: P-Glied (P: Proportional):

Ein P-Glied wird definiert durch die funktionale Beziehung:

$$y(t) = k_P * x(t) \quad \text{mit der Konstanten } k_P \in \mathbb{R} : \text{Proportionalbeiwert}$$

oder durch die Sprungantwort, d.h. für $x(t) = \sigma(t)$:

$$y(t) = k_P * \sigma(t) = \begin{cases} k_P & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

Bild 5.2.3 zeigt das Symbol eines P-Gliedes, wobei der Proportionalbeiwert k_p als Parameter angegeben wird.



Bild 5.2.3: Symbol eines P-Gliedes

Beispiele für die Modellierung technischer Einheiten als P-Glieder sind:

Getriebe: Zwei ineinandergreifende Zahnräder mit der Zähnezahl Z_e und Z_a . Die Drehzahl des ersten Zahnrads sei $n_e(t)$, des zweiten $n_a(t)$. Es gilt für die Abhängigkeit der Drehzahl des zweiten Zahnrads von der Drehzahl des ersten:

$$n_a(t) = \frac{Z_e}{Z_a} * n_e(t)$$

Die Anzahl der Zähne sind dabei natürlich konstant.

Tachogenerator: Ein Tachogenerator erzeugt eine zur Drehzahl $n_e(t)$ proportionale Spannung $U_a(t)$:

$$\frac{U_a(t)}{U_{Ref}} = \frac{n_e(t)}{n_0} \quad U_{Ref}: \text{Spannung für die Drehzahl } n_0$$

Bei genauerer Modellierung müsste man natürlich eine Zeitverzögerung berücksichtigen. Dies kann entfallen, wenn andere Elemente eines Regelkreises deutlich größere Verzögerungszeiten aufweisen. Diese werden dann durch andere Elemente aus Bild 5.2.2 modelliert.

I-Glied (I: Integration)

Funktionale Beziehung:

$$y(t) = k_I * \int_0^t x(\tau) d\tau \quad \text{mit } k_I: \text{Integrierbeiwert}$$

Sprungantwort für $t \geq 0$ (0 für $t < 0$):

$$\begin{aligned} y(t) &= k_I * \int_0^t \sigma(\tau) d\tau \\ &= k_I * t \end{aligned}$$

Bild 5.2.4 zeigt das Symbol von Integriergliedern mit dem Integrierbeiwert k_I als Parameter.

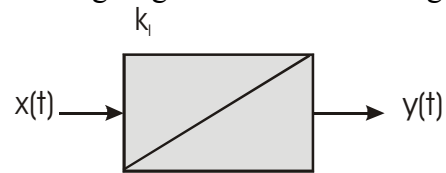


Bild 5.2.4: Symbol von Integriergliedern

Ein Integrierglied kann beispielsweise einen Spindeltrieb modellieren, wenn die Spindeldrehzahl Eingangsgröße und der Weg des Maschinentisches (Bild 5.2.4) Ausgangsgröße ist.

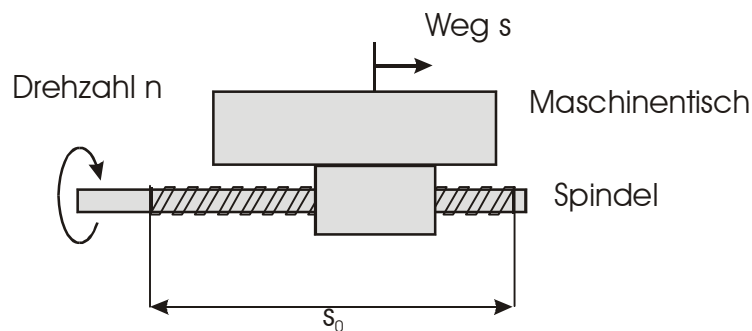


Bild 5.2.5: Spindeltrieb als Beispiel eines Integriergliedes

Seien:

S_1 : Weg des Maschinentisches bei einer Spindelumdrehung

t : Zeit

$n(t)$: Drehzahl (Umdrehungen je Zeiteinheit)

$S(t)$: zur Zeit t zurückgelegter Weg des Maschinentisches

Eingangssprung:

$$n(t) = N * \sigma(t)$$

Dies bedeutet, dass die Drehzahl von 0 auf einen konstanten Wert N eingestellt wird.

Sprungantwort:

$$S(t) = S_1 * t * N$$

Beispiel.

Bei $N = 50$ Umdrehungen je Sekunde wird bei $t = 10$ s der Weg

$$S(t) = S_1 * 10 * 50$$

zurückgelegt. Der Wert S_1 hängt von der Steigung des Gewindes ab.

D-Glied (D: Differenzier-):

Funktionale Beziehung:

$$y(t) = k_D * \frac{dx}{dt} \quad \text{mit } k_D: \text{Differenzierbeiwert}$$

Sprungantwort für $t \geq 0$ (0 für $t < 0$):

$$\begin{aligned} y(t) &= k_D * \frac{d\sigma}{dt} \\ &= k_D * \delta(t) \end{aligned}$$

Der Diracimpuls ist also die Ableitung der Sprungfunktion.

D-Glieder gibt es nur als Teile von Reglern (nicht zur Modellierung von Regelstrecken) zur Bildung der Ableitung einer physikalischen Größe wie z.B. Geschwindigkeit aus Weg.

Bild 5.2.6 zeigt das Symbol eines Differenziergliedes mit dem Differenzierbeiwert k_D als Parameter.

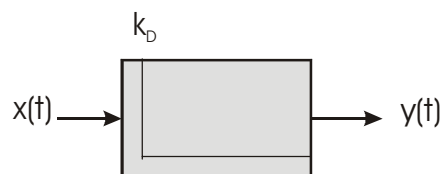


Bild 5.2.6: Symbol eines Differenziergliedes

VZ₁-Glied

Dies ist ein Verzögerungsglied erster Ordnung, d.h. sein Verhalten wird durch eine Differentialgleichung erster Ordnung beschrieben.

Funktionale Beziehung:

$$T_{VZ} * \frac{dy}{dt} + y = k_{VZ} * x \quad \text{mit} \quad k_{VZ} : \text{Proportionalitätsbeiwert}$$

$T_{VZ} : \text{Zeitkonstante}$

Damit ergibt sich als Sprungantwort:

$$y(t) = k_{VZ} * \left(1 - e^{-\frac{t}{T_{VZ}}} \right)$$

Elektronische Schaltungen (RC-Glieder) können ein solches Verhalten aufweisen. Aber beispielsweise auch Feder-Dämpfer-Systeme (Bild 5.2.6) zeigen dieses Verhalten, das nun erläutert wird.

In einem Gefäß bewegt sich ein Stempel, in dem zum Luftausgleich zwischen den sonst abgedichteten Kammern Löcher eingebracht sind. Da der Luftausgleich Zeit benötigt ist die Bewegung gedämpft. Die Dämpferkraft ist proportional zur Geschwindigkeit ($d * \frac{dy}{dt}$, d heißt spezifische Dämpferkraft, y ist der zurückgelegte Weg).

Der Stempel hängt außerdem an einer idealen Feder, die bei einer anfänglichen Auslenkung (Zusammendrücken) eine Kraft auf den Stempel ausübt, die proportional zur Auslenkung ist ($C*y$; C heißt Federkonstante).

Zusammen modellieren wir also eine gedämpfte Bewegung, d.h. der Stempel startet an der Position $y = 0$ und bewegt sich gedämpft zur Position $y = x_0$. Dies entspricht der Auslenkung der entspannten Feder.

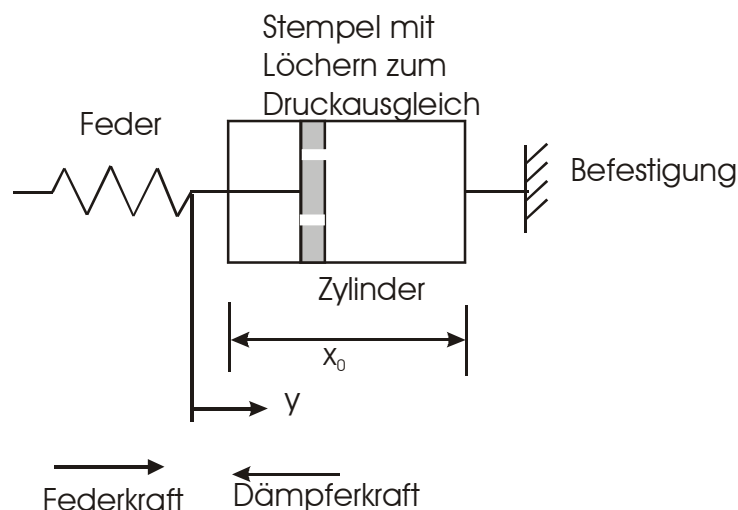


Bild 5.2.6: Feder-Dämpfer-System als VZ₁-Glied

Seien $y(t)$: die aktuelle Auslenkung des Stempels mit $\forall t: y(t) \leq y_0$

C : Federkonstante;

d : spezifische Dämpferkraft

Auf einen Sprung der Dämpferkraft $d \cdot \sigma(t)$ reagiert das System mit der Sprungantwort:

$$y = \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) * x_0 \quad \text{mit } T = \frac{d}{C}$$

Daher braucht das System eine gewisse Zeit, um wenigstens näherungsweise an den Wert x_0 heranzukommen. T ist ein grobes Maß für diese Verzögerungszeit.

Bild 5.2.7 zeigt das Symbol eines VZ_1 -Gliedes mit dem Proportionalitätsbeiwert k_{VZ} und der Zeitkonstanten T_{VZ} als Parameter.

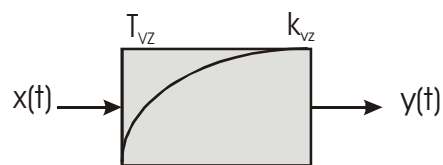


Bild 5.2.7: Symbol eines VZ_1 -Gliedes

Totzeitglied (TZ-Glied)

Totzeitglieder reagieren auf ein Eingangssignal x mit einem Ausgangssignal, das dieselbe Form zeigt, jedoch um die Totzeit T_t zeitlich verschoben ist.

Funktionale Beziehung:

$$y(t) = x(t - T_t)$$

Sprungantwort:

$$y(t) = \sigma(t - T_t)$$

Totzeitglieder sind beispielsweise zur Modellierung der Signalverarbeitung durch Rechnerprogramme einzusetzen, wenn die Rechenzeit in der Größenordnung der übrigen Zeiten im Regelkreis ist. Eine Vernachlässigung dieser Verzögerungszeit kann dazu führen, dass das reale System schwingt, während das modellierte System ein einwandfreies Zeitverhalten zeigt.

In den Beispielen haben wir gezeigt, dass sehr unterschiedliche physikalische Systeme hinter den Modellen der Regelglieder bzw. der Komponenten von Regelstrecken stecken können. Diese Abstraktion von solchen physikalischen Gegebenheiten bietet die Möglichkeit, eine Theorie der Regelkreise zu entwickeln, die beliebige Einsatzgebiete abdeckt.

Die diskutierten Glieder können zur Modellierung von Regelstrecken dienen, sie können aber auch zu Reglern kombiniert werden. Die üblichen Regler sind P-Regler, PD-Regler, PI-Regler und PID-Regler. Am häufigsten werden PI-Regler und PID-Regler eingesetzt.

Die aufgeführten Kombinationen bezeichnen Parallelschaltungen von Reglern der entsprechenden Typen. Die Eingangsgröße wird den parallel geschalteten Reglern zugeführt, deren Ergebnis wird in einer S-Stelle summiert.

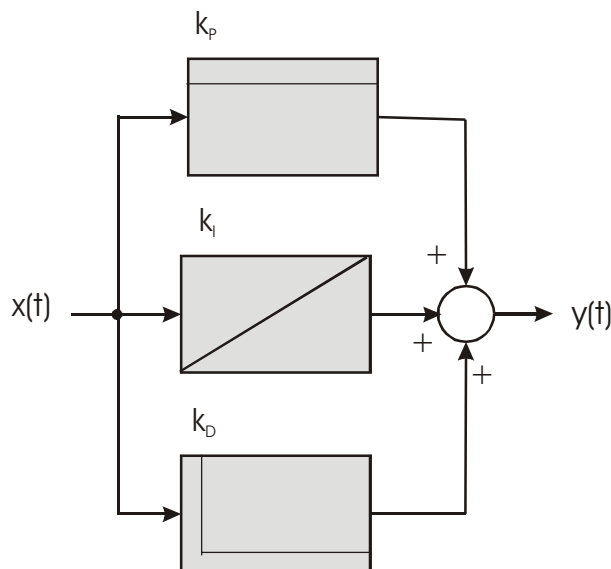


Bild 5.2.9: PID-Regler

PID-Regler:

Der PID-Regler bildet das Stellsignal aus der Regeldifferenz durch proportionale Verstärkung (P-Anteil), durch Integration der Regeldifferenz (I-Anteil), durch Differentiation der Regeldifferenz (D-Anteil).

Die funktionale Beschreibung eines PID-Reglers lautet:

$$y(t) = k_P * x + k_I * \int_0^t x(\tau) d\tau + k_D * \frac{dx}{dt}$$

Daher ist seine Sprungantwort:

$$y(t) = k_P + k_I * t + k_D * \dot{x}(t)$$

Der P-Anteil sorgt bei Auftreten einer Regeldifferenz sofort für ein Stellsignal, da ein P-Regler ohne Verzögerung reagiert; allerdings verbleibt häufig dauerhaft eine Regeldifferenz. In Kombination mit einem I-Regler wird das Stellsignal solange verändert, bis die Regeldifferenz zu 0 wird (Aufsummierung der anfallenden Regeldifferenz über die Zeit).

Der D-Anteil macht sich nur bei Änderungen bemerkbar und lässt den Regler schnell auf Änderungen reagieren.

PID-Regler sind Universalregler. Ihr Hauptnachteil ist die Vielfalt möglicher Parameterwerte, die geeignet auszuwählen sind, um einen "optimalen" Regler zu erhalten. Wenn möglich setzt man daher die einfacheren P- oder PI-Regler ein.

Wir wollen nun anhand von Beispielen das Vorgehen bei der Modellierung von Regelstrecken erläutern und später untersuchen, wie solche Regelstrecken geeignet geregelt werden können. Hierzu werden wir Verfahrensschritte vorschlagen und erläutern.

5.3 Entwurf von Regelkreisen

Betrachten wir noch einmal den Aufbau eines "klassischen" Regelkreises (Bild 5.3.1 gleich Bild 5.1).

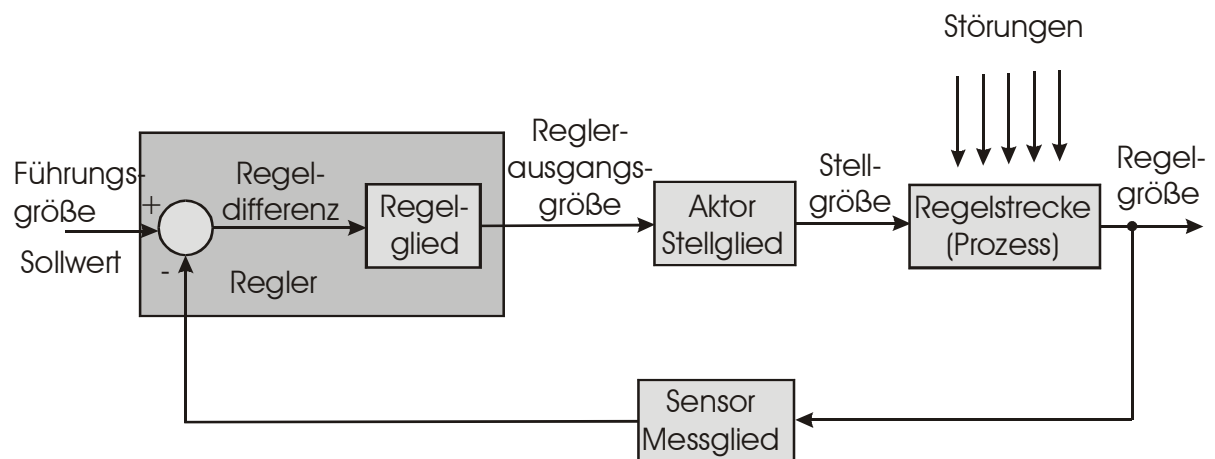


Bild 5.3.1: Strukturbild eines klassischen Regelkreises

Aufgabe der Regelungstechnik:

Gegeben: Regelungstechnisches Modell der Strecke (einschließlich Sensoren und Aktoren)

Anforderungen an das Verhalten des geregelten Systems

Gesucht: Verhalten des Reglers

Für eine gegebene Strecke möchte man den Regler so einstellen, dass das System Regler/Strecke ein bestimmtes Übertragungsverhalten aufweist. (Die Bedeutung des optionalen Reglers wird später deutlich).

Die Anforderungen an einen Regelkreis können sehr unterschiedlich sein. Die wichtigsten Anforderungen werden im folgenden erläutert.

Als Beispiel wählen wir einen Signalverlauf, wie er als Sprungantwort eines linearen Systems auftreten kann. (Bild 5.3.2). Das System reagiert mit einem Überschwinger und schwingt mit abnehmendem Ausschlag auf den Wert 1. Man spricht von einer gedämpften Schwingung.

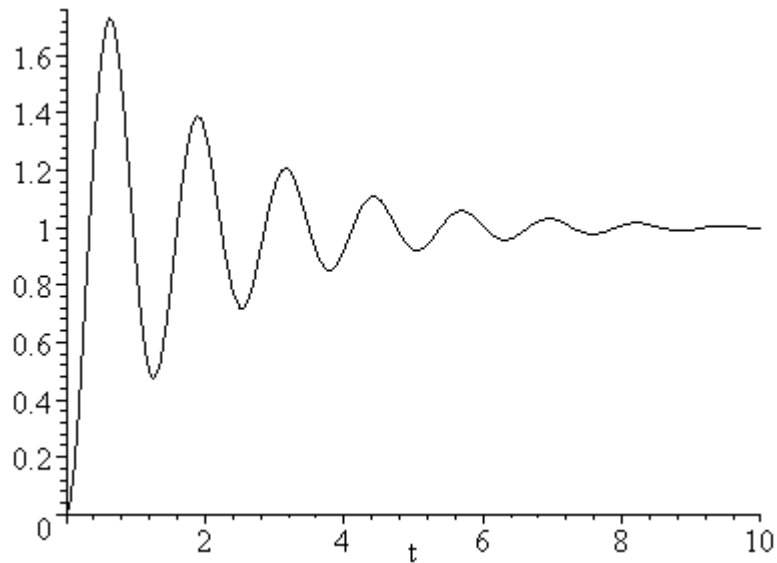


Bild 5.3.2: Beispiel für die Sprungantwort eines linearen Systems

Stabilität. Nur stabile Regelkreise sind von Interesse. Die übrigen Anforderungen sind hinfällig, wenn keine Stabilität vorliegt. Wir haben oben definiert:

(2) Ein lineares zeitinvariantes System heißt stabil, wenn für die Eingabe

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

die Ausgabe einem endlichen Grenzwert zustrebt.

In Bild 5.3.2 strebt die Sprungantwort gegen den Wert 1 und charakterisiert daher ein stabiles System. Es ist aber nicht in jedem Fall so, dass die eingestellte Istgröße gegen die Sollgröße (hier 1) strebt.

Definition: Stationärer Fehler (steady state error):

Abweichung der Sollgröße von der Istgröße für $t \rightarrow \infty$

Sei:

$$\text{Regeldifferenz } e(t) = \text{Sollwert}(t) - \text{Istwert}(t)$$

dann ist der stationäre Fehler:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$$

Ziel einer Regelung ist es,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

zu erreichen.

Gedämpfte Schwingungen als Sprungantwort sind stabil, d.h. $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$ ist endlich, aber nicht in jedem Falle 0.

Einstellzeit. Eine weitere wichtige Größe beim Entwurf eines Reglers ist die Einstellzeit. Wir haben bei einfachen Systemen mit der Zeit exponentiell ansteigende Funktionen, bei komplexeren stabilen Systemen gedämpfte Schwingungen. Für solche Funktionen muss daher der Begriff Einstellzeit definiert werden.

Definition: Einstellzeit

Einstellzeit ist der früheste Zeitpunkt T_s , für welchen gilt:

$$\forall t > T_s : |e(t)| \leq 0.02$$

Beispiel: Funktionen der Form

$$y = c * \left(1 - e^{-\zeta * \omega_0 * t} * \left(\cos(\omega_0 * \sqrt{1 - \zeta^2} * t) + \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \zeta^2}} * \sin(\omega_0 * \sqrt{1 - \zeta^2} * t) \right) \right)$$

mit $\zeta < 1$, $t > 0$ treten als Sprungantworten von Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf, also Differentialgleichungen folgender Form:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2 * \zeta * \omega_0 * \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 * y = c * \omega_0^2 * \sigma$$

Als Regeldifferenz erhalten wir:

$$e = c * e^{-\zeta * \omega_0 * t} * \left(\cos(\omega_0 * \sqrt{1 - \zeta^2} * t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} * \sin(\omega_0 * \sqrt{1 - \zeta^2} * t) \right)$$

Zahlenbeispiel: $\omega_0 = 5$, $\zeta = 0.1$, $c = 1$:

$$e = 1 - e^{-0.5 * t} * \left(\cos(5 * \sqrt{1 - 0.01} * t) + \frac{0.1}{\sqrt{1 - 0.01}} * \sin(5 * \sqrt{1 - 0.01} * t) \right)$$

Bild 5.3.3 zeigt das entsprechende Signal. Die Einstellzeit T_s liegt bei etwa 7.7 Zeiteinheiten (z.B. Sekunden).

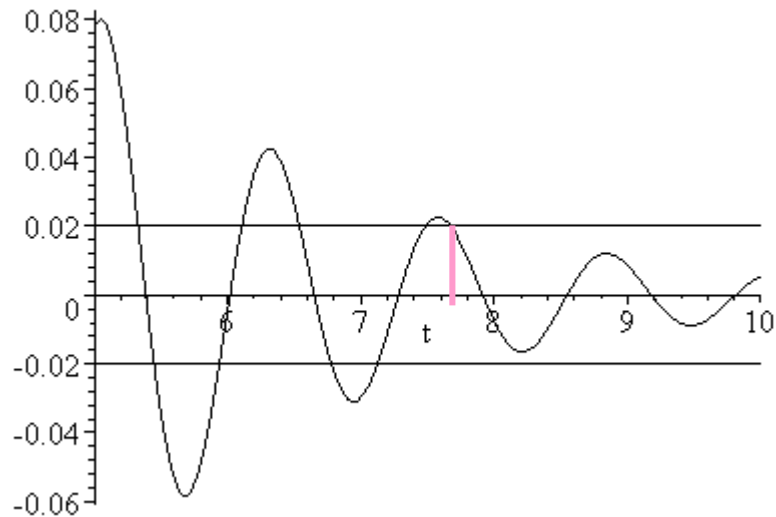


Bild 5.3.3: Einstellzeit für ein Beispiel

Verzögerungs- und Anstiegszeit. Im Zusammenhang mit Bild 5.3.2 bieten sich noch andere Zeitwerte zur Beurteilung eines Regelverhaltens an.

Als Verzögerungszeit T_d bezeichnen wir die Zeit zwischen Sprung und Sprungantwort bei der 50% Marke.

Die Anstiegszeit T_r ist definiert als die Zeit, welche die Sprungantwort braucht um von der 10% Marke zur 90% Marke zu gelangen.

Bild 5.3.4 zeigt den interessanten Bereich von Bild 5.3.2 vergrößert. In Bild 5.3.4 ist $T_d \approx 0.22$ und $T_r \approx 0.22$

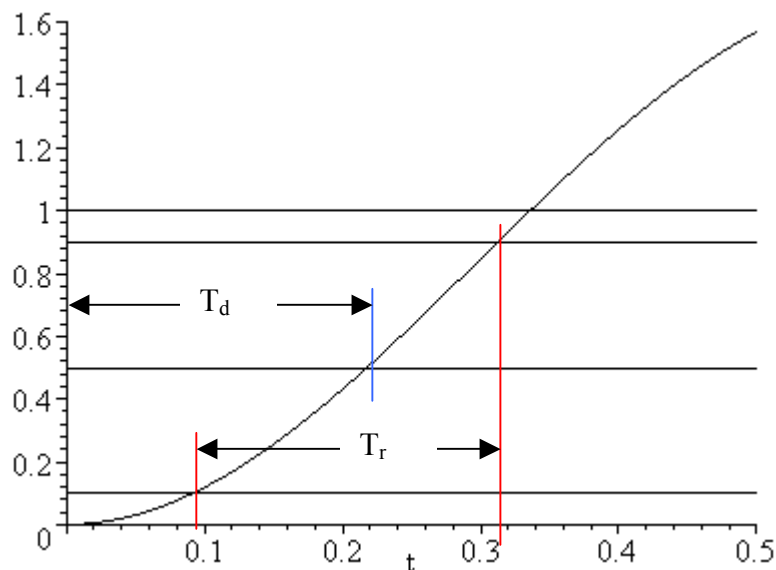


Bild 5.3.4: Bestimmung der Anstiegs- T_r und Verzögerungszeit T_d für die Sprungantwort in Bild 5.3.2

Maximalwert des Überschwingens. Wenn man das Überschwingen in Grenzen halten will, ist es sinnvoll, Wert und Zeitpunkt des ersten und bei gedämpften Schwingungen höchsten Überschwingers zu bestimmen. Bei dem vorgestellten Typ von Sprungantwort

$$y = c * \left(1 - e^{-\zeta * \omega_0 * t} * \left(\cos(\omega_0 * \sqrt{1 - \zeta^2} * t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} * \sin(\omega_0 * \sqrt{1 - \zeta^2} * t) \right) \right)$$

gilt für den Zeitpunkt $t = T_{max}$ des ersten Maximums:

$$T_{max} = \frac{\pi}{\omega_0 * \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

Dann nimmt der Cosinus-Term den Wert -1 und der Sinusterm den Wert 0 an.

In Bild 5.3.3 ist mit $\omega_0 = 5$ und $\zeta = 0.1$ der Zeitpunkt des ersten Maximums:

$$T_{max} = \frac{\pi}{5 * \sqrt{1 - 0.1^2}} = 0.62$$

Die Amplitude des Überschwingers hat den Wert:

$$Y_{max} = c * \left(1 + \exp\left(-\frac{\pi * \zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\right) \right)$$

In Bild 5.3.5 ist mit $\omega_0 = 5$ und $\alpha = 0.1$ $Y_{\max} = 1.7$

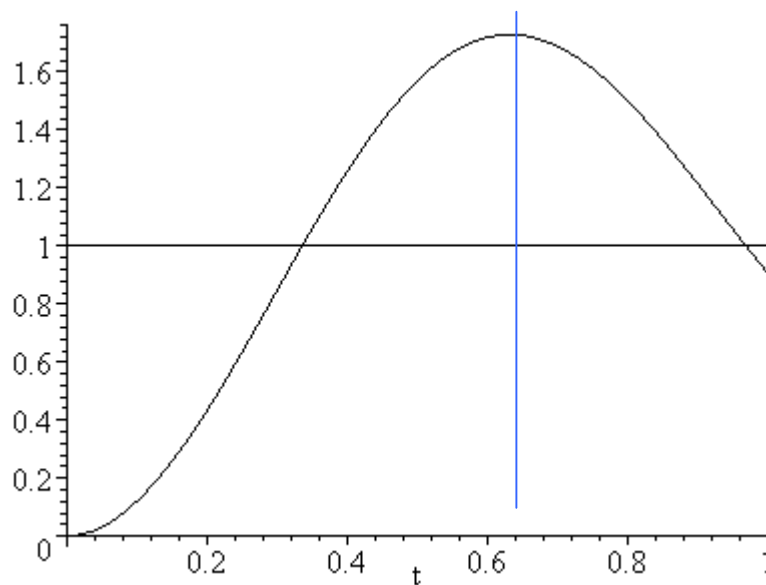


Bild 5.3.5: Interessierender Bereich von Bild 5.3.2 zur Feststellung des ersten Maximums

Damit haben wir geeignete Größen definiert, die sich zur Spezifikation des gewünschten Reglerverhaltens eignen. Wir wollen zunächst anhand von Beispielen diese Punkte diskutieren und die Ergebnisse anschließend in eine Entwurfssystematik einbringen.

5.3.1 Einstellen des Verhaltens von Regelkreisen

Beispiel:

Für das Beispiel des Tempomats haben wir beim unregulierten Fahrzeug mit den Werten $m = 1000$ kg; $b = 50$ Ns/m; $K = 500$ N: (Bild 5.6a) die 98 % der Endgeschwindigkeit erst nach $T_s = 78$ s erreicht. Es gibt keinen Überschwinger.

Durch Einsatz von Reglern, wollen wir die Situation verbessern. Unser Ziel ist eine Einstellzeit $T_s < 5$ s zu erreichen, wobei wir als Preis einen maximalen Überschwinger $< 10\%$ und einen stationären Fehler $< 2\%$ tolerieren.

Die erste Frage stellt sich nach einem geeigneten Reglertyp:

P: Proportional-Regler: einfacher Verstärker für die Regeldifferenz

I: Integrierender Regler: integrierender Verstärker für die Regeldifferenz: d.h. Abweichungen werden aufsummiert und die Wirkung hängt von dieser Summe ab

D: Differenzierender Regler: differenzierender Verstärker: Änderungen in der Regeldifferenz werden verstärkt wirksam

oder eine beliebige Kombination dieser Grundtypen.

Wir wollen im folgenden die Wirkungen dieser Regler am Tempomat verdeutlichen.

Seien k : Kraft, die der Motor erzeugt. Physikalische Einheit: Newton (N)

v : Geschwindigkeit. Physikalische Einheit: m/s

m : Masse des Fahrzeugs. Physikalische Einheit: $\text{kg} = \text{Ns}^2/\text{m}$

b : Reibungskonstante: Physikalische Einheit: Ns/m

Der Sollwert der Geschwindigkeit wird auf 1 normiert, für eine konkrete Anwendung muss man die Geschwindigkeitswerte mit einer entsprechenden Konstanten multiplizieren.

a) P-Regler:

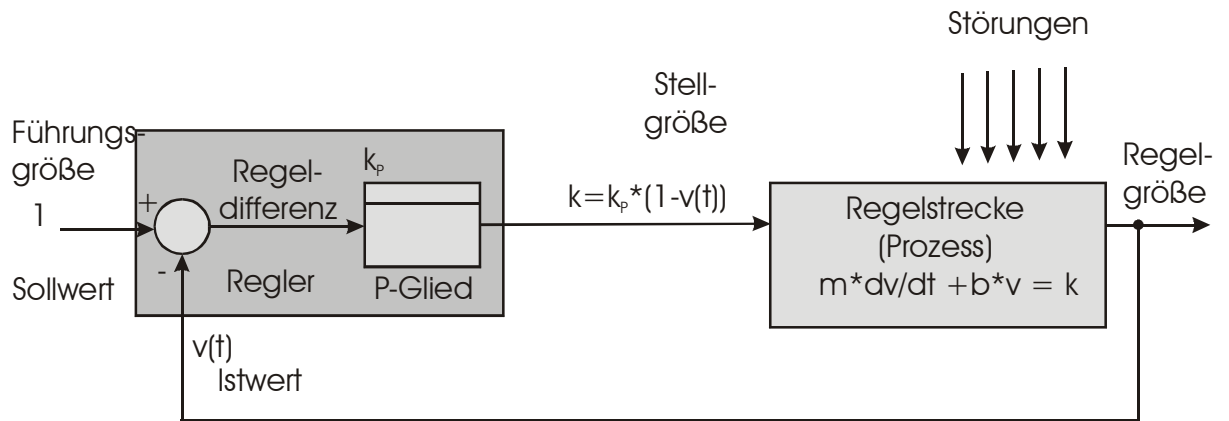


Bild 5.3.6: Tempomat mit P-Regler

Analyse des Regelkreises:

Gleichung 1 für Regelstrecke:
$$m \cdot \frac{dv}{dt} + b \cdot v = k$$

Gleichung 2 für Regler:
$$k = k_p \cdot (1 - v)$$

Die einzustellende Motorkraft hängt nun von der Differenz aus Soll- und Istgeschwindigkeit ab.

Gleichung 2 in 1:
$$m \cdot \frac{dv}{dt} + b \cdot v = k_p \cdot (1 - v)$$

Lösung der Differentialgleichung für $v(0) = 0$:

$$v = \frac{k_p}{b + k_p} \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{b + k_p}{m} \cdot t\right) \right)$$

Wir stellen fest, dass für $t \rightarrow \infty$ der Sollwert 1 nicht erreicht werden kann, dass vielmehr als Endwert

$$v_{t \rightarrow \infty} = \frac{k_p}{b + k_p}$$

erreicht wird. Daraus ergibt sich der stationäre Fehler zu:

$$1 - \frac{k_p}{b + k_p} = \frac{b}{b + k_p}$$

Dies ist ein charakteristisches Merkmal von P-Reglern, den man im Prinzip dadurch ausgleichen kann, dass man durch einen Vorverstärker (P-Glied) am

Eingang Führungsgröße in Bild 5.3.7 den Sollwert anhebt. Darauf wollen wir hier nicht eingehen.

Unsere Forderung für $b = 50$ Ns/m einen stationären Fehler $< 5\%$ zu erzielen, bedeutet:

$$\frac{50}{50 + k_p} < 0.05$$

Dies kann man auflösen zu:

$$k_p > 950$$

Andererseits ist die Einstellzeit T_s zu bewerten. Es gilt nach Definition:

$$\exp\left(-\frac{b + k_p * T_s}{m}\right) = 0.02$$

Dies löst man auf:

$$T_s = 3.9 * \frac{m + b}{k_p}$$

Bei Vorgabe von T_s erhält man als Bedingung an k_p :

$$k_p \geq 3.9 * \frac{m + b}{T_s}$$

Unsere Forderung an den Regelkreis war: $T_s = 5$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} k_p &\geq 3.9 * \frac{1000 + 50}{5} \\ &\geq 733 \end{aligned}$$

Fasst man beide Bedingungen zusammen, dann gilt:

$$\begin{aligned} k_p &\geq \max\{733, 950\} \\ &\geq 950 \end{aligned}$$

Das Ergebnis wollen wir nun an Bildern erläutern.

Bild 5.3.7 zeigt die Situation für den berechneten Minimalwert $k_p = 950$. 98% des Endwertes werden bereits zur Zeit $T_s = 3.9$ erreicht. Allerdings wird die vorgeschriebene Fehlerschwelle 0.95 nur annähernd erreicht.

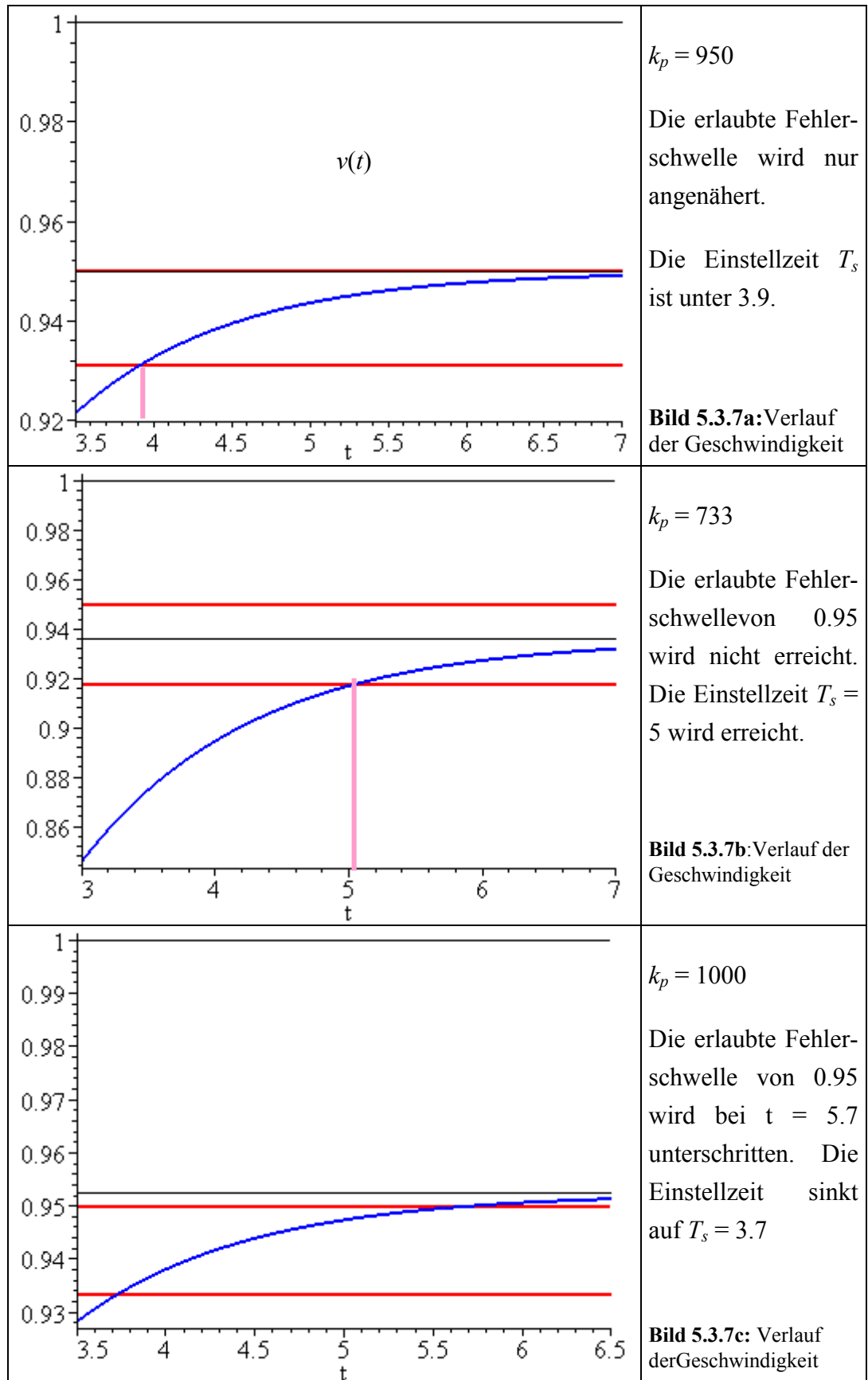


Bild 5.3.7: Sprungantwort der Geschwindigkeit für verschiedene Werte des Reglerparamters k_p

Bild 5.3.7 b hat den Wert für k_p , der gerade die Bedingung an die Einstellzeit erfüllt. Erwartungsgemäß wird der Schwellwert 0.95 aber nicht erreicht. Schließlich haben wir in Bild 5.3.7c mit $k_p = 1000$ etwas höher gesetzt als den berechneten Minimalwert von 950. Jetzt ist die Einstellzeit weiter auf 3.7 gesunken und der Schwellwert 0.95 wird zuverlässig überschritten.

Damit haben wir eine geeignete Dimensionierung unseres P-Reglers gefunden.

Mit $k_p = 1000$ erhalten wir folgenden Geschwindigkeitsverlauf:

$$v = \frac{k_p}{b+k_p} * \left(1 - \exp\left(-\frac{b+k_p}{m} * t\right) \right)$$

$$= \frac{1000}{1000+50} * \left(1 - \exp\left(-\frac{50+1000}{1000} * t\right) \right)$$

Soweit könnte man vermuten, dass Proportionalglieder (Verstärker) ausreichen, um vorgegebene Systemeigenschaften einzustellen. Tatsächlich kann man aber Proportionalregler nur in Sonderfällen einsetzen, die wir hier allerdings nicht näher charakterisieren können.

b) Verwendung eines I-Reglers:

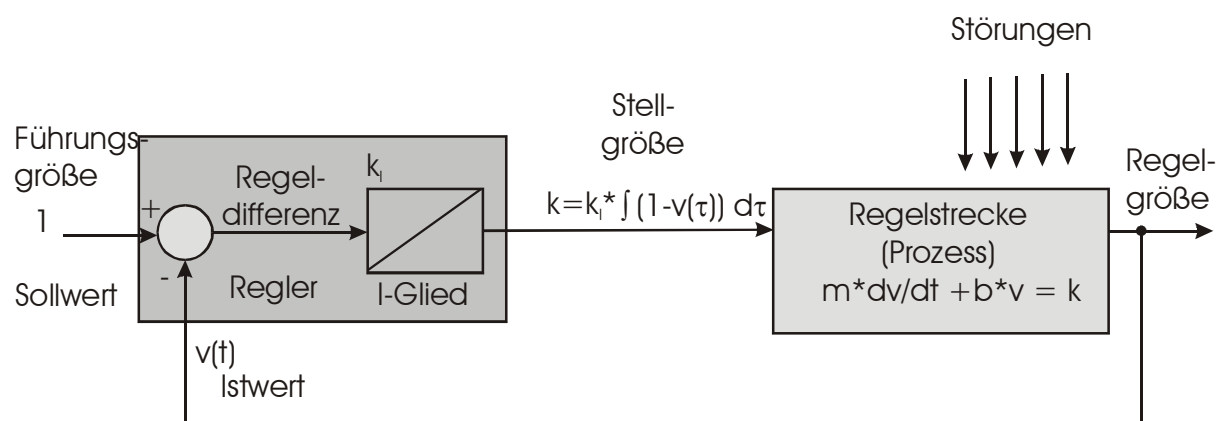


Bild 5.3.8: Tempomat mit I-Regler

Analyse des Regelkreises für $t > 0$ bei Annahme einer Sprungerregung (Führungsgröße = 1):

Gleichung 1 für Regelstrecke:
$$m \cdot \frac{dv}{dt} + b \cdot v = k$$

Gleichung 2 für Regler:
$$k = k_I \cdot \int_0^t (1 - v(\tau)) d\tau$$

Die Motorkraft hängt auch hier von der Differenz aus Soll- und Istgeschwindigkeit ab.

Gleichung 2 in 1:
$$m \cdot \frac{dv}{dt} + b \cdot v = k_I \cdot \int_0^t (1 - v(\tau)) d\tau$$

Zur kompakteren Darstellung der Lösung führen wir außerdem ein:

$$\zeta =_{\text{def}} \frac{b}{2 \cdot \sqrt{k_I \cdot m}} \quad \text{und} \quad \omega_0 =_{\text{def}} \sqrt{\frac{k_I}{m}}.$$

Es entsteht die Differentialgleichung:

$$v^{(2)} + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_0 \cdot v^{(1)} + \omega_0^2 \cdot v = \omega_0^2$$

Für den Sonderfall $\zeta = 1$ und $v(0) = 0$ und $\frac{dv}{dt}(0) = 0$ ergibt sich als Lösung der Differentialgleichung:

$$v(t) = 1 - e^{-\omega_0 \cdot t} \cdot (1 + \omega_0 \cdot t) \quad \text{für} \quad \zeta = 1,$$

wie man durch Einsetzen leicht nachvollziehen kann.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für $v(0) = 0$ und $\frac{dv}{dt}(0) = 0$ unterscheidet drei Fälle, abhängig vom Wert von ζ :

$$v(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\zeta \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot \left(\cos(\sqrt{1 - \zeta^2} \cdot \omega_0 \cdot t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \cdot \sin(\sqrt{1 - \zeta^2} \cdot \omega_0 \cdot t) \right) & \text{für } 0 < \zeta < 1 \\ 1 - e^{-\omega_0 \cdot t} \cdot (1 + \omega_0 \cdot t) & \text{für } \zeta = 1 \\ 1 - e^{-\zeta \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot \left(\cosh(\sqrt{\zeta^2 - 1} \cdot \omega_0 \cdot t) + \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} \cdot \sinh(\sqrt{\zeta^2 - 1} \cdot \omega_0 \cdot t) \right) & \text{für } 1 < \zeta \end{cases}$$

In der zunächst entstehenden Exponentialform tritt die Wurzel $\sqrt{\zeta^2 - 1}$ auf. Deshalb sind die drei Fälle $0 < \zeta < 1$, $\zeta = 1$ und $1 < \zeta$ zu unterscheiden. Im ersten Fall ergibt die Wurzel einen komplexen Wert, so dass die Exponentialfunktion in eine Überlagerung von Sinus- und Cosinusfunktion gewandelt wird. Im dritten Fall werden die Identitäten:

$$\sinh(x) =_{\text{def}} \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \cosh(x) =_{\text{def}} \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

genutzt. Die Schwingungskomponenten werden mit einer mit der Zeit t abfallenden Exponentialfunktion $e^{-\zeta \omega_0 t}$ multipliziert.

Wir betrachten zunächst den Fall $\zeta = 1$ oder $k_I = \frac{b^2}{4 * m}$ mit der Lösung:

$$v(t) = 1 - e^{-\omega_0 t} * (1 + \omega_0 * t)$$

Hier steigt die Geschwindigkeit zunächst langsam, in der Tendenz aber exponentiell an. Dieser Fall bringt uns keine wesentlich neuen Erkenntnisse, wenn auch die Kurvenverläufe in diesem Fall und beim Proportionalglied Unterschiede aufweisen.

Tempomat: $m = 1000 \text{ kg}$; $b = 50 \text{ Ns/m}$; $K = 500 \text{ N}$: $k_I = \frac{b^2}{4 * m} = 0.625$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_I}{m}} = \frac{b}{2 * m} = \frac{50}{2000} = 0.025$: Bild 5.3.9 zeigt den Verlauf der

Geschwindigkeit über der Zeit. Man sieht, dass sich die Einstellzeit deutlich verschlechtert hat.

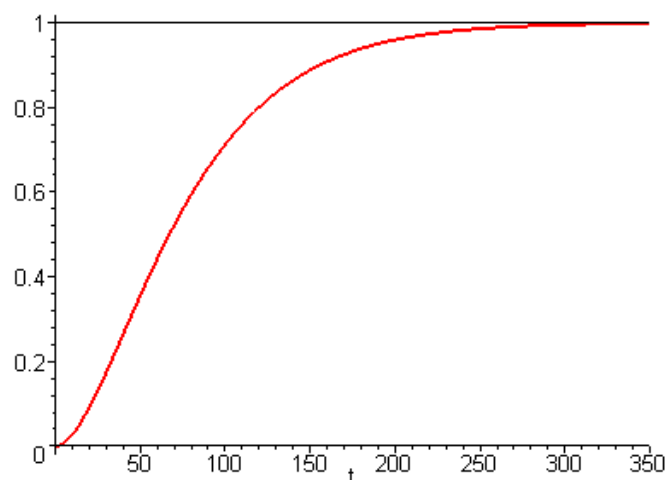


Bild 5.3.9: Geschwindigkeitssignal für den Tempomat mit Integrier-Glied als Regler mit

$$k_I = \frac{b^2}{4 * m} = 0.625$$

Wir betrachten nun den interessanten Fall mit $0 < \zeta < 1$ und mit dem Geschwindigkeitssignal:

$$v(t) = 1 - e^{-\zeta * \omega_0 * t} * \left(\cos(\sqrt{1 - \zeta^2} * \omega_0 * t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} * \sin(\sqrt{1 - \zeta^2} * \omega_0 * t) \right)$$

Wegen $\zeta =_{\text{def}} \frac{b}{2 * \sqrt{k_I * m}}$ und $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_I}{m}}$ wird die Frequenz des Sinus- und des Cosinusterns für große Werte von k_I wesentlich durch ω_0 (Dimension: 1/s) bestimmt. Bild 5.3.10 zeigt den Signalverlauf für $k_I = 1000$. Dies entspricht einer Fahrweise mit dem schnell abwechselnden Einsatz von Gas, Bremse, Gas Bremse,...

Das Einschwingen auf den Endwert ist bei unserer Aufgabenstellung im Grundsatz erlaubt. Allerdings haben wir gefordert, dass die Amplitude des ersten Überschingers nicht über 1.1 liegen darf und damit den Sollwert nicht um mehr als 10% überschreiten darf.

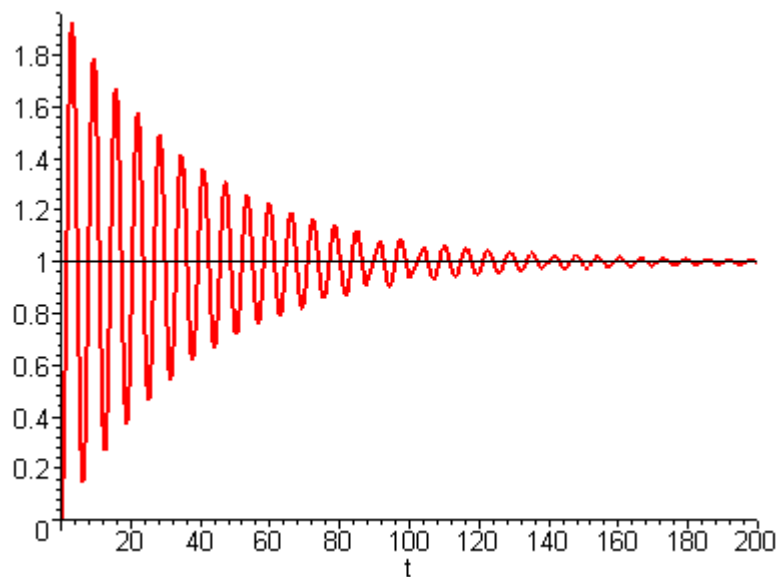


Bild 5.3.10: Geschwindigkeitssignal für den Tempomat mit Integrier-Glied als Regler für $k_I = 1000$

Die entsprechende Formel für den höchsten Amplitudenwert hilft uns, den Integrierbeiwert zu bestimmen:

$$Y_{\max} \approx 1 + \exp\left(\frac{-\pi * \zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\right)$$

Wir setzen $\zeta =_{\text{def}} \frac{b}{2 * \sqrt{k_I * m}}$ in die Gleichung ein und erhalten als Lösung der

Gleichung

$$Y_{\max} = 1.1$$

den Wert $k_I \approx 1.788$.

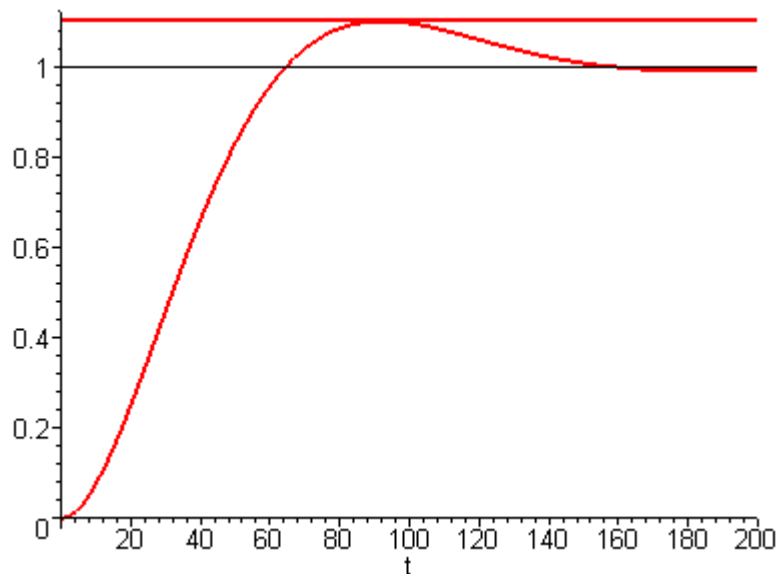


Bild 5.3.11: Geschwindigkeitssignal für den Tempomat mit Integrier-Glied als Regler für $k_I = 1.788$

Man sieht aus Bild 5.3.11, dass das Ziel, die Endgeschwindigkeit innerhalb von $T_s \leq 5$ s zu erreichen, bei Weitem verfehlt wird.

Ein anderes Ziel, nämlich den stationären Fehler auf 0 zu bringen wird dagegen erreicht.

Weder ein P-Glied noch ein I-Glied reichen im Allgemeinen alleine aus, um einen Regler zu konstruieren. Typisch sind vielmehr die Kombination von P- und I-Glied zum PI-Regler oder sogar die Kombination aus P-, I- und D-Glied zum PID-Regler, der insbesondere zusätzlich geeignet ist, rasch auf Änderungen zu reagieren.

Wir fassen die Merkmale der elementaren Regler in der Tabelle 5.3.12 zusammen.

Ein P-Regler wird beispielsweise die Anstiegszeit einer Sprungantwort reduzieren. Auch der stationäre Fehler wird gemindert. Ohne Vorfilter wird er aber nicht eliminiert.

Ein I-Glied sorgt dem gegenüber dafür, dass ein stationärer Fehler verschwindet, leider können sowohl die Überschwinger als auch die Einstellzeit wachsen.

Ein D-Glied hat die Tendenz, die Systemstabilität zu verbessern. Es reduziert die Überschwinger und verringert die Einstellzeit.

Regler	Anstiegszeit T_R	Überschwinger	Einstellzeit T_s	stationärer Fehler
P-Glied	sinkt	wächst	geringe Änderung	sinkt
I-Glied	sinkt	wächst	wächst	= 0
D-Glied	geringe Änderung	sinkt	sinkt	geringe Änderung

Tabelle 5.3.12: Charakteristische Einflüsse der Basistypen von Reglern

Leider ist der Entwurf von Regelungsaufgaben sehr rechenintensiv. Aus diesem Grunde bieten Mathematikprogramme wie MATLAB (enthält MAPLE) oder SCILAB (unentgeltlich) Programme an, bei denen viele der hier vorgeführten mathematischen Aufgaben durch Bibliotheksprogramme gelöst werden.

5.3.2 Entwurfsaufgabe

Fassen wir die Aufgabenstellungen der Regelungstechnik zusammen.

Aufgabe. Für eine gegebene Regelstrecke ist ein Regler zu entwerfen, so dass das Gesamtsystem verschiedene als Entwurfsaufgabe zu definierende Anforderungen erfüllt.

Regelstrecke. Auf der Basis physikalischer Gesetze und von Messungen ist ein mathematisches Modell der Regelstrecke zu entwickeln. Hier ist ein Kompromiss zwischen Modellgenauigkeit und Rechenanforderungen zu finden. Häufig genügt ein recht grobes Modell.

Zur Strecke gehören auch Störungen, die in Form der Störgröße in das Modell einfließen. Wichtig ist es, neben dem Maximalwert, den eine Störung annehmen kann, auch die Stelle in der Strecke, an der die Störung eingreift, zu ermitteln. An dieser Stelle wird ein Summierglied eingefügt, so dass das Störsignal zu einem Signal am Anfang, am Ende oder mitten in der Regelstrecke addiert wird.

Anforderungen. Hier muss man zwischen qualitativen und quantitativen Anforderungen unterscheiden. Qualitative Anforderungen können z.B. folgendermaßen definiert sein: das Einschwingverhalten des Regelkreises soll "ausreichend gedämpft" sein, die Einstellzeit aber "nicht zu groß" werden. Um Regler zu entwickeln, die solche unscharfen Anforderungen erfüllen, braucht man viel Erfahrung. Daher scheint es angebrachter, durch quantitative Angaben, den Entwurfsvorgang zu steuern. Dabei kann es natürlich vorkommen, dass nicht alle Wünsche gleichzeitig erfüllt werden können. Man muss dann eine geeignete Zielfunktion, die aus gewichteten Einzelzielen besteht, einführen und optimieren. Man spricht dann von optimaler Steuerung.

Ein Nachteil der quantitativen Festelegung von Reglerdaten besteht darin, dass die Regler im Allgemeinen aufwendiger werden und, das klingt zunächst überraschend, qualitativ nicht unbedingt besser. Gründe hierfür sind:

- (a) Das Modell der Regelstrecke ist erfahrungsgemäß sehr ungenau. Die aufgrund mathematischer Formeln vermutete Genauigkeit ist tatsächlich nicht vorhanden. Optimierungsergebnisse auf der Basis dieser Daten sind häufig gegenüber Parameteränderungen sehr empfindlich. Daher sind die Ergebnisse trotz hohen Rechenaufwands oftmals enttäuschend.

- (b) Mehrzieloptimierung, wie es eigentlich für die Dimensionierung des Regelkreises erforderlich wäre, ist sehr schwierig. Eine Gesamt-Zielfunktion, die einen Kompromiss zwischen verschiedenen Zielen ausdrückt, ist nur schwer zu finden.

Beispiel: Wir haben beim Tempomat bei 5 s Einstellzeit einen Überschwinger von 10% erlaubt. Nun könnte es sein, dass wir mit 5.5 s Einstellzeit den Überschwinger auf 5% reduzieren könnten. Mit der oben vorgestellten Vorgehensweise würden wir diese zweite Lösung, die uns vielleicht lieber ist, nicht finden.

Sensorik. Aktorik. Zum Messen und Einstellen von Größen benötigt man Sensoren und Aktoren. Ähnlich wie bei der Strecke muss ein geeignetes regelungstechnisches Modell erstellt werden.

Nach diesen Schritten ist das Modell des offenen Systems bekannt, das nun durch Einführung von Reglern geschlossen wird und die gewünschten Eigenschaften erhält.

Reglerauswahl. PI- und PID-Regler sind die am häufigsten eingesetzten Regler. Wobei der PI-Regler noch häufiger anzutreffen ist als der PID-Regler. Allerdings muss beachtet werden, dass die Regelstrecke selbst bereits ein I-Glied enthalten kann. In diesem Falle sollte der Regler selbst nicht zusätzlich ein I-Glied besitzen, da dies zur Instabilität führen kann. In diesem Falle setzt man (korrigierte) PD-Regler ein.

Reglerrealisierung. Elektronische Regler realisiert man unter Verwendung von Operationsverstärkern.

PI-Regler:

Ein PI-Regler besteht aus einer Parallelschaltung eines P- und eines I-Reglers.

Bild 5.3.13 zeigt eine mögliche Realisierung, wobei zur Einsparung eines zweiten Operationsverstärkers eine Schaltung verwendet wird, bei der die Parallelschaltung der beiden Teilregler nicht so offensichtlich ist. Dabei sind $k_I = \frac{1}{R_1 * C}$ und $k_P = \frac{R_2}{R_1}$. Dies ermittelt man durch eine Schaltungsanalyse, wie wir sie beim Kapitel über Operationsverstärker besprochen haben. Bei gegebenen Werten von k_I und k_P kann man nach zusätzlicher Wahl eines Komponentenwertes (R_1 , R_2 oder C) die übrigen berechnen.

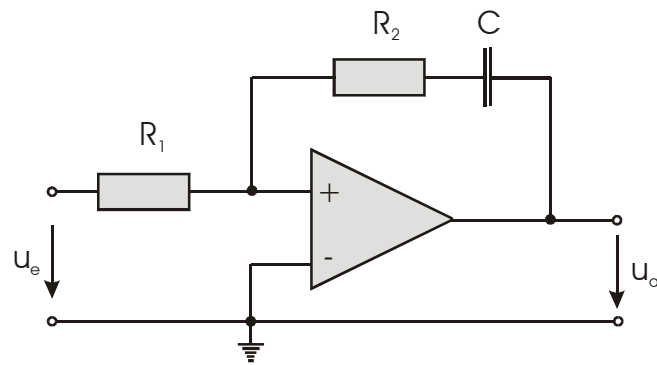


Bild 5.3.13: PI-Regler

5.3.3 Digitale Regelung

Das dynamische Verhalten von Analogsystemen lässt sich durch Differentialgleichungen darstellen. Bei Verwendung von Rechnersystemen will man die Regelalgorithmen natürlich auch in digitaler Form realisieren (Bild 5.3.14).

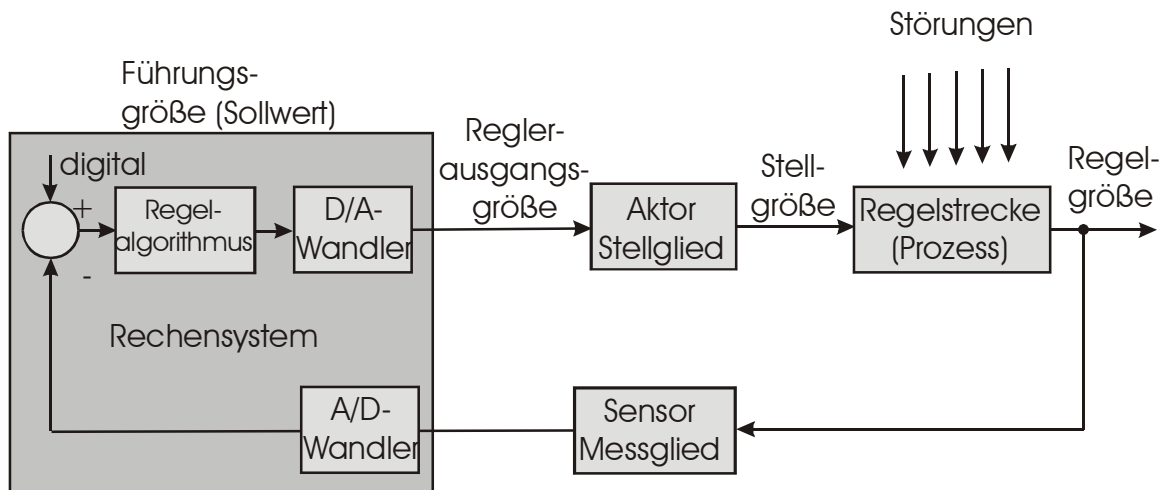


Bild 5.3.15: Regelkreis mit Rechner

Differenzieren und Integrieren ist im digitalen Rechner nur durch den Übergang zu Differenzgleichungen möglich.

Eine Differenzengleichung m -ter Ordnung mit der Eingangsgröße x und der Ausgangsgröße y hat allgemein folgende Form:

$$a_0 * y(k) + a_1 * y(k-1) + \dots + a_n * y(k-n) = b_0 * x(k) + b_1 * x(k-1) + \dots + b_m * x(k-m)$$

Man erhält solche Gleichungen beispielsweise durch Diskretisierung von Differentialgleichungen. Hierzu ist ein Taktsignal erforderlich, das die kontinuierliche Zeit in eine diskrete wandelt. Sei die Abtatsperiode T :

Beispiel:

$$\frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t) - y(t - \Delta t)}{\Delta t} \quad (\text{Differential 1. Ordnung})$$

kann angenähert werden durch

$$\frac{dy}{dt} \approx \frac{y(k * T) - y((k-1) * T)}{T} \quad \text{mit } k \in \mathbb{N} \quad (\text{Differenz 1. Ordnung})$$

Beispiel:

Damit kann man beispielsweise die Differentialgleichung näherungsweise lösen, die im Zusammenhang mit Bild 5.1.3 für ein RC-Glied erstellt wurde:

$$y^{(1)}(t) + \frac{1}{R * C} y(t) = \frac{1}{R * C} x(t)$$

Diese Gleichung nähern wir durch eine Differenzengleichung an, in dem das Differential durch die oben angegebene Näherung ersetzt wird. Auch werden $y(t)$ und $x(t)$ nur für die diskreten Zeiten $k \in \mathbb{N}$ dargestellt:

$$\frac{y(k * T) - y((k-1) * T)}{T} + \frac{1}{R * C} y(k) = \frac{1}{R * C} x(k)$$

Diese Gleichung lösen wir nach $y(k)$ auf:

$$y(k * T) = \frac{1}{1 + \frac{T}{R * C}} * y((k-1) * T) + \frac{1}{1 + \frac{T}{R * C}} * x(k * T)$$

Seien $y(k * T) = 0$ für alle $k \leq 0$ und

$$x(k * T) = \begin{cases} 0 & \text{für } k \leq 0 \\ 1 & \text{für } k \geq 1 \end{cases}$$

als diskretisierte Sprungfunktion sowie $T = \frac{R \cdot C}{3}$.

Dann hat die Sprungantwort für $k > 0$ folgenden Verlauf:

$$\begin{aligned} y(k \cdot T) &= \frac{3}{4} \cdot y((k-1) \cdot T) + \frac{1}{4} \cdot x(k \cdot T) \\ &= \frac{3}{4} \cdot y((k-1) \cdot T) + \frac{1}{4} \\ &= 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{k \cdot T} \end{aligned}$$

Die letzte Form weist man durch Einsetzen in die ursprüngliche Gleichung nach.

Die Abbildung 5.21 zeigt den durch die Differenzengleichung für $k > 0$ beschriebenen Verlauf für $T = 1$ und den entsprechenden Verlauf der Lösung der Differentialgleichung für $R \cdot C = 3$, nämlich:

$$y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{3}}$$

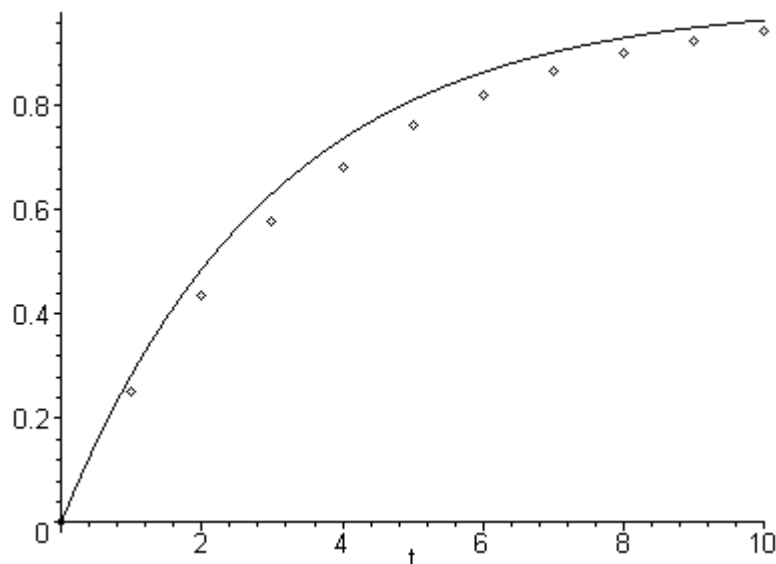


Bild 5.21: Lösung der Differential- und der Differenzgleichung für ein RC-Glied; die Punkte stellen die Ergebnisse der Auswertung der rekursiven Gleichungen dar.

Für die in der Praxis häufig verwendeten PID-Regler gilt:

$$y(t) = k_P * x + k_I * \int_0^t x(\tau) d\tau + k_D * \frac{dx}{dt}$$

Wir schreiben nun (T : Abtastperiode, $\forall k \in \mathbb{N}$)

$$T * \sum_{\kappa=0}^{k-1} x(\kappa * T) \quad \text{für} \quad \int_0^t x(\tau) d\tau$$

und

$$\frac{x(k * T) - x((k-1) * T)}{T} \quad \text{für} \quad x^{(1)}(t)$$

Auch sei wie üblich: $x(k * T) = 0$ für $k < 0$

Damit erhält man folgenden PID-Algorithmus, wobei wir für $y(k * T) = y_k$ und entsprechend für $x(k * T) = x_k$ schreiben:

$$y_k = k_P * x_k + k_I * T * \sum_{\kappa=0}^{k-1} x_\kappa + \frac{k_D}{T} * (x_k - x_{k-1})$$

Dies kann man auch rekursiv schreiben. Wir leiten die rekursive Darstellung ab:

Um den Anfangswert zu erhalten, setzen wir $k = 0$ und beachten, dass $x_{-1} = x_{-2} = x_{-3} = \dots = 0$ festgelegt wurde:

$$\begin{aligned} y_0 &= k_P * x_0 + k_I * T * \sum_{\kappa=0}^{-1} x_\kappa + \frac{k_D}{T} * (x_0 - x_{-1}) \\ &= k_P * x_0 + \frac{k_D}{T} * x_0 \\ &= \left(k_P + \frac{k_D}{T} \right) * x_0 \end{aligned}$$

Um den Wert y_k zu erhalten, subtrahieren wir zwei aufeinanderfolgende Werte:

$$\begin{aligned} y_k - y_{k-1} &= k_P * x_k + k_I * T * \sum_{\kappa=0}^{k-1} x_\kappa + \frac{k_D}{T} * (x_k - x_{k-1}) - \\ &\quad \left(k_P * x_{k-1} + k_I * T * \sum_{\kappa=0}^{k-2} x_\kappa + \frac{k_D}{T} * (x_{k-1} - x_{k-2}) \right) \\ &= k_P * (x_k - x_{k-1}) + k_I * T * x_{k-1} + \frac{k_D}{T} * (x_k - 2 * x_{k-1} + x_{k-2}) \end{aligned}$$

Dafür können wir auch schreiben:

$$y_k = y_{k-1} + \left(k_p + \frac{k_D}{T}\right) * x_k + \left(-k_p + k_I * T - \frac{2 * k_D}{T}\right) * x_{k-1} + \frac{k_D}{T} * x_{k-2}$$

Zur Berechnung von $y(k * T)$ sind also Werte von drei früheren Zeitpunkten zu bestimmen und gewichtet zu addieren. k_p , k_I , k_D sind wählbare Parameter. Die Abtastperiode T ist so zu wählen, dass beispielsweise das Nyquistkriterium erfüllt ist:

Sei f_{max} die größte Frequenz, die in einem Signal des Regelkreises auftritt, dann muss gelten:

$$T < \frac{1}{2 * f_{max}}$$

Die Abtastfrequenz ($= \frac{1}{T}$) sollte mindestens doppelt so hoch sein wie die höchste im Signal enthaltene Frequenz f_{max} . Ist die Abtastfrequenz niedriger, so können höherfrequente Signalanteile nicht (einwandfrei) erkannt werden.