

5. Praktikumsversuch: Gruppenlaufzeitentzerrung

5.1 Eigenschaften von Übertragungssystemen

5.1.1 Definition von Dämpfung und Phase

Ein Eingangssignal $x(t) \circ \rightarrow \bullet X(j\omega)$ eines linearen, konstanten, streng stabilen Systems S, wie im Bild 5.1 gezeigt, liefert ein Ausgangssignal $y(t) \circ \rightarrow \bullet Y(j\omega)$. Dieses lineare, konstante System S ist charakterisiert durch seine Übertragungsfunktion $H(j\omega)$.

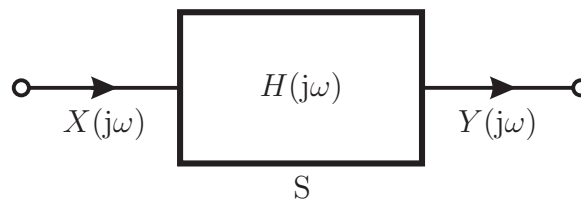


Bild 5.1: Lineares konstantes System

Es gilt $Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$. Man definiert nun ein Übertragungsmaß $\Gamma(j\omega)$ durch die Beziehung

$$H(j\omega) = e^{-\Gamma(j\omega)}, \quad \text{d. h.} \quad \Gamma(j\omega) = -\ln(H(j\omega)) . \quad (5.1)$$

Das Übertragungsmaß $\Gamma(j\omega)$ lässt sich aufspalten in seinen Realteil $A(\omega)$ und seinen Imaginärteil $B(\omega)$

$$\Gamma(j\omega) = A(\omega) + jB(\omega) . \quad (5.2)$$

$A(\omega)$ ist die Dämpfung und $B(\omega)$ die Phase des Systems bei einer bestimmten Frequenz ω . Es gilt

$$A(\omega) = \ln \left(\frac{1}{|H(j\omega)|} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{|H(j\omega)|^2} \right) \quad (5.3)$$

sowie

$$B(\omega) = \arg \left\{ \frac{1}{H(j\omega)} \right\} = -\arg \{H(j\omega)\} . \quad (5.4)$$

Dämpfung und Phase kennzeichnen vollständig die Übertragungseigenschaften des Systems S. Sowohl die Dämpfung $A(\omega)$ als auch die Phase $B(\omega)$ sind im Allgemeinen Funktionen

der Frequenz ω . Ihr Verlauf über der Frequenz ist für die sogenannten linearen Verzerrungen (Dämpfungs- und Phasenverzerrungen) maßgebend, die ein Eingangssignal $x(t)$ beim Durchlaufen des Systems S erfährt. Hierbei bedeutet ein positives $B(\omega)$, dass bei einem sinusförmigen Eingangssignal mit der konstanten Frequenz $\omega > 0$, das Ausgangssignal dem Eingangssignal nacheilt.

5.1.2 Verzerrungsfreie Übertragung

Damit ein Signal $x(t)$ durch ein System S *vollständig getreu* übertragen wird, d.h., damit

$$x(t) = y(t) \quad \text{bzw.} \quad X(j\omega) = Y(j\omega) \quad (5.5)$$

gilt, müssen wir folgende Forderungen an die Dämpfung $A(\omega)$ bzw. an die Phase $B(\omega)$ stellen:

1. Die Dämpfung durch das System S muss für alle im Spektrum von $x(t)$ enthaltenen Frequenzen gleich null sein. Jeder Spektralanteil $X(j\omega)$ des Signals $x(t)$ muss also ungedämpft das System S durchlaufen, damit sich die Beträge der Spektralanteile $X(j\omega)$ und $Y(j\omega)$ nicht unterscheiden.

$$A(\omega) = 0$$

2. Alle sinusförmigen Teilschwingungen des Eingangssignals müssen jeweils in Phase mit den entsprechenden Teilschwingungen des Ausgangssignals sein, oder anders ausgedrückt darf ein sinusförmiges Eingangssignal $x(t)$ durch das System S zeitlich nicht verzögert werden.

$$B(\omega) = 0$$

Obige Forderungen nennt man die Bedingungen der idealen Übertragung. In der Praxis ist es natürlich nicht möglich, diese Bedingungen streng zu erfüllen. Jedes reale Übertragungssystem ist naturgemäß mit Verlusten behaftet und enthält induktive und kapazitive Elemente, die unvermeidlich eine Dämpfung und eine Verzögerung des Signals zur Folge haben. Weiterhin kann jede Übertragung eines Signals nur mit endlicher Geschwindigkeit erfolgen, was ebenfalls mit einer zeitlichen Verzögerung verbunden ist. Eine gewisse Verzögerung des Eingangssignals und der darin enthaltenen Information ist in der Praxis tragbar, solange sie einen vom jeweiligen Fall abhängigen Höchstwert nicht überschreitet. Wichtig ist, dass durch eine zeitliche Verzögerung und Dämpfung des zu übertragenden Signals der Informationsinhalt im Allgemeinen nicht verändert wird. Wir ersetzen daher die Forderung aus Gleichung (5.5), die wir an ein ideales Übertragungssystem gestellt haben, durch die realistischere Forderung

$$y(t) = Kx(t - t_0) , \quad (5.6)$$

wobei K und t_0 positive Konstanten sind. Ein Übertragungssystem S , bei dem diese Beziehung zwischen Eingangssignal $x(t)$ und Ausgangssignal $y(t)$ gilt, bezeichnen wir als ein verzerrungsfreies System. Für das Übertragungssystem S erhält man durch Transformation in den Frequenzbereich

$$Y(j\omega) = K e^{-j\omega t_0} X(j\omega) . \quad (5.7)$$

Die Übertragungsfunktion $H(j\omega)$ eines verzerrungsfreien Systems lautet folglich

$$H(j\omega) = K e^{-j\omega t_0} \quad (5.8)$$

und entspricht einer konstanten Dämpfung

$$A = -\ln(K) \quad (5.9)$$

und einer proportional zu ω ansteigende Phase

$$B(\omega) = \omega t_0. \quad (5.10)$$

Die Forderungen an die Dämpfung und an die Phase eines verzerrungsfreien Systems sind in den Bildern 5.2 und 5.3 veranschaulicht.

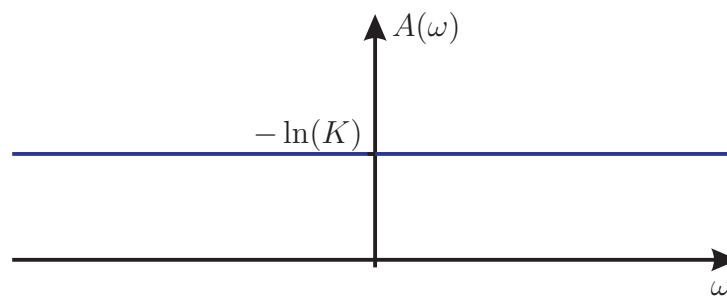


Bild 5.2: Konstanter Dämpfungsverlauf $A(\omega)$ im Falle $A > 0$

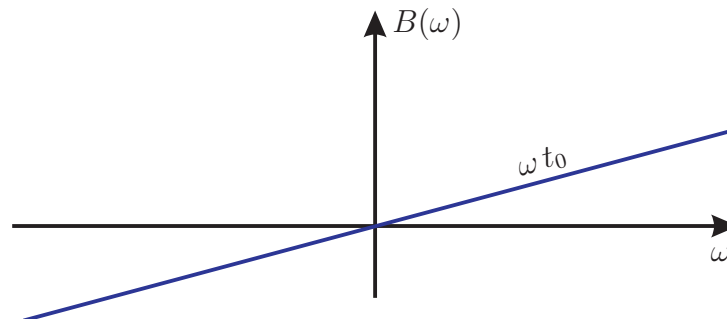


Bild 5.3: Lineare Phase durch den Nullpunkt verlaufend mit t_0 als Geradensteigung

Die Ausgangsfunktion $y(t)$ stimmt mit der Eingangsfunktion $x(t)$ überein, ist gegen diese jedoch um einen Faktor K gedämpft und um die Zeitkonstante t_0 verzögert. Den Zusammenhang stellt Bild 5.4 dar.

Ist das Eingangssignal $x(t)$ frequenzbegrenzt, so genügt es, die Forderungen für ein verzerrungsfreies System in dem zu $x(t)$ gehörigen Frequenzband $\Delta\omega$ zu erfüllen, siehe hierzu Bild 5.5.

Auch bei einem Übertragungssystem mit Bandpasscharakter lässt sich angenähert eine mit der Frequenz linear ansteigende Phase $B(\omega)$ realisieren. Die Phasenbedingung für die verzerrungsfreie Übertragung verlangt aber außerdem noch, dass die zu $B(\omega)$ gehörige Gerade durch den Nullpunkt geht. Dieses bedeutet für einen Bandpass, dass die Phase, wie im Bild 5.6 gezeigt, in dem Übertragungsbereich $\Delta\omega$ sich an eine in ihrer Verlängerung durch den Nullpunkt gehende Gerade anschmiegt.

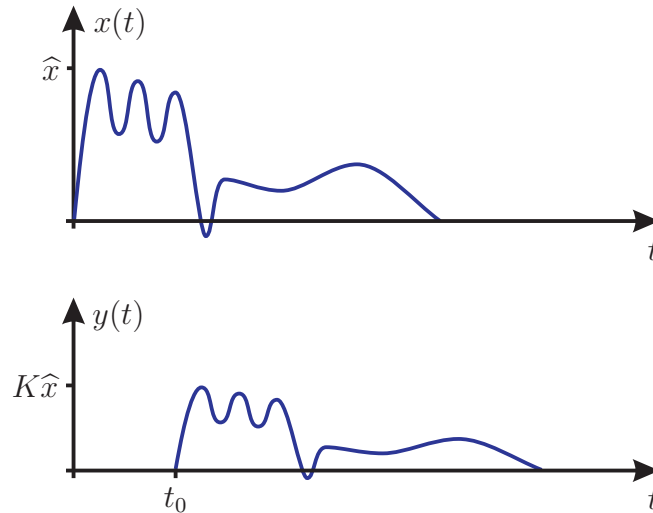


Bild 5.4: Eingangs- und Ausgangssignal eines verzerrungsfreien Systems

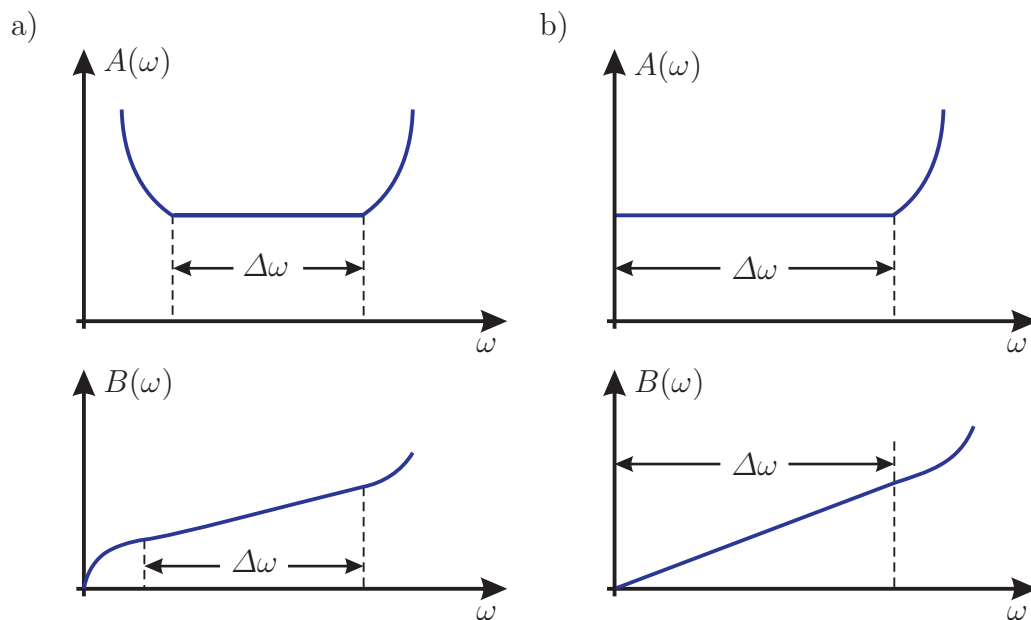


Bild 5.5: Dämpfungs- und Phasenverlauf bei frequenzbegrenzten Systemen:

- a) Bandpass
- b) Tiefpass

Diese Forderung lässt sich jedoch nur selten erfüllen, da man in der Praxis meist überhaupt keine Kontrolle über den Schnittpunkt der verlängerten Geraden mit der Ordinate hat. Die Bedingung $B(\omega) = \omega t_0$ muss daher durch die allgemeinere Bedingung

$$B(\omega) = \omega t_0 + B_0 \quad (5.11)$$

ersetzt werden, in der B_0 eine Konstante ist, was im Bild 5.7 veranschaulicht ist.

Um nunmehr Aussagen bezüglich der Verzerrungsfreiheit eines Übertragungssystems machen zu können, sollen die Begriffe Phasenlaufzeit und Gruppenlaufzeit eingeführt werden. Hierbei interessiert vor allem, ob die Konstante B_0 irgendwelchen Einschränkungen unterliegt.

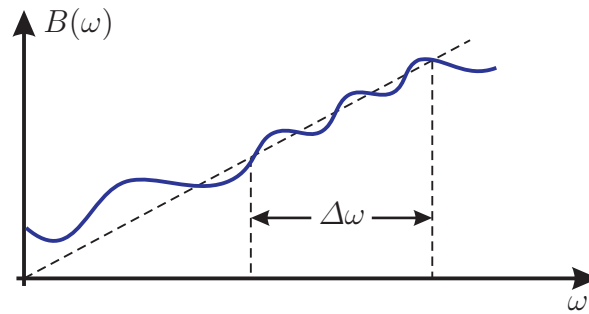


Bild 5.6: Anschmiegung der Phase im Durchlassgebiet an eine Ursprungsgerade

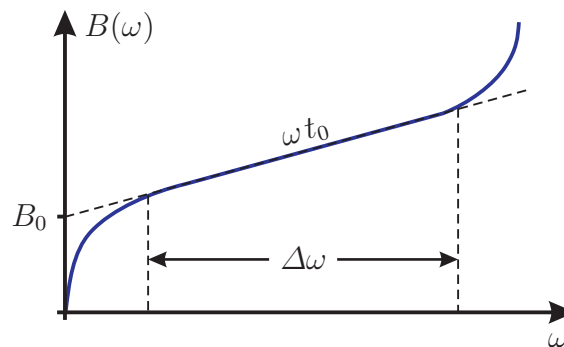


Bild 5.7: Lineare Phase nicht durch den Nullpunkt verlaufend

5.1.3 Phasenlaufzeit und Gruppenlaufzeit

Wenn die Dämpfung $A(\omega)$ in dem betrachteten Frequenzband $\Delta\omega$ konstant ist unterscheidet man zwischen zwei verschiedenen Arten von Laufzeiten.

1. Die Phasenlaufzeit t_{ph} , welche ein einzelnes sinusförmiges Signal benötigt, um eine Leitung oder ein Zweitor, allgemein ein System S , zu durchlaufen.
2. Die Gruppenlaufzeit t_{gr} , welche die Verzögerung der im Signal enthaltenen Information darstellt.

Alle nun folgenden Betrachtungen haben nur dann Gültigkeit, wenn die Dämpfung $A(\omega)$ in dem betrachteten Frequenzband $\Delta\omega$ konstant ist.

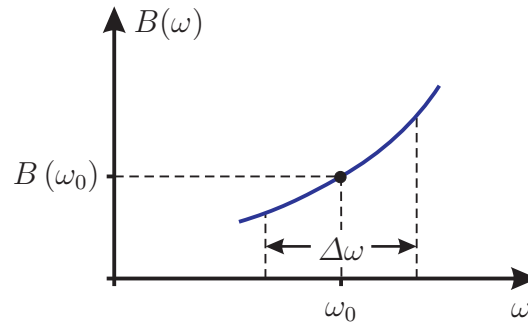
Der Verlauf der Phase $B(\omega)$ eines Systems S sei innerhalb eines interessierenden Frequenzbereichs $\Delta\omega$ gegeben. Dann ist die Phasenlaufzeit t_{ph} für irgendein sinusförmiges Signal $x(t)$ mit einer Frequenz ω , z. B. ω_0 , definiert durch

$$t_{\text{ph}}(\omega) = \frac{B(\omega)}{\omega}, \quad (5.12)$$

was im Bild 5.8 dargestellt ist.

Rein anschaulich bedeutet die Phasenlaufzeit t_{ph} die Zeit, um die das ebenfalls sinusförmige Ausgangssignal $y(t)$ gegenüber dem Eingangssignal $x(t)$ verzögert wird, was im Bild 5.9 darstellt ist.

Dass bei der Übertragung eines einzelnen sinusförmigen Signals eine Phasenlaufzeit entsteht, folgt beispielsweise unmittelbar aus der Vorstellung, dass auf einer Leitung (als System S) eine räumliche Spannungswelle mit endlicher Geschwindigkeit fortschreitet und am

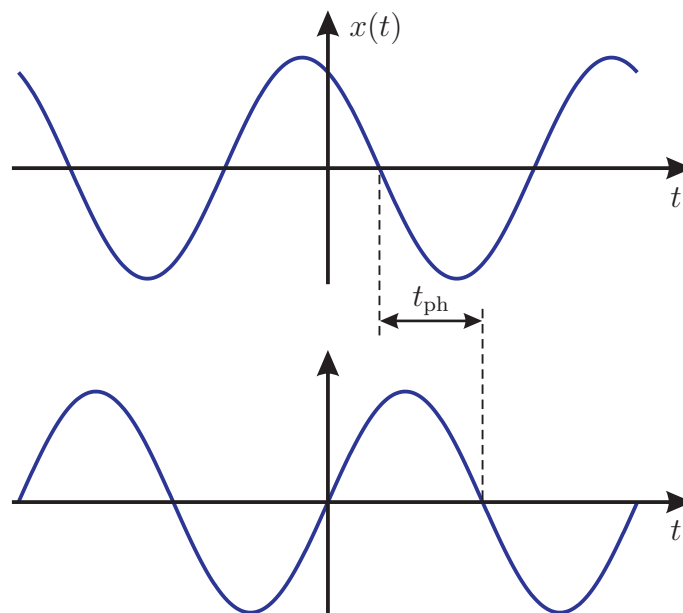
**Bild 5.8:** Zur Definition der Phasenlaufzeit

Leitungsende eine Wechselspannung erzeugt, die gegenüber der Spannung am Eingang nach-eilt. Bei einem idealen Phasengang der Form $B(\omega) = \omega t_0$ ist die Phasenlaufzeit $t_{\text{ph}} = t_0$ also für alle ω im betrachteten Frequenzbereich konstant. Hat $B(\omega)$ die realistischere Form aus Gleichung (5.11), so beträgt die Phasenlaufzeit

$$t_{\text{ph}}(\omega) = \frac{B(\omega)}{\omega} = t_0 + \frac{B_0}{\omega}, \quad (5.13)$$

sie ist also eine Funktion der Frequenz ω .

Mit einer einzigen Frequenz läßt sich bekanntlich keine Information übertragen. Ein reales Signal besteht immer aus unendlich vielen Frequenzen. Hat die Phase die Form $B(\omega) = \omega t_0 + B_0$, so werden die im Eingangssignalspektrum enthaltenen Sinusschwingungen unterschiedlich verzögert. Man könnte daher annehmen, daß für $B_0 \neq 0$ eine sinnvolle Übertragung weitgehend unmöglich wäre. Jedoch ist dies für $B_0 = n\pi$, wobei n eine beliebige ganze Zahl ist, und bei modulierten Signalen $x(t)$ nicht der Fall. Für $B_0 = n\pi$ ist $e^{jB_0} = [-1]^n$, so dass sich nur eine Vorzeichenumkehr, also keine betragsmäßige Änderung in Bezug auf $B_0 = 0$ ergibt. Bei modulierten Signalen ergibt sich zwar eine erhebliche

**Bild 5.9:** Ein um die Phasenlaufzeit verzögertes sinusförmiges Signal $y(t) = x(t - t_{\text{ph}})$

Verzerrung der Augenblickswerte des Signals $x(t)$, dennoch bleibt der informationstragende Teil, das ist bei Amplitudenmodulation die Einhüllende des Signals $x(t)$, siehe Bild 5.10, bis auf die Zeitverzögerung t_0 vollständig erhalten.

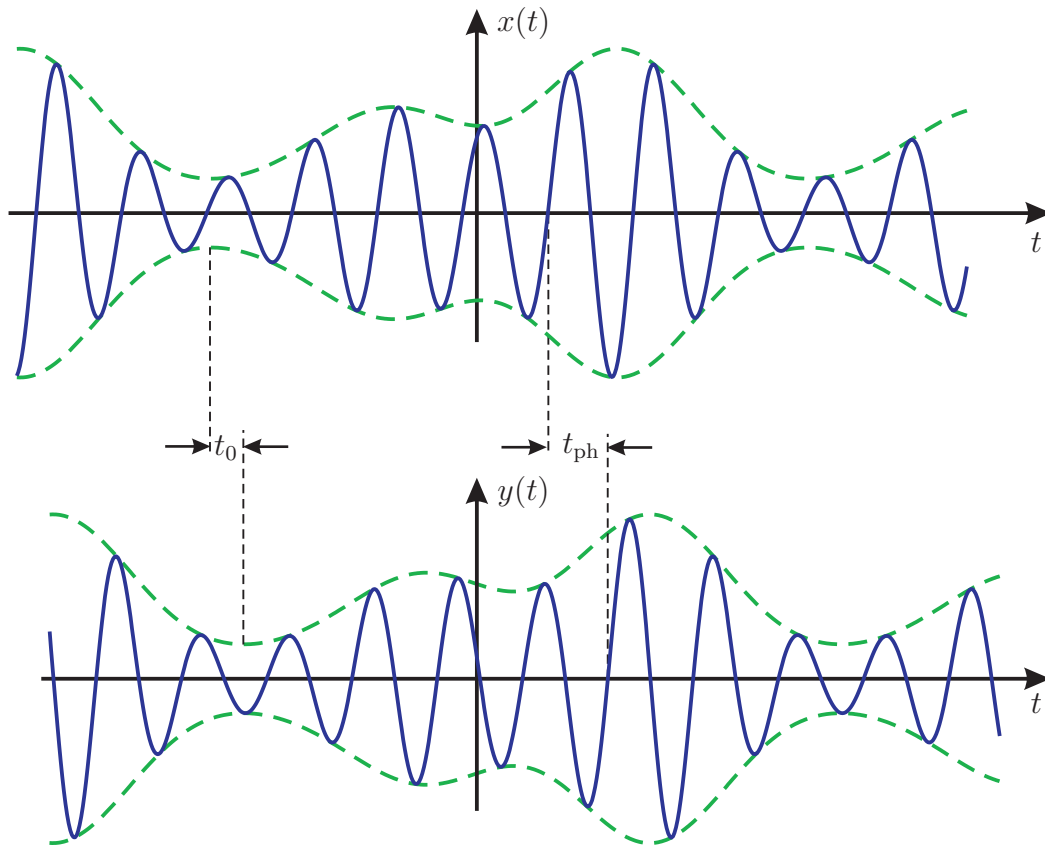


Bild 5.10: Verzögerung einer einzigen Sinusschwingung und einer Einhüllenden bei Amplitudenmodulation

Wir müssen daher eine Unterscheidung treffen zwischen der Laufzeit t_{ph} einer einzigen Sinusschwingung und der Laufzeit t_{gr} einer in einem modulierten Signal enthaltenen Information, wie z. B. in Form der Einhüllenden bei Amplitudenmodulation.

Die Zeitverzögerung des Informationsinhaltes eines modulierten Signals bezeichnet man als die Gruppenlaufzeit t_{gr} und ist durch

$$t_{gr}(\omega) = \frac{dB(\omega)}{d\omega}. \quad (5.14)$$

definiert. Dieser Zusammenhang ist im Bild 5.11 dargestellt.

Die Gruppenlaufzeit t_{gr} ist also die Steigung im Punkte ω des interessierenden Frequenzbereichs $\Delta\omega$ und unterscheidet sich im Allgemeinen von der Phasenlaufzeit. Unter der Voraussetzung eines konstanten Dämpfungsverlaufs $A(\omega)$ im Übertragungsbereich ist t_{gr} aus Kausalitätsgründen immer größer als Null.

$$t_{gr}(\omega) = \frac{dB(\omega)}{d\omega} > 0 \quad \text{für alle } \omega. \quad (5.15)$$

Oft wird der Begriff der Gruppenlaufzeit nur im Zusammenhang mit der Verzögerung einer Einhüllenden bei Amplitudenmodulation benutzt. Dem Begriff der Gruppenlaufzeit kommt

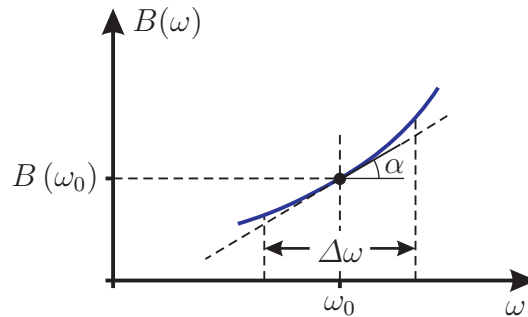


Bild 5.11: Zur Definition der Gruppenlaufzeit $t_{\text{gr}}(\omega_0) = \tan \alpha$

jedoch bei allen modulierten Signalen $x(t)$ eine allgemeinere Bedeutung zu. Die Gruppenlaufzeit entspricht der Verzögerung der im Signal enthaltenen Information. Daraus folgt, dass der Begriff der Gruppenlaufzeit nicht nur auf amplituden-, sondern auch auf frequenz- und phasenmodulierte Signale anwendbar ist [Fett77]. Bild 5.12 zeigt eine konstante Gruppenlaufzeit t_{gr} im Übertragungsfrequenzbereich. Dies ist Voraussetzung der verzerrungsfreien Übertragung.

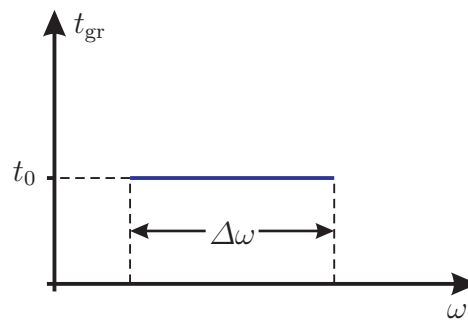


Bild 5.12: Konstante Gruppenlaufzeit im interessierenden Frequenzbereich

Eine konstante Gruppenlaufzeit entspricht einem linearen Phasenverlauf $B(\omega)$

$$B(\omega) = \omega t_0 + B_0.$$

In diesem Fall fällt die Gruppenlaufzeit t_{gr} also mit t_0 zusammen.

$$t_{\text{gr}}(\omega) = \frac{dB(\omega)}{d\omega} = t_0$$

Die Konstante B_0 ist beliebig wählbar. Alle in den vorausgehenden Betrachtungen gewonnenen Erkenntnisse zur verzerrungsfreien Übertragung eines Signals sollen noch einmal kurz zusammengefasst werden.

5.1.4 Bedingungen der verzerrungsfreien Übertragung

Man unterscheidet zwischen verzerrungsfreier Übertragung der Augenblickswerte eines Signals und verzerrungsfreier Übertragung des Informationsinhaltes eines modulierten Signals. Bedingung bezüglich des Dämpfungsverlaufs $A(\omega)$ ist in beiden Fällen eine im gesamten

Übertragungsfrequenzbereich konstante Dämpfung. Nur unter dieser Voraussetzung haben die Bedingungen an den Phasenverlauf $B(\omega)$ bzw. an die Gruppenlaufzeit $t_{gr}(\omega)$ Gültigkeit.

Für eine verzerrungsfreie Übertragung der Augenblickswerte eines Signals muss die Phasenkurve des Systems S im Übertragungsbereich eine Gerade sein. Ferner muss die gedachte Verlängerung der Phasenkurve die Ordinatenachse bei einem Vielfachen von π schneiden:

$$B(\omega) = \omega t_0 + B_0 \quad \text{mit} \quad B_0 = \pm n\pi \quad \text{und} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Da die Gruppenlaufzeit die Ableitung der Phase $B(\omega)$ nach ω ist, folgt

$$t_{gr} = \frac{dB(\omega)}{d\omega} = t_0.$$

Es muss u. a. also eine konstante Gruppenlaufzeit herrschen.

Für eine verzerrungsfreie Übertragung des Informationsinhaltes eines modulierten Signals genügt – ohne jede Zusatzbedingung – eine konstante Gruppenlaufzeit im Übertragungsbereich, d. h., die Phase $B(\omega)$ muss linear in ω sein:

$$B(\omega) = \omega t_0 + B_0,$$

wobei B_0 eine beliebige Konstante ist. Hieraus erhält man für die Gruppenlaufzeit

$$t_{gr} = \frac{dB(\omega)}{d\omega} = t_0.$$

Es folgt ebenso eine konstante Gruppenlaufzeit.

5.1.5 Problemstellung

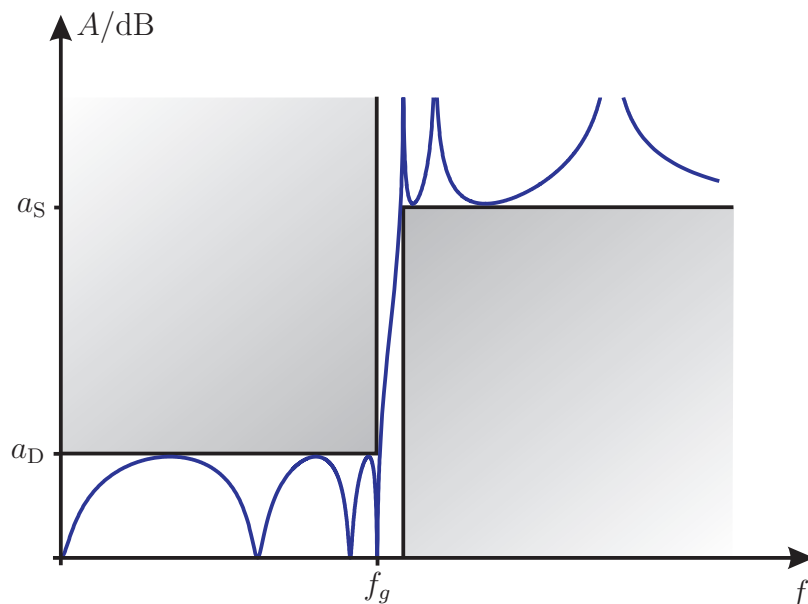


Bild 5.13: Prinzipieller Dämpfungsverlauf eines CAUER-Tiefpasses

In diesem Praktikumsversuch geht es darum, die Frequenzabhängigkeit der Gruppenlaufzeit eines CAUER-Tiefpasses zu entzerren. Im Allgemeinen sind CAUER-Tiefpässe dadurch

charakterisiert, dass sie entsprechend ihrem Filtergrad Rippel im Durchlassbereich bis zu einer maximalen Durchlassdämpfung und Rippel im Sperrbereich unter Einhaltung einer minimalen Sperrdämpfung haben. Im Übergangsbereich ist die Dämpfungsfunktion monoton steigend. Ein Beispiel eines solchen CAUER-Tiefpasses ist im Bild 5.13 gegeben.

In diesem Versuch wird speziell die Frequenzabhängigkeit der Gruppenlaufzeit des CAUER-Tiefpasses C 07 05 57 betrachtet und entzerrt. Der CAUER-Tiefpass C 07 05 57 ist vom Filtergrad 7 und besitzt eine minimale Sperrdämpfung von 40.5 dB, sowie eine maximale Durchlassdämpfung von 0.01 dB. Eine Dämpfungsentzerrung entfällt, da der CAUER-Tiefpass bezüglich seines Dämpfungsverhaltens bereits optimal ausgelegt ist.

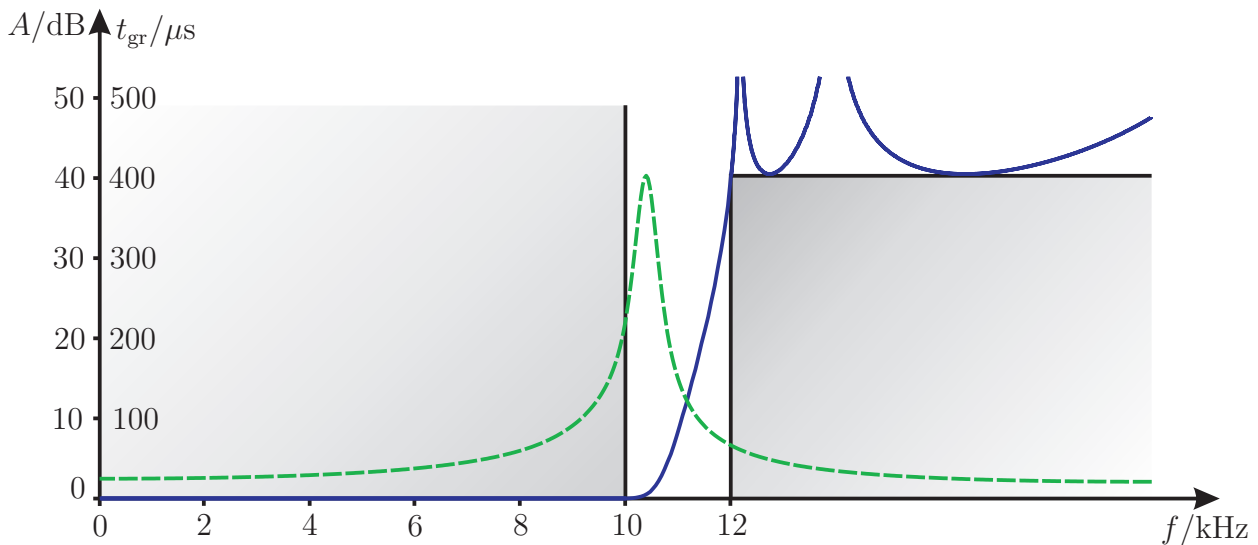


Bild 5.14: Verlauf von Dämpfung und Gruppenlaufzeit des CAUER-Tiefpasses C 07 05 57

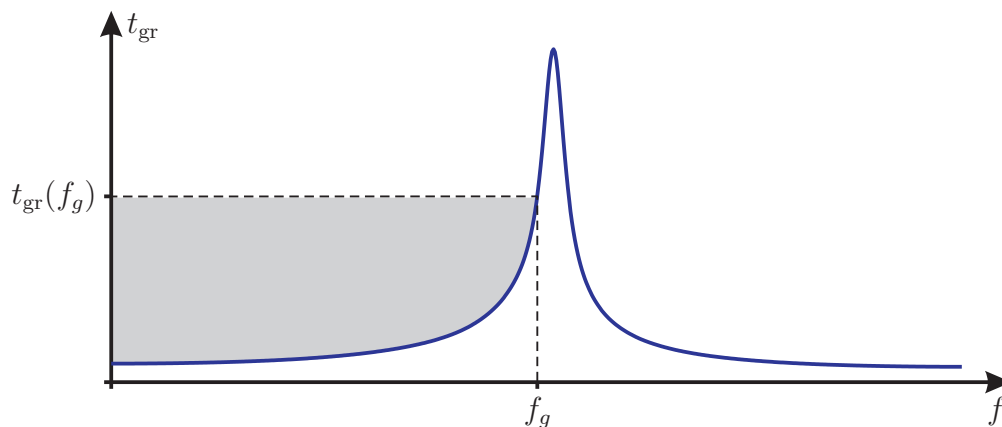


Bild 5.15: Zur Gruppenlaufzeitentzerrung

Im Allgemeinen genügen weder Dämpfungsverlauf $A(\omega)$ noch Phasenverlauf $B(\omega)$ eines Übertragungssystems den Bedingungen der verzerrungsfreien Übertragung. Um dennoch eine verzerrungsfreie Übertragung zu ermöglichen, kommt es darauf an, durch geeignete Netzwerke und Schaltungen den Dämpfungs- bzw. Phasenverlauf zu korrigieren. Diese Korrektur zur näherungsweisen Erfüllung der Bedingungen in Abschnitt 5.1.4 bezeichnet man als Entzerrung. Im Falle der Korrektur des Dämpfungs- oder Phasenverlaufs spricht

man von Dämpfungsentzerrung (Dämpfungsausgleich) bzw. Phasenentzerrung (Phasenausgleich). Letzteres ist gleichbedeutend mit der Gruppenlaufzeitentzerrung. Die Gruppenlaufzeit kann bei der Entzerrung aus Gründen der Kausalität nur erhöht werden. Den theoretischen Frequenzverlauf der Dämpfung und der Gruppenlaufzeit sowie die Toleranzgrenzen zeigt Bild 5.14. Wenn zur verzerrungsfreien Übertragung eines modulierten Signals, siehe Abschnitt 5.1.4 die Gruppenlaufzeit im Durchlassbereich $0 < f < f_g = 10 \text{ kHz}$ konstant sein soll, muss durch geeignete Schaltungen der markierte Bereich im Bild 5.15 aufgefüllt werden. Im Durchlassbereich $0 < f < f_g$ soll die Gruppenlaufzeit $t_{gr} = t_{gr}(f_g)$ sein.

5.2 Reaktanz-Allpassschaltung

5.2.1 Einführung und Definition

Eine Gruppenlaufzeitentzerrung ist nur dann sinnvoll, wenn die dazu erforderlichen Netzwerke keine zusätzliche Dämpfungsverzerrung bewirken, sonst wäre ja ein nachträglicher Dämpfungsausgleich notwendig. Deshalb fordert man von einem Phasenausgleichsnetzwerk, dass dessen Dämpfung Null oder wenigstens konstant über der Frequenz ist. Allpassschaltungen, speziell Reaktanz-Allpassschaltungen, erfüllen diese Forderung bezüglich des Dämpfungsverlaufs.

Definition : Zweitore, deren Betriebsdämpfung unabhängig von der Frequenz, also konstant ist, und deren Phase bzw. Gruppenlaufzeit einen bestimmten Frequenzverlauf besitzt, heißen Allpassschaltungen.

Hier interessieren speziell Allpassschaltungen, deren Dämpfung für alle Frequenzen im Idealfall im Übertragungsfrequenzbereich gleich Null ist. Da solche Schaltungen nur durch verlustfreie Elemente wie Spule und Kondensator zu verwirklichen sind, nennt man sie Reaktanz-Allpassschaltungen.

5.2.2 Übertragungsfunktion eines Reaktanz-Allpasses

Laut Definition ist die Dämpfung $A(\omega)$ einer Reaktanz-Allpassschaltung für alle Frequenzen gleich Null

$$A(\omega) = -\ln(|H(j\omega)|) = 0. \quad (5.16)$$

Daraus folgt, dass der Betrag der Übertragungsfunktion $H(p)$ für alle Frequenzen $p = j\omega$ frequenzunabhängig, also konstant und eins sein muss:

$$|H(j\omega)| = 1. \quad (5.17)$$

Eine Übertragungsfunktion, die diese Bedingung erfüllt, ist durch den Quotienten zweier reeller, für $p = j\omega$ zueinander konjugiert komplexer Polynome darstellbar. Da außerdem das Nennerpolynom für Reaktanzschaltungen ein HURWITZ-Polynom sein muss, ergibt sich für die Übertragungsfunktion eines Reaktanz-Allpasses in Abhängigkeit von der normierten komplexen Frequenz $p = \sigma + j\omega$:

$$H(p) = \frac{g(-p)}{g(p)}. \quad (5.18)$$

Hierbei ist $g(p)$ ein reelles HURWITZ-Polynom vom Grad n . Folglich ist $H(p)$ ebenfalls vom Grad n und durch die in der linken p -Halbebene liegenden n Nullstellen des HURWITZ-Polynoms $g(p)$ bis auf eine Konstante bestimmt.

5.2.3 Elementarglieder

Eine realisierbare Übertragungsfunktion $H(p)$ lässt sich nach Gleichung (5.19) bei Darstellung der Polynome durch ihre Nullstellen-Faktoren in der Form

$$H(p) = \prod_{\sigma=1}^{n-2r} \frac{-p + \alpha_{\sigma}}{p + \alpha_{\sigma}} \prod_{\varrho=1}^r \frac{p^2 - 2\alpha_{\varrho}p + \gamma_{\varrho}^2}{p^2 + 2\alpha_{\varrho}p + \gamma_{\varrho}^2} \quad \text{mit} \quad \gamma_{\varrho}^2 = \alpha_{\varrho}^2 + \beta_{\varrho}^2 \quad (5.19)$$

schreiben. Hierbei sind $p_{0\sigma} = -\alpha_{\sigma}$ reelle Pole und $p_{0\varrho} = -\alpha_{\varrho} \pm j\beta_{\varrho}$ konjugiert komplexe Polpaare. Jeder einzelne Faktor der Produktdarstellung in Gleichung (5.19) lässt sich wegen der beiderseitigen Reflexionsfreiheit der Allpässe, bei Anpassung der Torbezugswiderstände, durch einen einzelnen Elementar-Allpass realisieren. Umgekehrt ergibt die Kaskadierung solcher Elementarglieder die Gesamtschaltung mit der Übertragungsfunktion nach Gleichung (5.19). Es ist daher zweckmäßig, die Eigenschaften und die Realisierung solcher Elementar-Zweitore näher zu erörtern.

Elementar-Allpass vom Grad $n = 2$

Die dazugehörige Nullstellen- und Polverteilung von $H(p)$ ist in Bild 5.16 dargestellt, wobei $\tan(\varphi) = \beta/\alpha$ und $\cos(\varphi) = \alpha/\gamma$ gilt. Für diesen Fall eines konjugiert komplexen Nullstellen-Paares von $g(p)$ ist nach Gleichung (5.19),

$$H(p) = \frac{p^2 - 2\alpha p + \gamma^2}{p^2 + 2\alpha p + \gamma^2}. \quad (5.20)$$

Die Polstellen von $H(p)$ ergeben sich zu

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}, \quad (5.21)$$

wo $\alpha, \gamma > 0$ vorausgesetzt wird. Da ferner

$$\beta = \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2} \quad (5.22)$$

positiv sein soll, muss $\gamma > \alpha$ gelten.

Mit Gleichung (5.4) erhalten wir für die Phase

$$B(\omega) = -\arg \{H(j\omega)\} = 2 \arg \{ \gamma^2 - \omega^2 + j2\alpha\omega \}.$$

Für positive Frequenzen ω folgt somit

$$B(\omega) = 2 \arctan \left(\frac{2\alpha\omega}{\gamma^2 - \omega^2} \right). \quad (5.23)$$

Differenzieren wir nun $B(\omega)$ nach der Frequenz, so erhalten wir mit Gleichung (5.14) unter Berücksichtigung von

$$\frac{d}{d\omega} \arctan F(\omega) = \frac{F'(\omega)}{1 + F^2(\omega)} \quad (5.24)$$

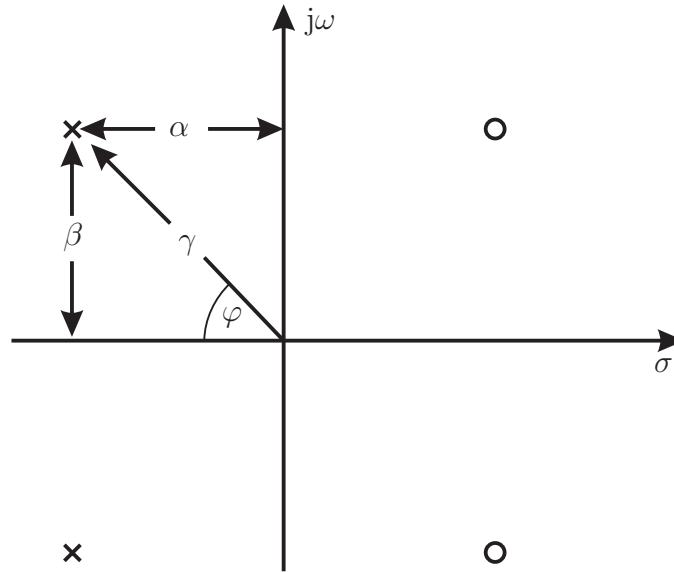


Bild 5.16: Pol- und Nullstellenverteilung eines Allpasses 2. Grades

die Gruppenlaufzeit

$$\begin{aligned}\tau(\omega) &= \frac{4\alpha [\gamma^2 + \omega^2]}{[\gamma^2 - \omega^2]^2 + 4\alpha^2 \omega^2} = \frac{4\alpha [\gamma^2 + \omega^2]}{[\gamma^2 + \omega^2]^2 - 4\beta^2 \omega^2} \\ &= \frac{2\alpha}{[\omega - \beta]^2 + \alpha^2} + \frac{2\alpha}{[\omega + \beta]^2 + \alpha^2}.\end{aligned}\quad (5.25)$$

Unter Definition eines Winkels φ zwischen dem Strahl vom Nullpunkt zum Pol $p_0 = -\alpha + j\beta$ und der negativen reellen Achse (vgl. Bild 5.16) erhalten wir zwei zu betrachtende Fälle in der Kurve der Gruppenlaufzeit.

Für den ersten Fall, dass

$$2\beta - \gamma > 0$$

folgt

$$\sqrt{3}\beta > \alpha$$

und somit ergibt sich

$$\varphi > \pi/6.$$

In diesem Fall können die Frequenzen bei dem die Gruppenlaufzeit aus (5.25) maximal wird berechnet werden zu

$$\omega_{\max} = \pm \sqrt{\gamma [2\beta - \gamma]}.\quad (5.26)$$

Aus dieser Gleichung (5.26) ist die Fallunterscheidung ersichtlich, da der Wurzelausdruck das Vorzeichen bei $\varphi = \pi/6$ wechselt.

Die Maxima der beiden Einzelkurven aus den Summanden der Gleichung (5.25) betragen für $\varphi > \pi/6$ jeweils

$$\tilde{\tau}_{\max} = \frac{2}{\alpha}\quad (5.27)$$

und treten bei den Frequenzen $\omega = \pm\beta$ auf, während die Maxima der Summenkurve

$$\tau_{\max} = \frac{\alpha}{\beta[\gamma - \beta]} \quad \text{für } \varphi > \pi/6 \quad (5.28a)$$

bei den in Gleichung (5.26) berechneten Frequenzen auftreten. Das relative Minimum ist bei $\omega = 0$ und hat den Wert

$$\tau_{\min} = \frac{4\alpha}{\gamma^2}. \quad (5.29)$$

Für diesen Fall ist im Bild 5.17 der prinzipielle Frequenzverlauf der Gruppenlaufzeit als obere Kurve angegeben. Die beiden unteren Kurven sind die Verläufe der beiden Summanden von Gleichung (5.25), deren Addition den Gesamtverlauf Bild 5.17 ergibt.

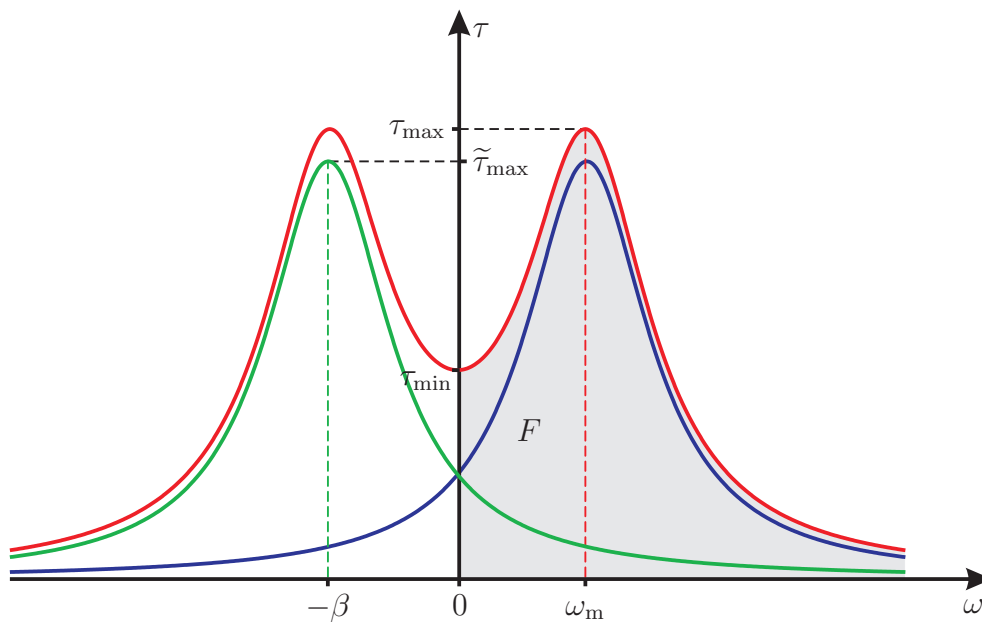


Bild 5.17: Prinzipieller Frequenzverlauf der Gruppenlaufzeit

Der zweite Fall, wobei $\varphi \leq \pi/6$ ist, beinhaltet nur ein Maximum der Gruppenlaufzeit bei der Frequenz $\omega = 0$:

$$\tau_{\max} = \frac{4\alpha}{\gamma^2} \quad \text{für } \varphi \leq \pi/6. \quad (5.28b)$$

5.2.4 Zur Realisierung von Reaktanz-Allpassschaltungen

Ist die Übertragungsfunktion $H(p)$ eines Elementargliedes mit ihren Polstellenparametern gemäß der Gleichung (5.19) bekannt, so lässt sie sich durch eine Reihe äquivalenter Reaktanz-Allpassschaltungen realisieren, deren normierte Schaltelemente in Abhängigkeit von den Polstellenparametern gegeben sind. Es würde zu weit führen, alle möglichen Allpässe anzuführen, welche dieselbe Übertragungsfunktion $H(p)$ realisieren. Eine ausführliche Darstellung ist in [AS62] und [AS63] zu finden. In diesem Kapitel werden die Schaltungen vom Grad $n = 2$ erläutert, die im Praktikumsversuch zur Gruppenlaufzeitentzerrung des

CAUER-Tiefpasses herangezogen werden. Jedes passive, symmetrische Zweitor kann durch eine Brückenschaltung mit paarweise gleichen Brückenwiderständen (hier speziell Reaktanzeintore) realisiert werden. Die symmetrische Brückenschaltung hat den Nachteil, dass sie nur erdsymmetrisch aufgebaut werden kann (dies ist wegen der bei hohen Frequenzen notwendigen Abschirmung meist unerwünscht) und dass relativ viele Schaltelemente nötig sind. Beide Nachteile lassen sich vermeiden, wenn man die Brückenschaltung in äquivalente erdsymmetrische Schaltungen umrechnet. Auf diese Weise erhält man die in Bild 5.18 und Bild 5.19 gezeigten Schaltungen.

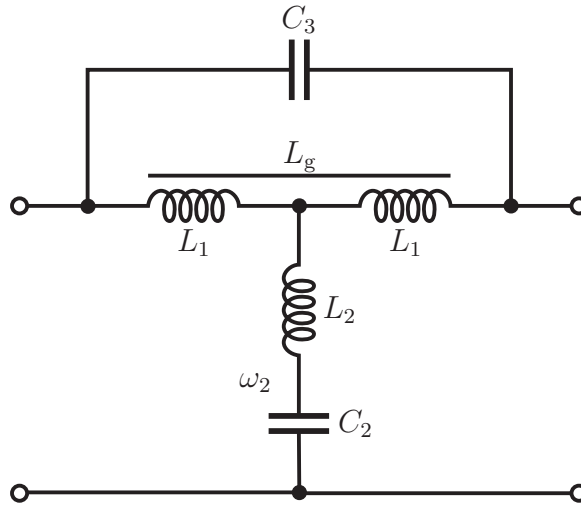


Bild 5.18: Erdsymmetrische Realisierung eines Elementarallpasses 2. Grades

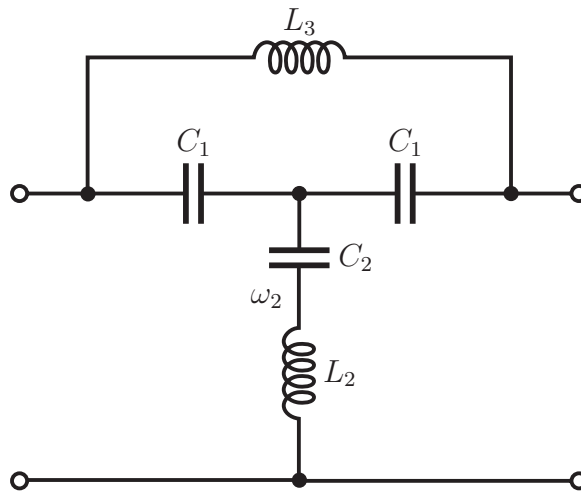


Bild 5.19: Alternative Realisierung des Elementarallpasses 2. Grades

Die Schaltung nach Bild 5.18 setzt voraus, dass die Spulen L_1 fest gekoppelt sind ($k = 1$). Die Realisierbarkeit dieser Schaltung unterliegt keiner Einschränkung hinsichtlich der Polstellenlage der Übertragungsfunktion. Die Elemente ergeben sich zu

$$L_1 = \frac{\alpha}{\gamma^2}, \quad L_2 = \frac{1}{4\alpha}, \quad L_g = 4L_1, \quad C_2 = \frac{4\alpha}{\gamma^2} \quad \text{und} \quad C_3 = \frac{1}{4\alpha}.$$

Die Resonanzfrequenz ist

$$\omega_2 = \gamma.$$

5.3 Technisch sinnvolle Gruppenlaufzeit-Approximation

5.3.1 Angaben für Gruppenlaufzeit-Approximation

Natürlich ist es nicht möglich durch eine nachgeschaltete Allpasskette einen exakt konstanten Gruppenlaufzeitverlauf über den gesamten Durchlassbereich des Tiefpasses zu realisieren. Die Gruppenlaufzeit des Gesamtsystems in Abhängigkeit von der Frequenz wird - bei endlichem Aufwand - immer gewisse Abweichungen von dem angestrebten konstanten Verlauf aufweisen. Eine Gruppenlaufzeitentzerrung stellt also eine Approximationsaufgabe dar, nämlich den geforderten konstanten Frequenzverlauf der Gruppenlaufzeit mit einer vorgegebenen Genauigkeit zu approximieren. In diesem Abschnitt sollen qualitative Angaben für eine technisch sinnvolle Gruppenlaufzeitentzerrung gemacht werden. Insbesondere geht es darum, allgemeine Gesichtspunkte für eine aufwandeinsparende Laufzeitentzerrung anzugeben. Die Approximation einer über den Durchlassbereich des Tiefpasses konstanten Gruppenlaufzeit kann mit einer verschiedenen Zahl nachgeschalteter Allpassglieder durchgeführt werden. Es ist leicht einzusehen, dass der Aufwand an Allpässen steigt, je besser die Konstanz der Laufzeit eingehalten werden soll. Bild 5.20 veranschaulicht, wie mit wachsendem Aufwand an nachgeschalteten Allpassgliedern vom Grad 2 der Summenlaufzeitverlauf der Gesamtschaltung, bestehend aus dem Tiefpass C 07 05 57 und einer Allpasskette verbessert wird.

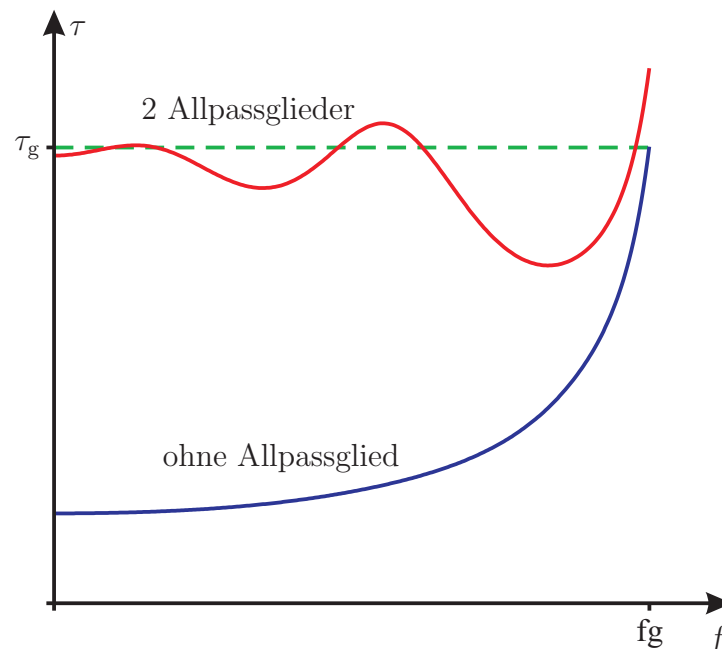


Bild 5.20: Gruppenlaufzeitentzerrung von C 07 05 57 mit 2 verschiedenem Allpassgliedern und konstanter Approximationsgrenze

Dabei ist die Nachbildung einer konstanten Gruppenlaufzeit nach der Methode der „kleinsten Fehlerquadrate“ verbessert worden. Je nach dem angewandten Aufwand steigt

die Gruppenlaufzeit weiter an. Es ist nur möglich die Gruppenlaufzeit aufzufüllen. Die entzerrte Laufzeit im Durchlassbereich schwankt dann um einen konstanten Wert. Ihr Verlauf ist cosinusförmig, und die Rippelperiode ist nahezu konstant. Diese Art der Approximation einer konstanten Laufzeit benötigt immerhin einige nachgeschaltete Allpassglieder, damit ein annähernd konstanter Verlauf der Gruppenlaufzeit bis zur Grenzfrequenz des Tiefpasses erreicht werden kann. Der Aufwand lässt sich jedoch erheblich reduzieren, wenn man eine andere Art der Gruppenlaufzeitapproximation anwendet. Untersuchungen in [Welz62] und [Antr65] haben ergeben, dass monoton gegen die Grenzfrequenz eines Tiefpasses zunehmende Abweichungen der Gruppenlaufzeitschwankungen keinen wesentlichen Nachteil für das Einschwingverhalten des gesamten entzerrten Systems haben. Der prinzipielle Verlauf der entzerrten Laufzeit ist in Bild 5.21 dargestellt.

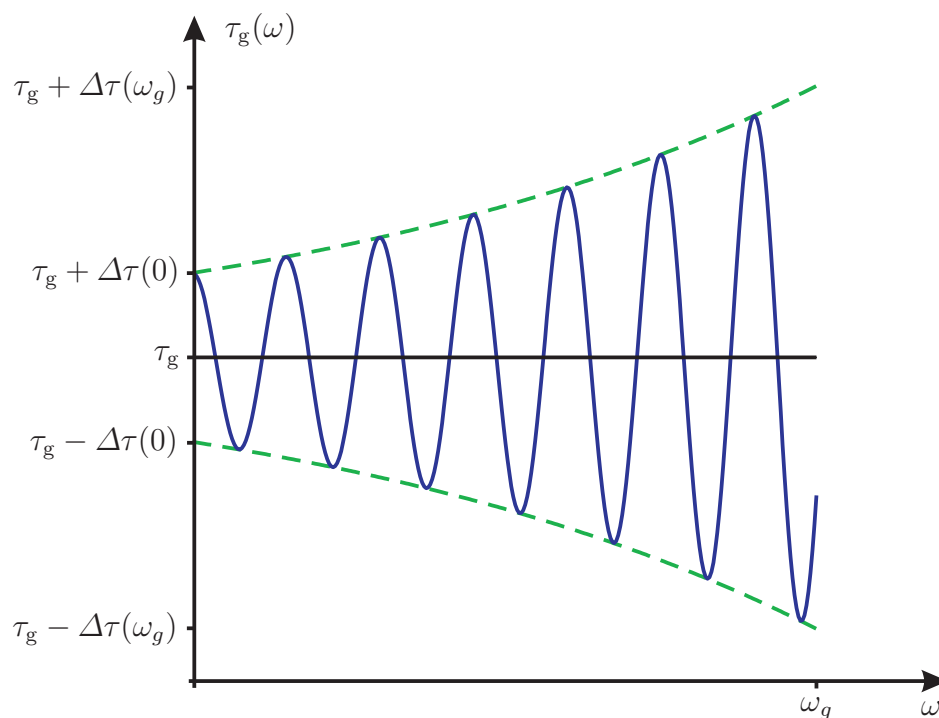


Bild 5.21: Zunehmende Abweichung der Gruppenlaufzeitschwankungen

Im Folgenden ist unter Laufzeitbegrenzungslinien der Verlauf der Verbindungslinien der Gruppenlaufzeitmaxima bzw. -minima über dem entzerrten Durchlassbereich des Tiefpasses zu verstehen, siehe gestrichelte Linie in Bild 5.21. Trotz der Zunahme der Rippelamplitude gegen die Entzerrungsgrenze wird das Einschwingverhalten verbessert. Zusammenfassend lassen sich folgende qualitative Aussagen für eine technisch sinnvolle aufwandeinsparende Laufzeitentzerrung machen:

- Die entzerrte Laufzeit soll sich in einem möglichst großen Frequenzbereich, der sich möglichst bis zur Gruppenlaufzeit Spitze des Tiefpasses erstreckt, innerhalb der Laufzeitbegrenzungslinien bewegen.
- Um diese Forderung zu erfüllen, ist für wachsende Frequenzen eine symmetrische Zunahme der Rippelamplitude bezüglich einer Konstanten, die sich als Symmetrielinie der Laufzeitbegrenzungslinien ergibt, zulässig.

5.3.2 Gruppenlaufzeitentzerrung anhand von Laufzeitkarten

Die Gruppenlaufzeit des Tiefpasses C 07 05 57 soll im Durchlassbereich ohne großen Aufwand durch zwei Allpassglieder vom Grad $n = 2$ auf einen kosinusförmigen Verlauf mit zunehmender Rippelamplitude für wachsende Frequenzen entzerrt werden. Die Approximation einer solchen Gesamtgruppenlaufzeit erfolgt mithilfe von Laufzeitkarten. Laufzeitkarten sind Diagramme, in denen die normierte Gruppenlaufzeit elementarer Allpassglieder (hier Grad $n = 2$) für verschiedene Werte von α und γ als Parameter über der normierten Frequenz f aufgetragen ist. Anhand von Laufzeitkarten werden diejenigen Laufzeitkurven ermittelt, mit denen sich das Approximationsproblem (Einhalten der Laufzeitbegrenzungslinien) am Besten lösen lässt. Aus den Parametern dieser Kurven kann man dann die Elementwerte der Allpässe berechnen (s. Kap. 5.2.4). Die Approximation geht von der normierten Darstellung der Gruppenlaufzeit $\tau(f)$ des Tiefpasses und den Laufzeitbegrenzungslinien aus, innerhalb derer sich die entzerrte Laufzeit bewegen soll. (Angaben hierüber in [Antr65].) Die Maßstäbe sind dieselben wie in den Laufzeitkarten. Der konstante Wert τ_g , um den die entzerrte Laufzeit schwankt, wird zu

$$\tau_g = \tau(f_g) \quad (f_g = \text{Grenzfrequenz des Tiefpasses})$$

angenommen. Der eigentliche Approximationsvorgang wird zweckmässig in folgenden Schritten durchgeführt:

1. Im Bereich niedriger Frequenzen sind nur geringe Schwankungen der entzerrten Laufzeit zulässig. Die Gruppenlaufzeit des Tiefpasses $\tau(f)$ verläuft in diesem Bereich relativ konstant und nimmt für wachsende Frequenzen monoton zu. Daraus folgt für die Laufzeitkurve $\tau_1(f)$ des ersten Allpassgliedes, dass sie im Bereich niedriger Frequenzen möglichst konstant und für steigende Frequenzen monoton fallend verlaufen muss.
2. Nach Wahl der Laufzeitkurve $\tau_1(f)$ zeichnet man den Summenlaufzeitverlauf

$$\tau_{1,\text{ges}}(f) = \tau(f) + \tau_1(f),$$

was durch graphische Addition leicht möglich ist.

3. An die Stelle des Minimums von $\tau_{1,\text{ges}}(f)$ legt man das Maximum der Laufzeitkurve $\tau_2(f)$ des zweiten Allpassgliedes.
4. Man zeichnet den Gesamtlaufzeitverlauf

$$\tau_{2,\text{ges}}(f) = \tau(f) + \tau_1(f) + \tau_2(f)$$

von Tiefpass plus Allpasskette (graphische Addition).

Diese erste Näherungslösung kann noch verbessert werden, wenn man Laufzeitkarten mit Zwischenwerten von α und γ verwendet.

Hinweis:

Die optimalen Werte für α und γ lassen sich mithilfe der Fehlerausgleichsrechnung bestimmen. Die Durchführung einer Gruppenlaufzeit-Approximation auf der Grundlage der Methode der "kleinsten Fehlerquadrate" würde jedoch den Rahmen dieses Praktikums sprengen.

5.4 Vorbereitung

Vorbereitungsaufgabe 5.1:

Gegeben ist die Pol- und Nullstellenverteilung der Übertragungsfunktion $H(p)$ eines Elementarallpasses vom Grad $n = 1$ gemäß Bild 5.22.

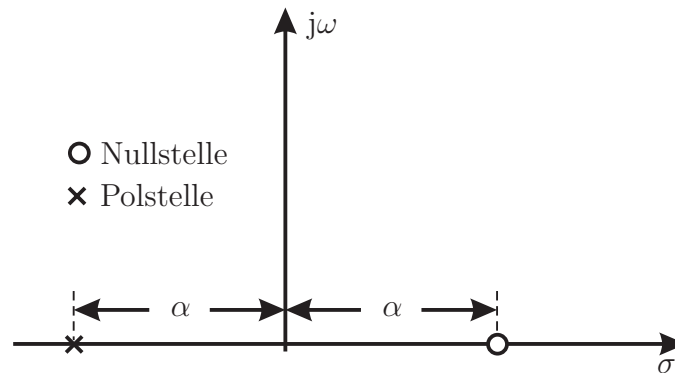


Bild 5.22: Pol-Nullstellenverteilung eines Elementarallpasses 1. Grades

1. Begründen Sie, warum es sich bei dieser Pol-Nullstellen-Konfiguration um einen Allpass handelt.
2. Für diesen Fall eines reellen Poles berechne man
 - a) die Übertragungsfunktion $H(p)$ mit $H(0) = 1$,
 - b) die Phase $B(\omega)$,
 - c) die Phasenlaufzeit $\vartheta(\omega)$ und
 - d) die Gruppenlaufzeit $\tau(\omega)$.
3. Der Verlauf der Gruppenlaufzeit $\tau(\omega)$ ist über ω zu skizzieren. Dazu bestimme man
 - a) das Maximum der Gruppenlaufzeit $\tau_{\max}$ und
 - b) $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \tau(\omega)$.

Vorbereitungsaufgabe 5.2:

Gegeben ist die Betriebsschaltung eines symmetrischen Zweitors mit den kanonischen Impedanzen Z_1 und Z_2 gemäß Bild 5.23.

1. Welche Beziehungen müssen zwischen Z_y , R_x , Z_1 und Z_2 bestehen, damit das Zweitor reflexionsfrei abgeschlossen ist?

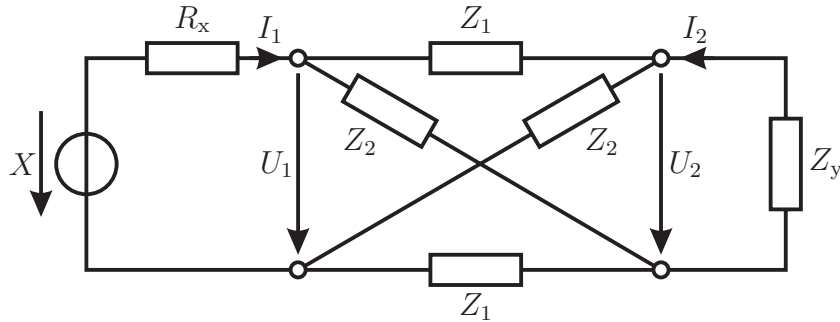


Bild 5.23: Betriebsschaltung einer Kreuzschaltung

Hinweis:

Verwenden Sie für die Reflektanzen S_{11} und S_{22} die Beziehungen

$$S_{11} = \frac{[Z_{11} - R_x][Z_{22} + Z_y] - Z_{12}Z_{21}}{[Z_{11} + R_x][Z_{22} + Z_y] - Z_{12}Z_{21}} \quad \text{und} \quad S_{22} = \frac{[Z_{11} + R_x][Z_{22} - Z_y] - Z_{12}Z_{21}}{[Z_{11} + R_x][Z_{22} + Z_y] - Z_{12}Z_{21}},$$

wobei Z_{ij} die Impedanzparameter des Zweitores sind.

2. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $H(j\omega) = U_2/U_1$. Welche Anforderungen resultieren für Z_1 und Z_2 , wenn die Bedingung $|H(j\omega)| = 1$ für alle ω gelten soll?

Hinweis:

Die gefundenen Beziehungen für Z_y , R_x , Z_1 und Z_2 gelten weiterhin.

3. Alle Widerstände werden nunmehr auf den Bezugswiderstand R_x und alle Frequenzen auf eine Bezugsfrequenz f_B normiert. Welche Bedingung ergibt sich nun für die normierten Impedanzen $z_1 = Z_1/R_x$ und $z_2 = Z_2/R_x$?

Hinweis:

$j\omega$ wird durch die komplexe Frequenz p ersetzt.

4. Es sei $g(p)$ ein reelles Polynom. Ferner gelte

$$H(p) = \frac{g(-p)}{g(p)}.$$

Somit ist

$$g_u(p) = \frac{1}{2} [g(p) - g(-p)] \quad \text{bzw.} \quad g_g(p) = \frac{1}{2} [g(p) + g(-p)]$$

der ungerade bzw. gerade Anteil von $g(p)$.

- Welche Voraussetzungen muss $g(p)$ erfüllen, damit $H(p)$ ein Allpass ist?
 - $H(p)$ sei nun die im Unterpunkt 2 bestimmte Übertragungsfunktion. Berechnen Sie z_1 und z_2 als Funktion von $g_u(p)$ und $g_g(p)$.
5. Berechnen Sie die Schaltelemente der Realisierung von z_1 und z_2 für einen Elementarallpass vom Grad $n = 2$ in Abhängigkeit von den Polstellenparametern α und γ .

Vorbereitungsaufgabe 5.3:

Gegeben sind die folgenden Polstellenparameter der Übertragungsfunktion $H(p)$ eines Elementarallpasses vom Grad $n = 2$:

$$\alpha = 0.235 \quad \text{und} \quad \gamma = 0.667.$$

Der Allpass soll durch die Schaltung nach Bild 5.19 realisiert werden. Alle Widerstände sind auf den Generatorinnenwiderstand $R_B = 600 \, \Omega$, alle Frequenzen auf die Grenzfrequenz des Tiefpasses $f_B = 10 \, \text{kHz}$ normiert.

1. Berechnen Sie c_1, c_2, l_2 und l_3 in Abhängigkeit von den Polstellenparametern α und γ .

Hinweis:

Verwenden Sie den Satz von BARTLETT.

2. Für welche α und γ bzw. für welche φ ist diese Schaltung realisierbar?
3. Berechnen Sie die Werte für C_1, C_2, L_2 und L_3 mit den obigen Werten für α und γ nach Aufhebung der Normierung.

Vorbereitungsaufgabe 5.4:

Bereiten Sie sich auf die folgenden Themenbereiche vor (nicht schriftlich), die Sie zu Beginn der Durchführung ihren Kommilitonen in Form eines Kurzreferates (3-5 Minuten) näherbringen sollen (Hilfsmittel Tafel). Die Themenvergabe erfolgt durch Auslosung.

- Ideale, verzerrungsfreie und reale Übertragung von Signalen, Interpretation der Phasenbedingungen.
- Definition und physikalische Bedeutung der Phasen- und Gruppenlaufzeit und die Anwendung auf verzerrungsfreie und reale Systeme.
- Definition/Verwendung eines Allpasses, Pol-/ Nullstellenverteilung, Übertragungsfunktion und Realisierung.
- Gruppenlaufzeiten von Allpässen 1. und 2. Ordnung.
- Grundprinzip einer technisch sinnvollen Gruppenlaufzeitentzerrung.

5.5 Messaufgaben

5.5.1 Messung der Phasen- und Gruppenlaufzeit

1. Messen Sie die Phasenlaufzeit $\vartheta_1(f)$ des Tiefpasses im Durchlassbereich. Berechnen Sie den Verlauf der Gruppenlaufzeit $\tau_1(f)$ und der normierten Gruppenlaufzeit $\tau_{1N}(f)$. Tragen Sie die gefundenen Werte in die Tabelle 5.1 ein. Zeichnen Sie das gefundene Ergebnis auf Millimeterpapier.

2. Messen Sie die Phasenlaufzeit $\vartheta_2(f)$ der entzerrten Schaltung im Durchlassbereich. Berechnen Sie den Verlauf der Gruppenlaufzeit $\tau_2(f)$ und der normierten Gruppenlaufzeit $\tau_{2N}(f)$. Tragen Sie die gefundenen Werte in die Tabelle 5.2 ein. Zeichnen Sie das gefundene Ergebnis auf Millimeterpapier.

5.5.2 Messung der Verzögerungs- und Anstiegszeit

Messen Sie die Sprungantwort des Tiefpasses mit und ohne Entzerrung. Vergleichen Sie die Verzögerungs- und die Anstiegszeit sowie das relative Überschwingen bezüglich des Endwertes.

5.5.3 Hausaufgabe

Führen Sie anhand der in Abschnitt 5.3.2 gemachten Hinweise unter Zuhilfenahme des Bildes 5.24 sowie der Gleichung (5.25) eine Laufzeitentzerrung des Tiefpasses durch, so dass die vorgegebenen Laufzeitbegrenzungslinien nach Bild 5.25 möglichst gut eingehalten werden. Geben Sie die Polstellenparameter α und γ der entsprechenden Allpässe an. Zeichnen Sie das gefundene Ergebnis auf Millimeterpapier.

f in Hz	ϑ_1 in μs	$\Delta\vartheta_1$ in μs	$\overline{\vartheta}_1$ in μs	$\overline{f}$ in Hz	τ_1 in μs	τ_{1N}
1000						
				1500		
2000						
				2500		
3000						
				3500		
4000						
				4500		
5000						
				5500		
6000						
				6250		
6500						
				6750		
7000						
				7250		
7500						
				7750		
8000						
				8250		
8500						
				8750		
9000						
				9125		
9250						
				9375		
9500						
				9625		
9750						
				9875		
10000						
				10125		
10250						

Tabelle 5.1: Messung der Laufzeit ohne Entzerrung

f in Hz	ϑ_2 in μs	$\Delta\vartheta_2$ in μs	$\overline{\vartheta_2}$ in μs	$\overline{f}$ in Hz	τ_2 in μs	τ_{2N}
1000						
				1500		
2000						
				2500		
3000						
				3500		
4000						
				4500		
5000						
				5500		
6000						
				6250		
6500						
				6750		
7000						
				7250		
7500						
				7750		
8000						
				8250		
8500						
				8750		
9000						
				9125		
9250						
				9375		
9500						
				9625		
9750						
				9875		
10000						
				10125		
10250						

Tabelle 5.2: Messung der Laufzeit mit Entzerrung

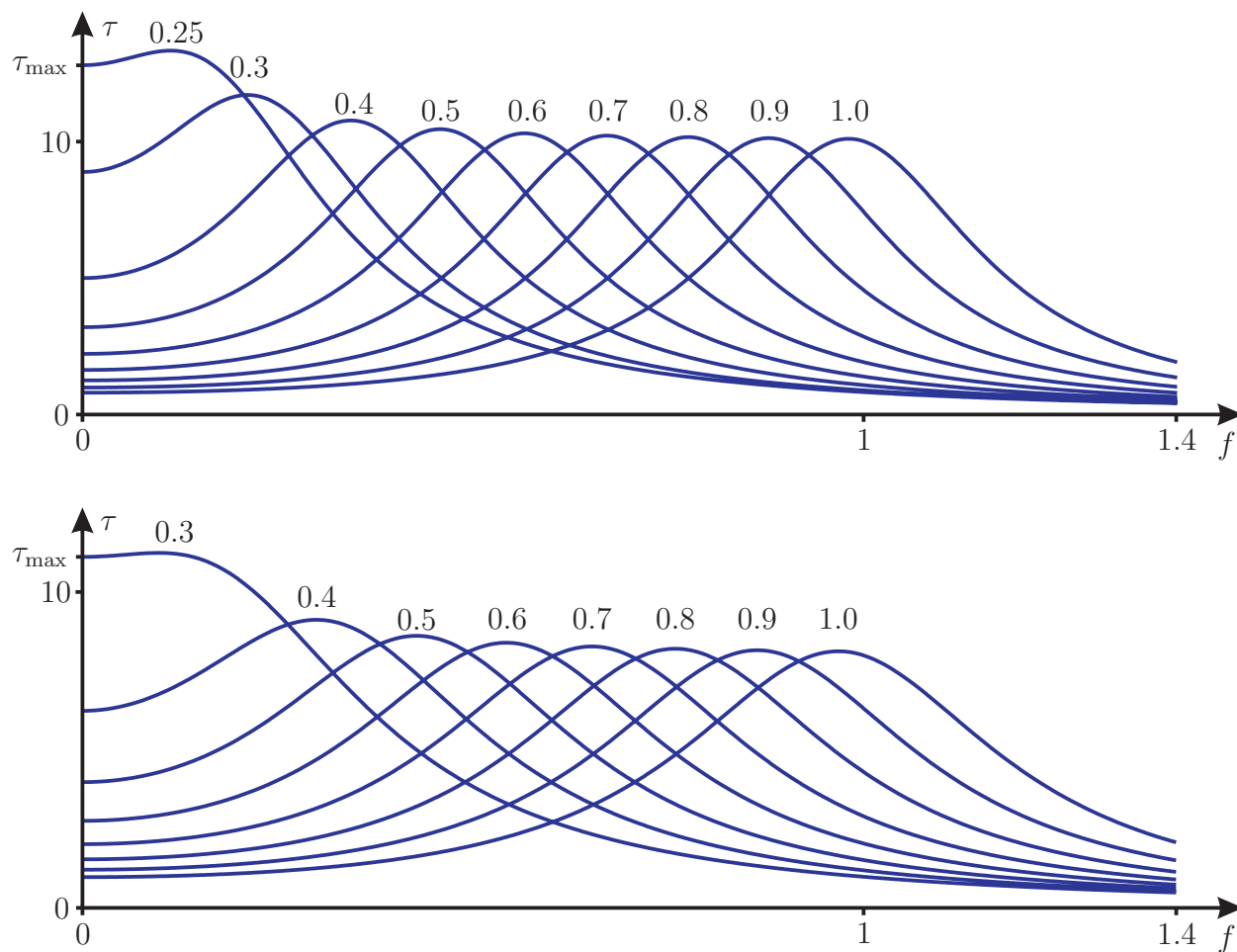


Bild 5.24: Darstellung der normierten Gruppenlaufzeit der Allpassglieder in Abhängigkeit vom Parameter γ für $\alpha = 0.2$ (oben) und $\alpha = 0.25$ (unten).

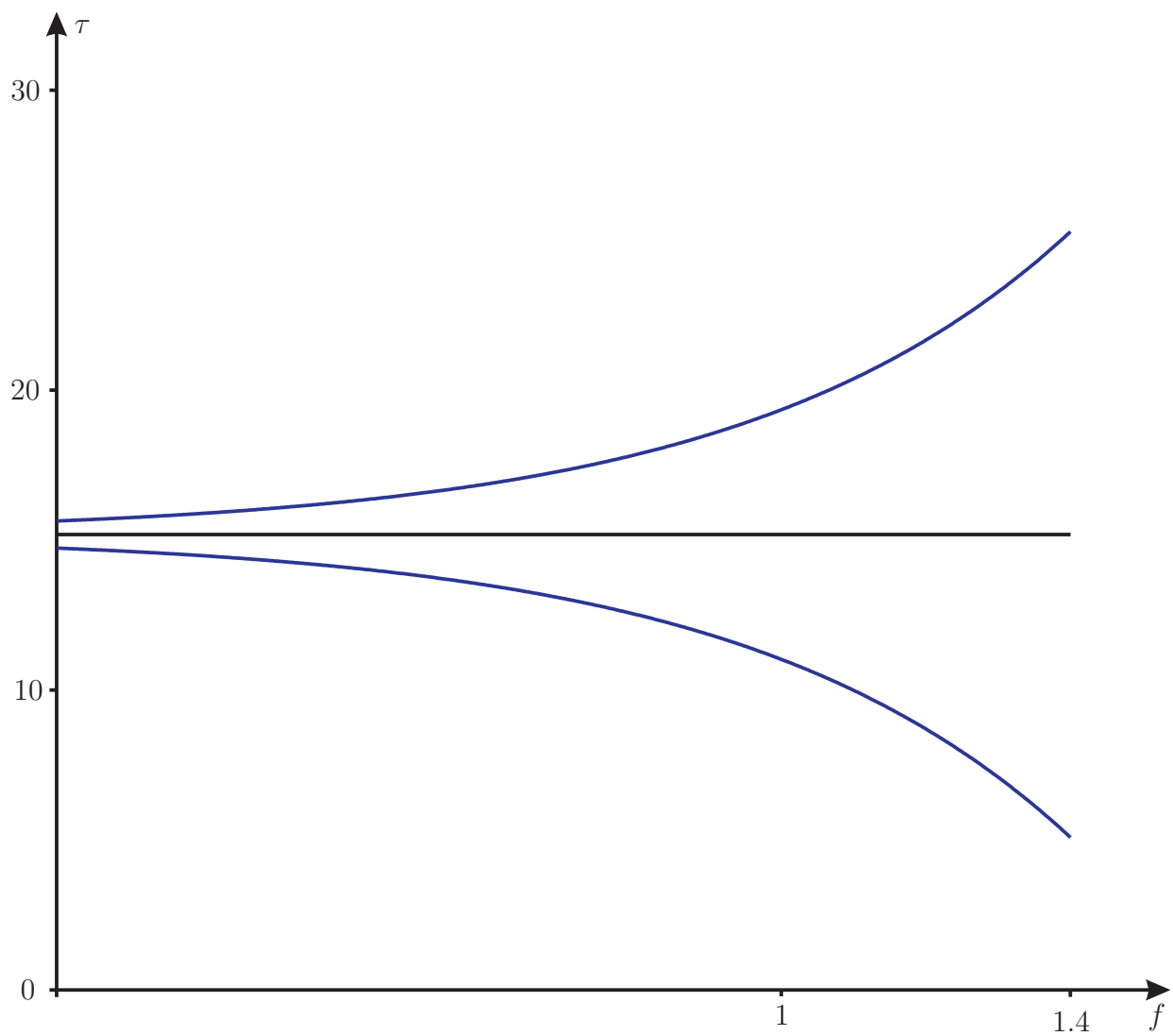


Bild 5.25: Laufzeitbegrenzungslinien der normierten Gruppenlaufzeit $\tau_g = 15.2 \pm 0.45 \exp(2.22 f)$ als Funktion der normierten Frequenz f