Name

Vorname

Matrikelnummer

Hörsaal

Platznummer

Note:

Hiermit bestätige ich, dass ich vor Prüfungsbeginn darüber in Kenntnis gesetzt wurde, dass ich im Falle einer plötzlich während der Prüfung auftretenden Erkrankung das Aufsichtspersonal umgehend informieren muss. Dies wird im Prüfungsprotokoll vermerkt. Danach muss unverzüglich ein Rücktritt von der Prüfung beim zuständigen Prüfungsausschuss beantragt werden. Ein vertrauensärztliches Attest – ausgestellt am Prüfungstag – kann gegebenenfalls innerhalb der nächsten Tage nachgereicht werden. Wird die Prüfung hingegen in Kenntnis der gesundheitlichen Beeinträchtigung dennoch regulär beendet, kann im Nachhinein kein Prüfungsrücktritt aufgrund von Erkrankung beantragt werden. Ich bestätige weiterhin, dass die erhaltene Klausurangabe vollständig ist. Ich habe die Angabe überprüft und keine offensichtlichen Druckfehler oder fehlenden Seiten festgestellt.

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
$\sum$		

Technische Universität München

Fakultät für Mathematik

Mathematik 2 (Elektrotechnik) – Grundlagen- und Orientierungsprüfung SS2010 (Probeklausur)

Prof. Dr. Anusch Taraz

12. Juli 2010

Hinweise:

- Überprüfen Sie die Angabe: Es sind **10 Aufgaben** auf den **Seiten 1 bis 14**, inklusive Deckblatt und Übersichtsblatt. Vergleichen Sie die Angaben mit dem Übersichtsblatt. Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- Jede Aufgabe ist in dem unmittelbar anschließenden eingerahmten Platz zu bearbeiten. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.
- Zum Bestehen sind voraussichtlich mindestens 17 Punkte nötig!
- Das letzte Blatt mit der Aufgabenübersicht kann zur Bearbeitung abgetrennt werden. Bei vorzeitiger Abgabe sind *alle* Blätter einschließlich des Übersichtsblattes abzugeben!
- Erlaubte Hilfsmittel: Sämtliche Bücher, Skripten, Aufzeichnungen, aber *keine* elektronischen Hilfsmittel wie Taschenrechner, Mobiltelefon, Notebooks etc.

Erstkorrektur (I)

Zweitkorrektur (II)

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von: ____________ bis: ____________

Vorzeitig abgegeben um: ____________

Besondere Bemerkungen:

Gegeben sei die parametrisierte Kurve

$$k(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix}, t \in [-1; 1].$$

a) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve.

b) Bestimmen Sie eine Umparametrisierung der Kurve nach der Bogenlänge.

Aufgabe 2 (ca. 6 Punkte)

I	II

Entscheiden Sie für die folgenden Aussagen jeweils, ob sie wahr oder falsch sind. Geben Sie dazu entweder eine kurze(!) Begründung oder ein Gegenbeispiel an.

a) Es gilt $x^2 = O(x^3)$ für $x \to 1$.

☐ wahr

☐ falsch

Begründung bzw. Gegenbeispiel:

b) Sei $k(t), t \in [0, c]$ eine parametrisierte Kurve mit konstanter Krümmung $\kappa(t)$, und sei $s(t)$ die Bogenlänge von k in Abhängigkeit von t. Dann gilt $s(t + \delta) - s(t) = s(\delta)$ für jedes $\delta \geq 0$ mit $t + \delta \leq c$.

☐ wahr

☐ falsch

Begründung bzw. Gegenbeispiel:

c) Jede komplexe Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$z_n := c^n \cdot e^{2i\pi n}, \quad c \in \mathbb{C},$$

und $|c| < 1$ konvergiert gegen 0.

☐ wahr

☐ falsch

Begründung bzw. Gegenbeispiel:

Aufgabe 3 (ca. 6 Punkte)

I	II

Berechnen Sie mit Hilfe von Substitution und einer Partialbruchzerlegung (ohne Verwendung der Formelsammlung) das unbestimmte Integral

$$\int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x(e^x+1)}\, dx.$$

Aufgabe 4 (ca. 3 Punkte)

I	II

Berechnen Sie mit Hilfe einer partiellen Integration (ohne Verwendung der Formelsammlung) das unbestimmte Integral

$$\int \sin^2 x \, dx.$$

Aufgabe 5 (ca. 8 Punkte)

I	II

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = x^2 - |x-1| \,.$$

a) Zeigen Sie: f ist stetig.

b) Ist f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Beweisen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes: f besitzt genau zwei Nullstellen.

d) Zeigen Sie, dass f nur ein lokales Minimum und keine lokalen Maxima besitzt. Bestimmen Sie das lokale Minimum. Ist es auch ein globales Minimum?

Aufgabe 6 (ca. 6 Punkte)

I	II

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = e^x \cos x$ und sei $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom dritten Grades von f zum Entwicklungspunkt x_0.

b) Zeigen Sie mit Hilfe der Taylor-Restgliedformel: Der absolute Approximationsfehler im Intervall $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ ist beschränkt durch $\frac{3}{2}$.

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2^2 + \sin(x_2 + x_3).$$

a) Bestimmen Sie den Gradienten von f und zeigen Sie, dass f auf ganz $\mathbb{R}^3$ total differenzierbar ist.

b) Zeigen Sie: Der Punkt $v = (-\frac{\pi^2}{16}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})^T$ ist Lösung der Gleichung $f(x) = 1$.

c) Zeigen Sie: Es gibt eine offene Umgebung B von $w = (-\frac{\pi^2}{16}, \frac{\pi}{4})^T \in \mathbb{R}^2$ und eine differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so dass $f(x_1, g(x_1, x_3), x_3) = 1$ für alle $(x_1, x_3) \in B$ gilt.

d) Berechnen Sie die partielle Ableitung $\partial_1 g(w)$.

Aufgabe 8 (ca. 6 Punkte)

I	II

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = xe^{xy}$. Bestimmen Sie das Taylor-Polynom vom Grad 2 für die Funktion f zum Entwicklungspunkt $(1, 1)^T$.

Aufgabe 9 (ca. 5 Punkte)

I	II

Gegeben sei das restringierte Minimierungsproblem

$$\begin{aligned} &\min\ f(x,y) = x^2 + y^2 \\ &\quad (x,y) \in \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4 = 0\Big\}. \end{aligned}$$

a) Stellen Sie die zugehörige Lagrange-Funktion auf.

b) Bestimmen Sie eine Lösung des Optimierungsproblems.

Aufgabe 10 (ca. 5 Punkte)

I	II

Gegeben sei das homogene lineare Differentialgleichungssystem

$$x_1'(t) = \frac{5}{2}x_1(t) + \frac{1}{2}x_2(t)$$
$$x_2'(t) = \frac{1}{2}x_1(t) + \frac{5}{2}x_2(t)$$

zum Anfangswert $(x_1(0), x_2(0))^T = (1, 0)^T$. Bestimmen Sie eine Funktion $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$, die das Differentialgleichungssystem löst.

Aufgabe 1

Gegeben sei die parametrisierte Kurve

$$k(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix}, t \in [-1; 1].$$

a) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve.

b) Bestimmen Sie eine Umparametrisierung der Kurve nach der Bogenlänge.

Aufgabe 2

Entscheiden Sie für die folgenden Aussagen jeweils, ob sie wahr oder falsch sind. Geben Sie dazu entweder eine kurze(!) Begründung oder ein Gegenbeispiel an.

a) Es gilt $x^2 = O(x^3)$ für $x \to 1$.

b) Sei $k(t), t \in [0, c]$ eine parametrisierte Kurve mit konstanter Krümmung $\kappa(t)$, und sei $s(t)$ die Bogenlänge von k in Abhängigkeit von t. Dann gilt $s(t+\delta) - s(t) = s(\delta)$ für jedes $\delta \geq 0$ mit $t + \delta \leq c$.

c) Jede komplexe Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$z_n := c^n \cdot e^{2i\pi n}, \quad c \in \mathbb{C},$$

und $|c| < 1$ konvergiert gegen 0.

Aufgabe 3

Berechnen Sie mit Hilfe von Substitution und einer Partialbruchzerlegung (ohne Verwendung der Formelsammlung) das unbestimmte Integral

$$\int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x(e^x+1)}\, dx.$$

Aufgabe 4

Berechnen Sie mit Hilfe einer partiellen Integration (ohne Verwendung der Formelsammlung) das unbestimmte Integral

$$\int \sin^2 x\, dx.$$

Aufgabe 5

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = x^2 - |x-1|\,.$$

a) Zeigen Sie: f ist stetig.

b) Ist f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Beweisen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes: f besitzt genau zwei Nullstellen.

d) Zeigen Sie, dass f nur ein lokales Minimum und keine lokalen Maxima besitzt. Bestimmen Sie das lokale Minimum. Ist es auch ein globales Minimum?

Aufgabe 6

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = e^x \cos x$ und sei $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom dritten Grades von f zum Entwicklungspunkt x_0.

b) Zeigen Sie mit Hilfe der Taylor-Restgliedformel: Der absolute Approximationsfehler im Intervall $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ ist beschränkt durch $\frac{3}{2}$.

Aufgabe 7

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2^2 + \sin(x_2 + x_3).$$

a) Bestimmen Sie den Gradienten von f und zeigen Sie, dass f auf ganz $\mathbb{R}^3$ total differenzierbar ist.

b) Zeigen Sie: Der Punkt $v = (-\frac{\pi^2}{16}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})^T$ ist Lösung der Gleichung $f(x) = 1$.

c) Zeigen Sie: Es gibt eine offene Umgebung B von $w = (-\frac{\pi^2}{16}, \frac{\pi}{4})^T \in \mathbb{R}^2$ und eine differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so dass $f(x_1, g(x_1, x_3), x_3) = 1$ für alle $(x_1, x_3) \in B$ gilt.

d) Berechnen Sie die partielle Ableitung $\partial_1 g(w)$.

Aufgabe 8

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = xe^{xy}$. Bestimmen Sie das Taylor-Polynom vom Grad 2 für die Funktion f zum Entwicklungspunkt $(1, 1)^T$.

Aufgabe 9

Gegeben sei das restringierte Minimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min\, & f(x, y) = x^2 + y^2 \\ & (x, y) \in \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4 = 0\right\}. \end{aligned}$$

a) Stellen Sie die zugehörige Lagrange-Funktion auf.

b) Bestimmen Sie eine Lösung des Optimierungsproblems.

Aufgabe 10

Gegeben sei das homogene lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= \frac{5}{2}x_1(t) + \frac{1}{2}x_2(t) \\ x_2'(t) &= \frac{1}{2}x_1(t) + \frac{5}{2}x_2(t) \end{aligned}$$

zum Anfangswert $(x_1(0), x_2(0))^T = (1, 0)^T$. Bestimmen Sie eine Funktion $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,
$x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$, die das Differentialgleichungssystem löst.