

## **5. Laplacetransformation**

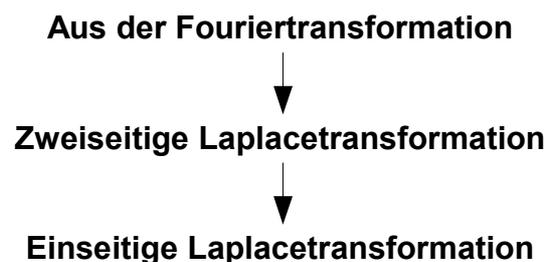
### **5.1 Übersicht Laplacetransformation**

**Die Laplacetransformation ist eine Verallgemeinerung der Fouriertransformation.**

#### **Vorteile:**

- Es können auch Transformierte für Signale angegeben werden, für die keine Fouriertransformierte existiert.
- Es ist eine grafische Darstellung der Transformaten möglich, die eine erweiterte und einfache Einsicht in Signale und Systeme ermöglicht.

#### **Vorgehensweise:**



#### **Anwendungen der Laplacetransformation:**

- Lösen von Differenzialgleichungen
- Untersuchung der Stabilität von Systemen und der Veranschaulichung derselben
- Untersuchung von minimalphasigen Systemen, Allpass, und dem idealen Tiefpass
- Reale Filter ( Tiefpass, Hochpass, Bandpass, Bandsperre )

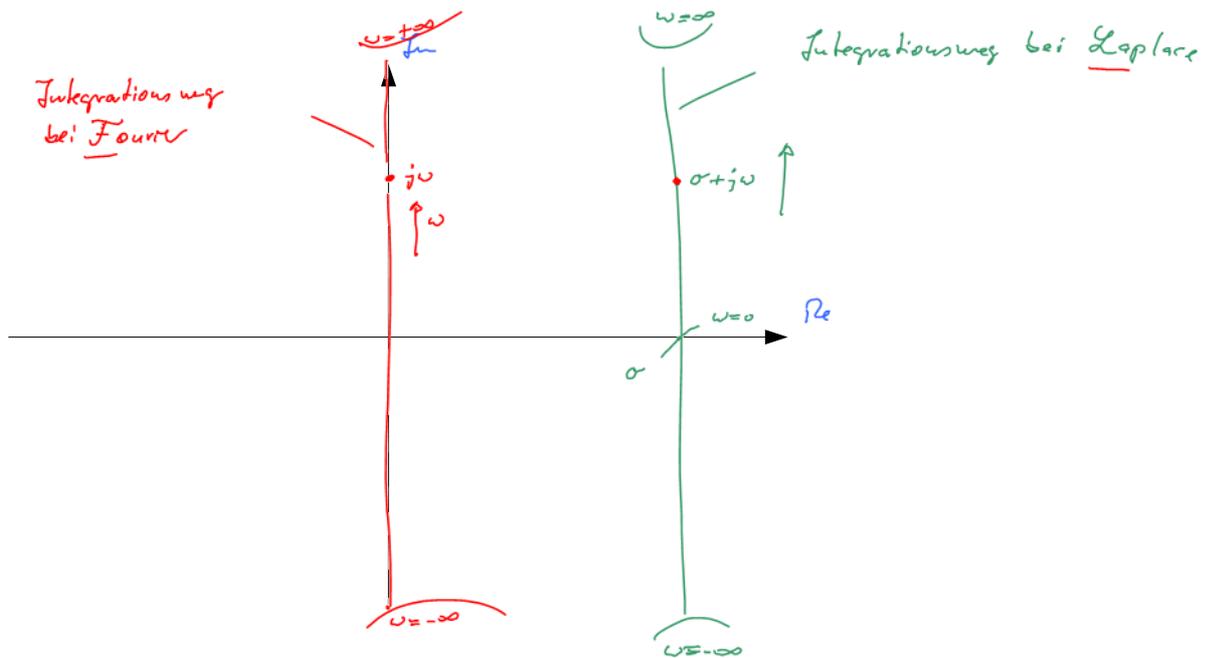
## 5.2 Einführung

Die Fourier- bzw. Fourierrücktransformation wird in der komplexen Ebene nur auf der imaginären Achse durchgeführt.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

}  $\mathcal{F} - \mathcal{F}^{-1}$



läßt man den Integrationsweg auch außerhalb der imaginären Achse zu, so erhält man die zweiseitige Laplacetransformation.

$$j\omega \Rightarrow (\sigma + j\omega) = s$$

↖  
Erweiterung  
Verallgemeinerung

Damit ergibt sich die Laplace- bzw. Laplacerücktransformation zu:

$$\begin{array}{|l} X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt \quad (1) \\ \hline X(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) \cdot e^{s \cdot t} \cdot ds \quad (2) \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} \\ \\ X(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} \end{array}$$

bilaterale Laplacetransformation  
(zweiseitig)

Die Laplace-Tr. ist eine Verallgemeinerung der Fouriertr.

Anwendung der zweiseitigen L-Transformation:

Lösung von Differenzialgleichungen, bei denen die Fouriertransformation keine Lösung mehr liefert.

Zusammenhang von  $X(s)$  mit der Fouriertransformierten  $X(\omega)$  einer Zeitfunktion  $x(t)$ :

$$X(s) \Big|_{s=j\omega} = X(\omega)$$

$$X(\omega) = X(s) \Big|_{j\omega=s}$$

Zur Normierung in der Laplacetransformation:

$$s = j\omega = j \cdot 2\pi f$$

*natürlicher  
L-Operator*

$$[f] = \text{Hz} = \frac{1}{\text{sec}} \quad [s] = \frac{1}{\text{sec}}$$

*normierter L-Operator*

$$p = \frac{s}{\omega_N} = \frac{j\omega}{\omega_N} = j \cdot \omega = j \cdot \frac{2\pi f}{2\pi f_N}$$

Normiert:

Die Laplacetransformation ergibt sich aus der Fouriertransformation durch Verallgemeinerung von  $j\omega$  auf  $s$ , wobei  $s = \sigma + j\omega$  ist.

Das Laplacetransformationspaar ist somit:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt$$

*z.B. Volt = V*

*1/sec*

*sec*

*sec*

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) \cdot e^{st} ds$$

*1/sec*

Dieses Laplacetransformationspaar ist mit dimensionsbehafteten Größen aufgebaut:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt \quad x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) \cdot e^{st} ds$$

# Signale und Systeme: Die Laplacetransformation

Beispiel: Zusammenhang zwischen der Laplacetransformation und der Fouriertransformation

Fouriertransformierte von  $x(t) = e^{-at} \cdot s(t)$  :

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-at} \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = \dots = \frac{1}{j\omega + a} \quad \text{für } a > 0$$

(\*)  $\{ X(\omega) = \infty \quad \text{für } a < 0 \}$

Laplacetransformierte von  $x(t) = e^{-at} \cdot s(t)$  :

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+\sigma+j\omega)t} dt = \frac{1}{j\omega + \sigma + a} \quad \text{für } (\sigma+a) > 0$$

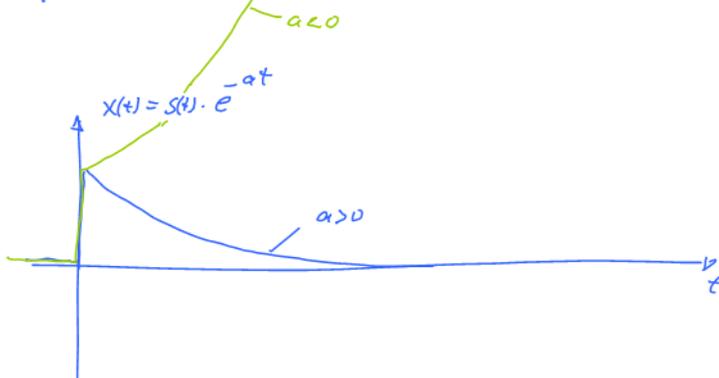
(\*\*)  
aus dem Vergleich von (\*) mit (\*\*).

mit  
( $s = \sigma + j\omega$ )

$$\Rightarrow X(s) = \frac{1}{s+a} \quad \text{für } (\sigma+a) > 0 \text{ oder } \sigma > -a$$

$$\left| X(s) = \frac{1}{s+a} \quad \text{für } \overbrace{\text{Re}\{s\}}^{\sigma} > -a \right.$$

$X(s)$  ist unabhängig von  $a$  gültig  
(existiert auch für  $a < 0$ )



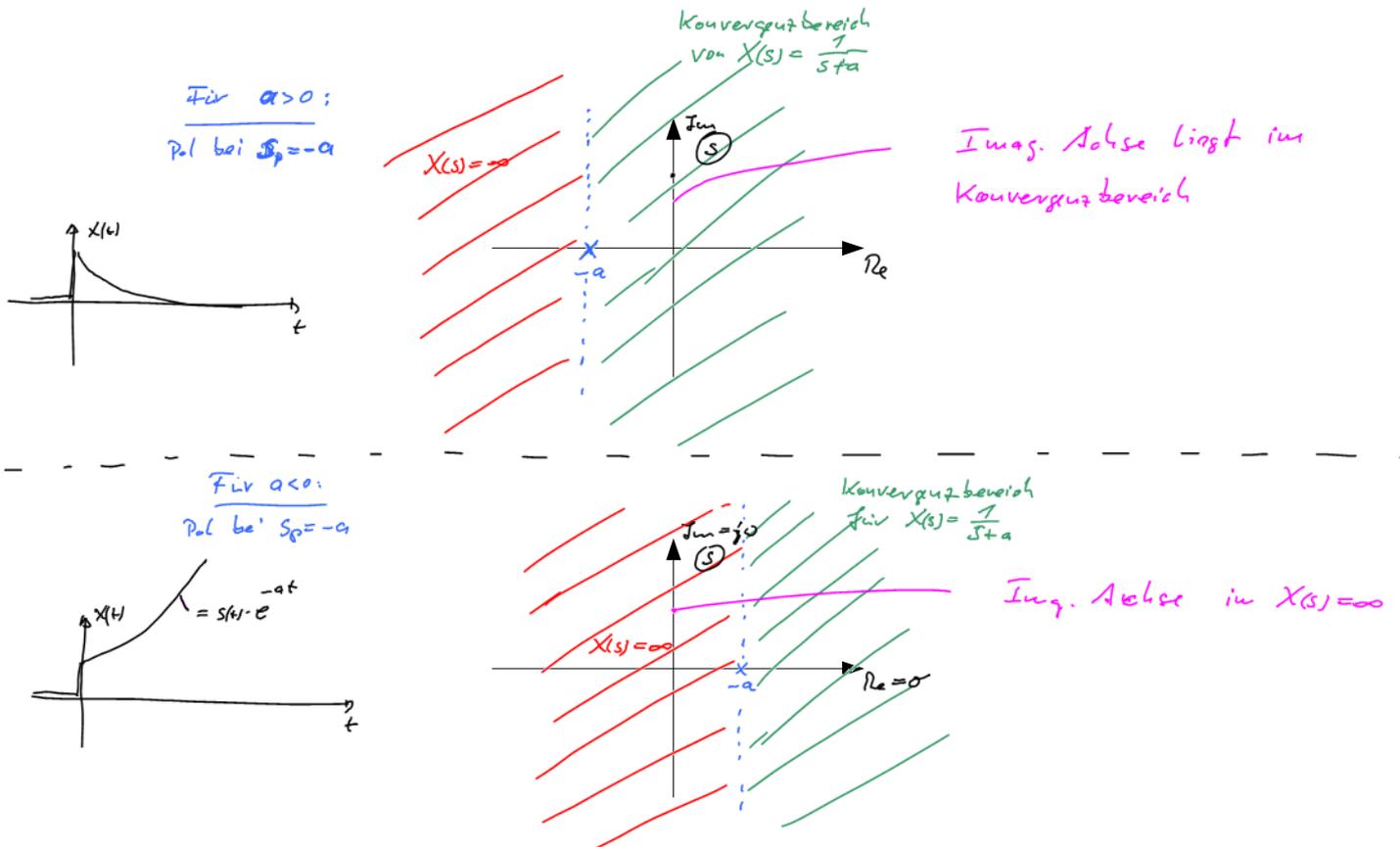
Signale und Systeme: Die Laplacetransformation

Aus dem vorangegangenen Beispiel ist ersichtlich, dass die Fouriertransformierte nur für  $a > 0$  existiert. Für  $a < 0$  wird das Fourierintegral unendlich.

Fourierintegrale konvergieren nicht für alle Signale!

Das Laplaceintegral konvergiert auch für  $a < 0$ , wenn nur  $\text{Re}\{s\} > -a$  ist.

$\text{Re}\{s\} > -a$  wird auch der Konvergenzbereich genannt.



Aus dem Konvergenzbereich ist ersichtlich, ob eine Fouriertransformierte eines Signals existiert:

Liegt die imaginäre Achse ( der Integrationsweg bei der Fouriertransformation ) im Konvergenzbereich, so existiert eine Fouriertransformierte, ansonsten nicht.

### **5.3 Die einseitige Laplacetransformation**

Nimmt man an, dass die Zeitfunktion immer rechtsseitig ist und bei  $t = 0$  beginnt, kann die sog. Einseitige Laplacetransformation angewendet werden.

Beispiel: Die Impulsantwort  $h(t)$  ist immer rechtsseitig.  
Jedes bel. Signal  $x(t)$  fängt irgendwann einmal an und dieser Anfang kann zu  $t = 0$  gewählt werden.

Damit ergeben sich die Transformationsgleichungen der einseitigen Laplacetransformation zu:

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt$$
$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) \cdot e^{st} ds$$

unilaterale L-Transformation

## 5.4 Eigenschaften der einseitigen Laplacetransformation

### 5.4.1 Linearität

$$\begin{array}{l} x_1(t) \quad \circ \bullet \quad X_1(s) \\ x_2(t) \quad \circ \bullet \quad X_2(s) \end{array}$$

$$\underline{a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t) \quad \circ \bullet \quad a \cdot X_1(s) + b \cdot X_2(s)}$$

### 5.4.2 Ähnlichkeitssatz

$$x(t) \quad \circ \bullet \quad X(s)$$

$$\underline{x(a \cdot t) \quad \circ \bullet \quad \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right)} \quad (a > 0)$$

### 5.4.3 Zeitverschiebung

$$s(t) \cdot x(t) \quad \circ \bullet \quad X(s)$$

$$\underline{s(t-t_0) \cdot x(t-t_0) \quad \circ \bullet \quad X(s) \cdot e^{-st_0}}$$

### 5.4.4 Dämpfungssatz

$$x(t) \quad \circ \bullet \quad X(s)$$

$$\underline{x(t) \cdot e^{-\alpha t} \quad \circ \bullet \quad X(s+\alpha)}$$

**5.4.5 Zeitdifferenziation**

$$x(t) \rightarrow X(s)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \text{ or } \rightarrow (s) \cdot X(s)$$

$$x(t) \text{ --- } \bullet \text{ --- } X(s)$$

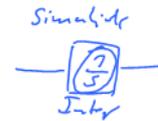
$$x'(t) \text{ --- } \bullet \text{ --- } s \cdot X(s) - x(0_+)$$

$$x''(t) \text{ --- } \bullet \text{ --- } s^2 \cdot X(s) - x(0_+) \cdot s - x'(0_+)$$

$$x'''(t) \text{ --- } \bullet \text{ --- } s^3 \cdot X(s) - x(0_+) \cdot s^2 - x'(0_+) \cdot s - x''(0_+)$$

USW.

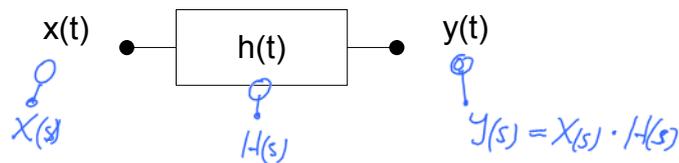
**5.4.6 Zeitintegration**



$$x(t) \text{ --- } \bullet \text{ --- } X(s)$$

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \text{ --- } \bullet \text{ --- } \frac{1}{s} \cdot X(s)$$

**5.4.7 Faltung im Zeitbereich**



$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau = x(t) * h(t)$$

$$Y(s) = X(s) \cdot H(s)$$

## 5.5 Die Korrespondenztabelle der Laplacetransformation

|   |    |  |                    |
|---|----|--|--------------------|
| $\delta(t)$   | ○● | 1  | $\forall s$        |
| $\delta(t-t_0)$   | ○● | $e^{-st_0}$                                      | $\forall s$        |
| $s(t)$  | ○● | $\frac{1}{s}$                                    | $\Re[s] > 0$       |
| $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \cdot s(t)$                     | ○● | $\frac{1}{s^n}$                                  | $\Re[s] > 0$       |
| $s(t) \cos(\omega_0 t)$                                 | ○● | $\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$                     | $\Re[s] > 0$       |
| $s(t) \sin(\omega_0 t)$                                 | ○● | $\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$              | $\Re[s] > 0$       |
| $s(t) \cdot e^{-\alpha t} \cdot \cos(\omega_0 t)$       | ○● | $\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2}$ | $\Re[s] > -\alpha$ |
| $s(t) \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega_0 t)$       | ○● | $\frac{\omega_0}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2}$   | $\Re[s] > -\alpha$ |
| <u><math>s(t) \cdot e^{-\alpha t}</math></u>            | ○● | <u><math>\frac{1}{s + \alpha}</math></u>         | $\Re[s] > -\alpha$ |
| $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \cdot s(t) \cdot e^{-\alpha t}$ | ○● | $\frac{1}{(s + \alpha)^n}$                       | $\Re[s] > -\alpha$ |

## 5.6 Die Laplacetransformation angewendet auf Systeme

### 5.6.1 Der Zusammenhang zwischen der Systemfunktion $H(s)$ und der Impulsantwort $h(t)$

Aus der Fouriertransformation ist bekannt, dass sich die Übertragungsfunktion für RLC-Schaltungen als eine sog. rationale Funktion (Quotient aus zwei Polynomen in  $(j\omega)$ ) darstellen lässt. Diese Polynome können in die Produktform überführt werden.

$$H(\omega) = \frac{b_M \cdot \prod_{k=1}^P (j\omega - \mu_k)(j\omega - \mu_k^*) \cdot \prod_{k=1}^{M-2P} (j\omega - \lambda_k)}{a_N \cdot \prod_{k=1}^Q (j\omega - \nu_k)(j\omega - \nu_k^*) \cdot \prod_{k=1}^{N-2Q} (j\omega - \epsilon_k)} \quad (1)$$

Ersetzt man in (1)  $(j\omega)$  durch  $s$ , so liegt die Systemfunktion  $H(s)$  als Laplacetransformierte der Impulsantwort  $h(t)$  vor:

$j\omega \rightarrow s$

$$H(s) = \frac{b_M \cdot \prod_{k=1}^P (s - \mu_k)(s - \mu_k^*) \cdot \prod_{k=1}^{M-2P} (s - \lambda_k)}{a_N \cdot \prod_{k=1}^Q (s - \nu_k)(s - \nu_k^*) \cdot \prod_{k=1}^{N-2Q} (s - \epsilon_k)} \quad (2)$$

Diese Systemfunktion kann nun in Partialbrüche zerlegt werden, wobei die Partialbruchzerlegung so vorgenommen werden kann, dass nur Systeme 1. Ordnung und 2. Ordnung vorliegen:

$$H(s) = \frac{A_1}{s - \epsilon_1} + \frac{A_2}{s - \epsilon_2} + \dots + \frac{B_1 \cdot s + C_1}{(s - \nu_1)(s - \nu_1^*)} + \frac{B_2 \cdot s + C_2}{(s - \nu_2)(s - \nu_2^*)} + \dots \quad (3)$$

Wobei die  $\epsilon_k$  reell und die  $\nu_k$  komplex sind.

Die einzelnen Terme von (3) können nun mit Hilfe der Laplacetransformationstabelle in den Zeitbereich transformiert werden. Die sich ergebende Impulsantwort  $h(t)$  setzt sich also additiv aus lauter Teilimpulsantworten zusammen:

$$h(t) = A_1 \cdot e^{\epsilon_1 t} \cdot s(t) + A_2 \cdot e^{\epsilon_2 t} \cdot s(t) + \dots + s(t) e^{\alpha_1 t} \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + s(t) e^{\alpha_2 t} \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \dots \quad (4)$$

mit  $\alpha_x = \Re[\nu_x]$  und  $\omega_x = \sqrt{|\nu_x|^2 - (\Re[\nu_x])^2} = \Im[\nu_x]$

### 5.6.2 Untersuchung der Stabilität von Systemen

Zur Untersuchung dieses Sachverhaltes wird das Ausgangssignal eines Systems für  $t \rightarrow \infty$  betrachtet.

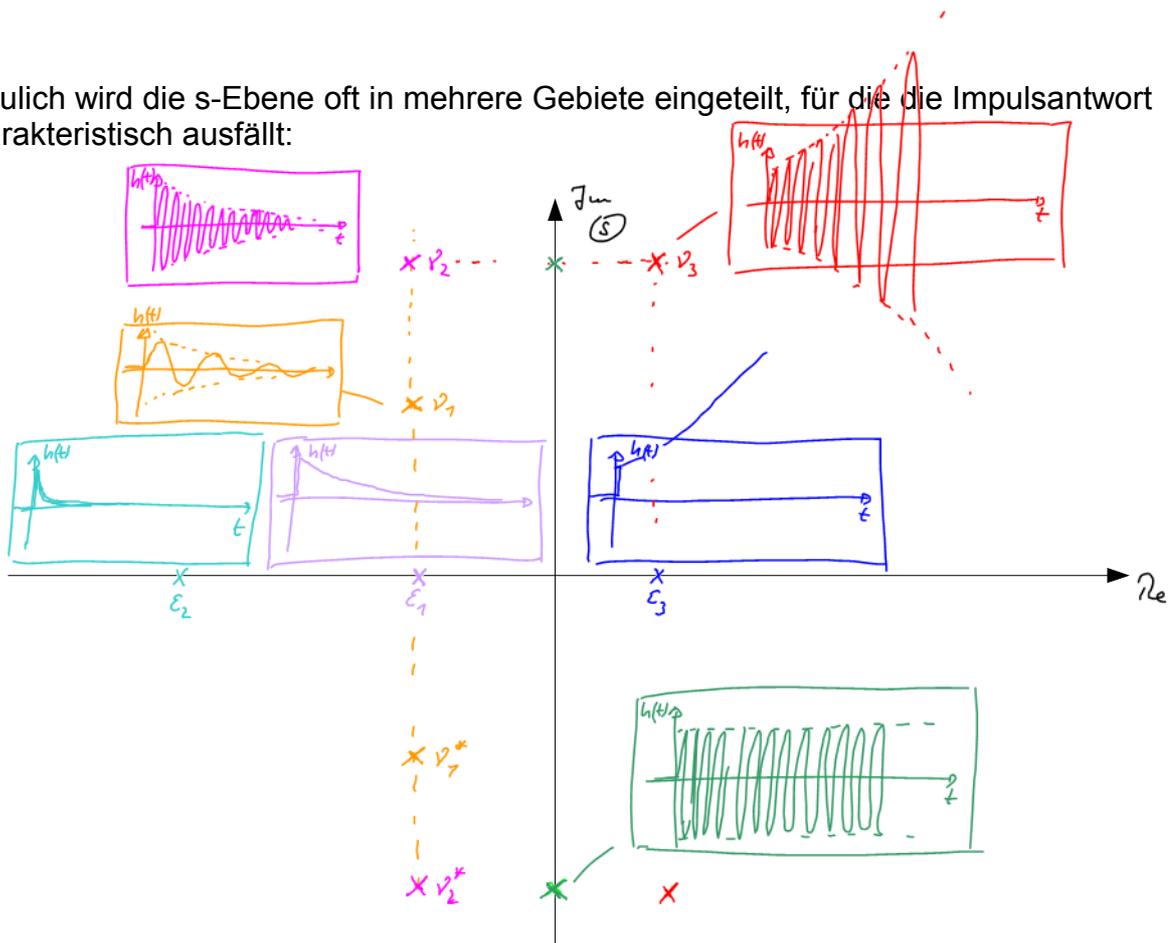
Lässt man in (4) die Zeit  $t$  gegen Unendlich gehen, so ergibt sich für die Impulsantwort  $h(t)$  nur dann ein endlicher Grenzwert, wenn alle  $\epsilon_x \leq 0$  sind und wenn alle  $\alpha_x = \Re[v_x] < 0$  sind.

Die  $\epsilon_k$  und die  $v_k$  sind aber die Pole der Systemfunktion. Die Lage der Pole kann also zur Beurteilung der Stabilität eines Systems herangezogen werden.

Es folgt daraus: // Für stabile Systeme müssen die Pole von  $H(s)$  in der linken  $s$ -Halbebene liegen.

(Liegen Pole von  $H(s)$  in der rechten  $s$ -Halbebene dann ist das System instabil.)

Anschaulich wird die  $s$ -Ebene oft in mehrere Gebiete eingeteilt, für die die Impulsantwort  $h(t)$  charakteristisch ausfällt:



## 5.7 Anwendungen und Beispiele

### 5.7.1 Lösen von Differenzialgleichungen mit Anfangsbedingungen

Siehe Mathematikvorlesung

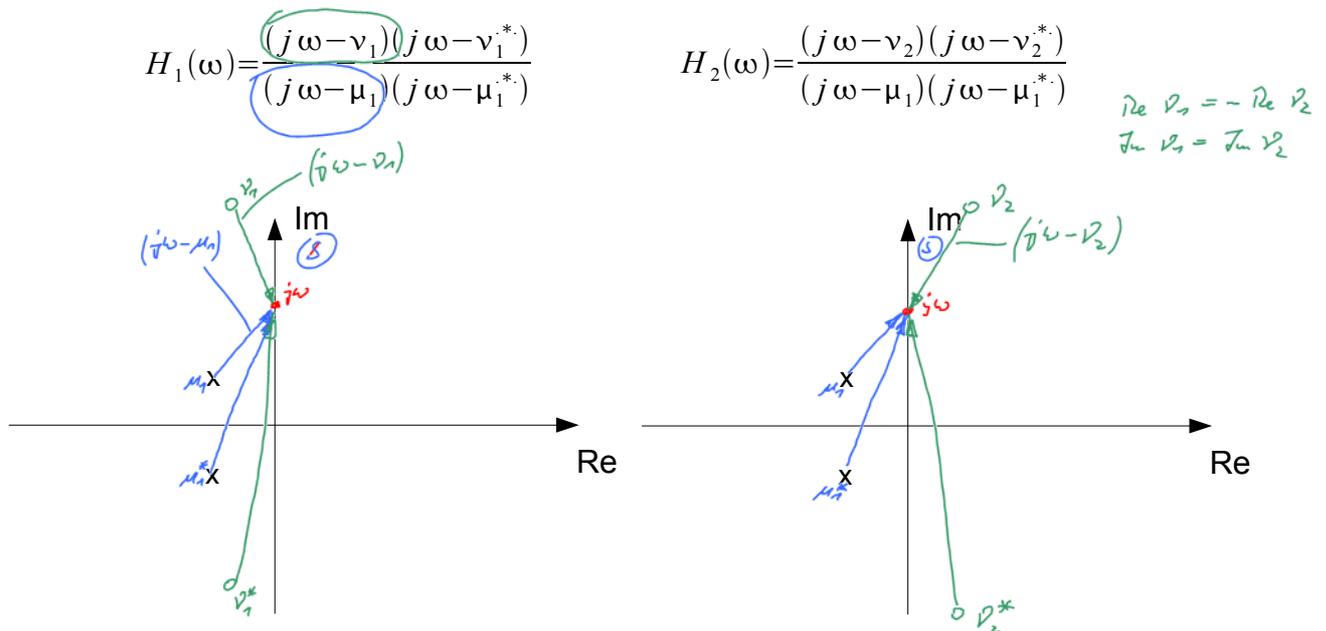
### 5.7.2 Minimalphasige Systeme

Durch die Lage der Pole und Nullstellen in der s-Ebene ist das Amplituden- und Phasenspektrum der Übertragungsfunktion eindeutig festgelegt. Aus dem Pol – Nullstellendiagramm können diese Funktionen qualitativ entnommen werden.

Pole können für ein kausales, stabiles LZI-System nur in der neg. s-Halbebene liegen. Nullstellen können aber in der pos. oder neg. s-Halbebene liegen.

Diese freie Wahl der Nullstellen soll im Folgenden an einem Beispiel untersucht werden.

Beispiel: Ein System 2. Ordnung mit einem komplexen Pol- und Nullstellenpaar

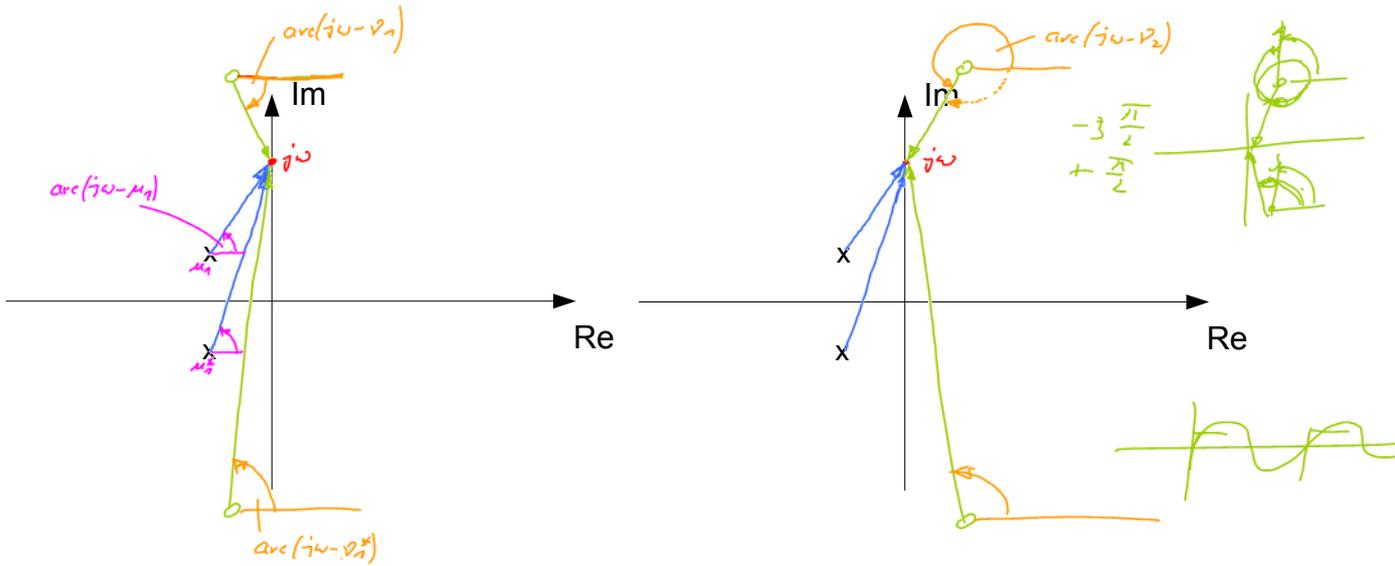


Es gilt:  $|j\omega - v_1| = |j\omega - v_2|$  u.  $|j\omega - v_2^*| = |j\omega - v_1^*|$

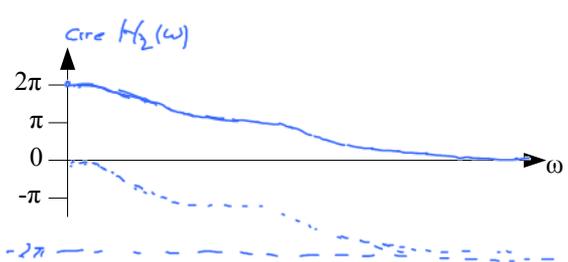
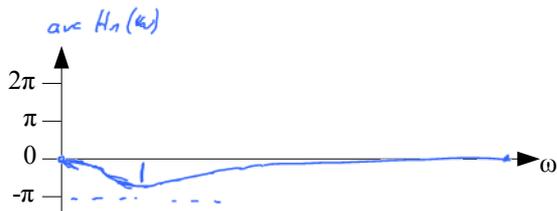
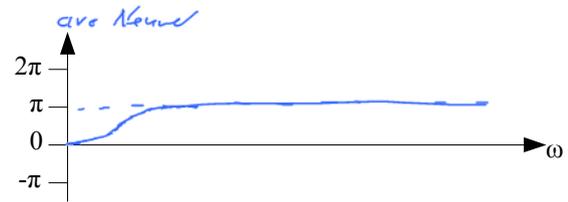
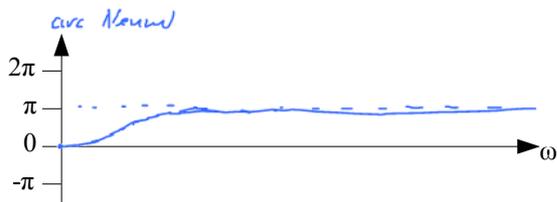
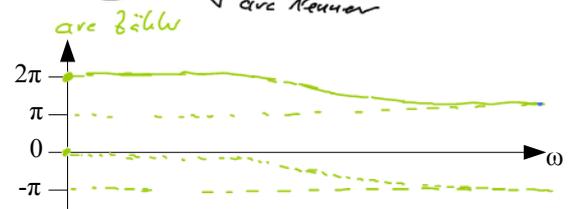
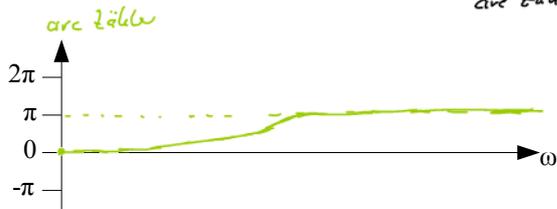
$\Rightarrow |H_1(\omega)| = |H_2(\omega)|$

Allgemein: Der Betrag einer Übertragungsfkt. (Betrag Frequenzgang) ändert sich nicht, wenn die NS an der Ordinate gespiegelt werden.

Untersuchung der Phase am Beispiel:



$$\text{arc}\{H_x(\omega)\} = \underbrace{\text{arc}(j\omega - p_x) + \text{arc}(j\omega - p_x^*)}_{\text{arc Zähler}} - \underbrace{(\text{arc}(j\omega - z_1) + \text{arc}(j\omega - z_1^*))}_{\text{arc Nenner}}$$



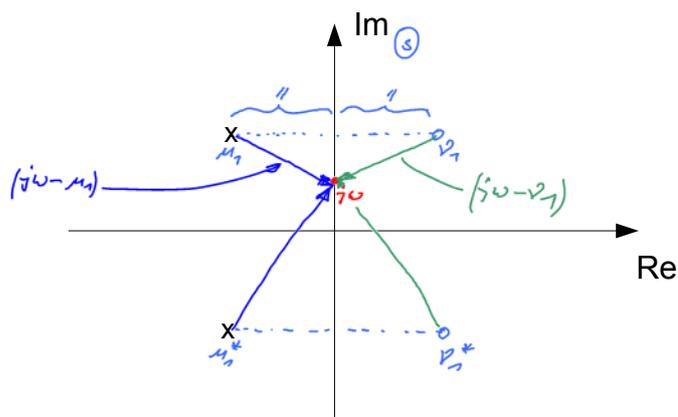
minimalphasiges System

Allgemein: || Liegen die NS eines Systems in der linken s-Halbebene ist das System minimalphasig.

### 5.7.3 Der Allpass

Liegen die Nullstellen zu den Polstellen achsensymmetrisch zur imaginären Achse, dann liegt ein sog. Allpass vor.

Beispiel: Pol-Nullstellendiagramm eines Allpasses mit 2 Polen:



$$\begin{aligned} \text{Im } \mu_1 &= \text{Im } \nu_1 \\ \text{Re } \mu_1 &= -\text{Re } \nu_1 \end{aligned}$$

$$(-\mu_1 = \nu_1^*)$$

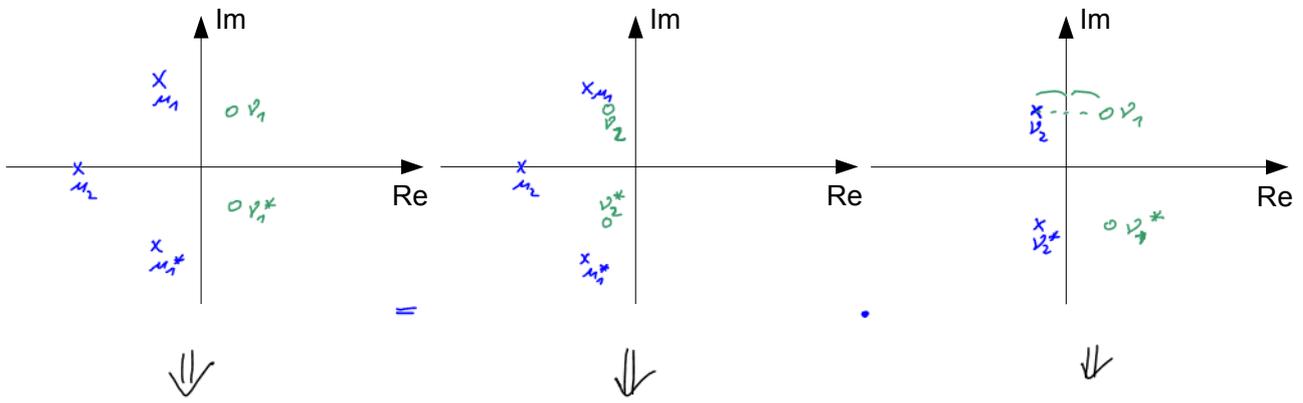
$$H(\omega) = \frac{(j\omega - \nu_1)(j\omega - \nu_2^*)}{(j\omega - \mu_1)(j\omega - \mu_2^*)} \cdot k$$

$|H(\omega)| = \text{konst.}$ , da  $|j\omega - \nu_1| = |j\omega - \mu_1|$  usw.

### 5.7.4 Ein beliebiges System

Behauptung: Jedes kausale stabile LZI-System kann in ein minimalphasiges System und einen Allpass zerlegt werden.

$$v_2 = -v_1^*$$



$$\frac{(s-v_1)(s-v_1^*)}{(s-\mu_1)(s-\mu_1^*) \cdot (s-\mu_2)} = \frac{\cancel{(s-v_2)(s-v_2^*)}}{(s-\mu_1)(s-\mu_1^*) \cdot (s-\mu_2)} \cdot \frac{(s-v_1)(s-v_1^*)}{\cancel{(s-v_2)(s-v_2^*)}}$$

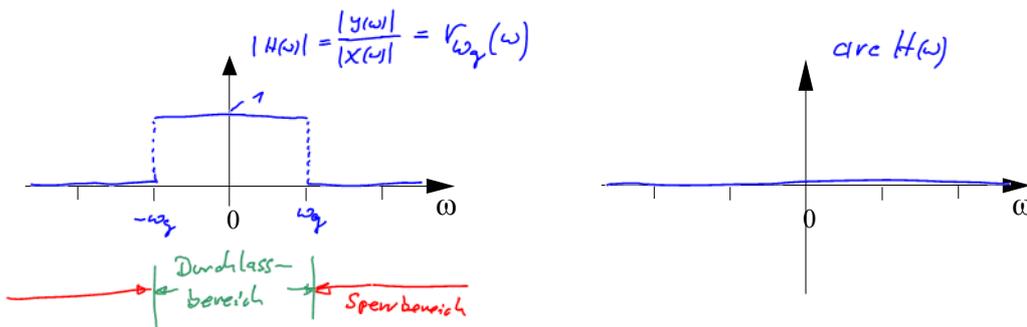
Pole u. N/S an der selben Stelle in der s-Ebene kürzen sich weg.

### 5.7.5 Der ideale Tiefpass (Küpfmüllerscher Tiefpass)

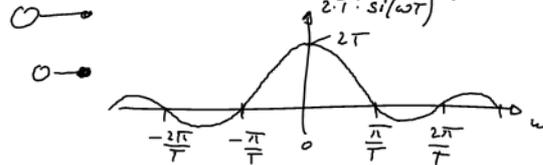
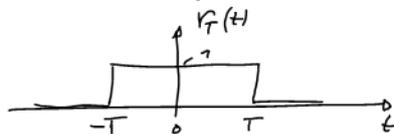
In der Nachrichtentechnik ist es von großem Interesse, den Amplituden- u. Phasengang eines Systems zu verändern. Dies kann mit Hilfe von LZI – Systemen erfolgen. Diese LZI – Systeme werden auch Filter genannt.

Das einfachste Filter ist der ideale Tiefpass, der in dieser Form nicht realisierbar ist, sich aber sehr gut eignet um die prinzipiellen Grundeigenschaften von Filtern zu untersuchen.

Es soll folgender Ansatz für ein ideales TP – Filter gemacht werden:



o Aus der Korrespondenztafel:



o Vertauschungssatz:

$$x(t) \quad \longleftrightarrow \quad X(\omega) = f(\omega)$$

$$f(t) \quad \longleftrightarrow \quad 2\pi \cdot x(-\omega)$$

$$\text{u. } T \Rightarrow \omega_g$$

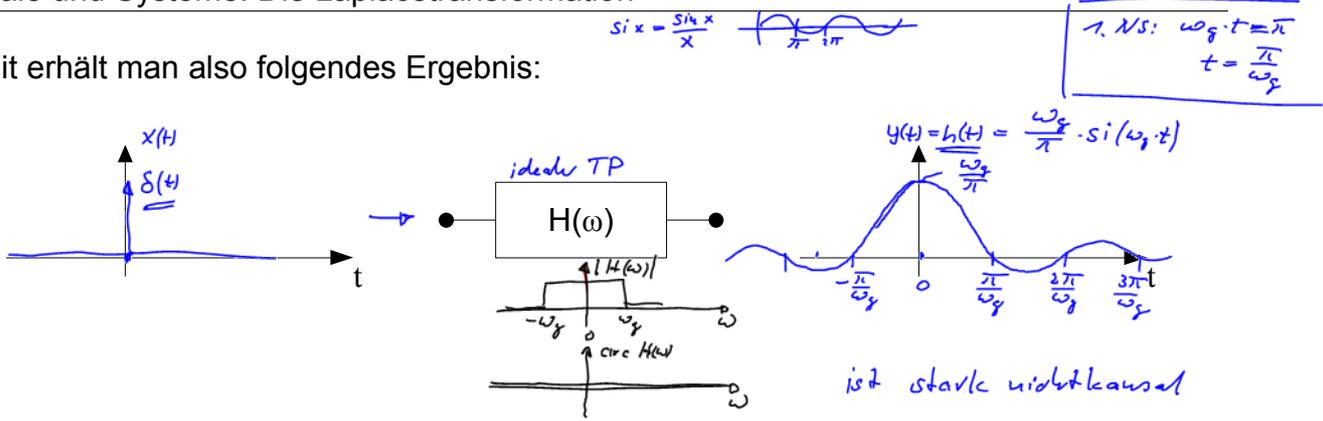
$$r_T(t) \quad \longleftrightarrow \quad 2T \cdot \text{si}(\omega T)$$

$$\frac{2 \cdot \omega_g \cdot \text{si}(t \cdot \omega_g)}{\pi} \quad \longleftrightarrow \quad \frac{2\pi \cdot r_{\omega_g}(-\omega)}{\pi} = 2 \cdot r_{\omega_g}(\omega)$$

$$H(\omega) = r_{\omega_g}(\omega) \quad \longleftrightarrow \quad h(t) = \frac{\omega_g}{\pi} \cdot \text{si}(\omega_g \cdot t)$$

Signale und Systeme: Die Laplacetransformation

Somit erhält man also folgendes Ergebnis:



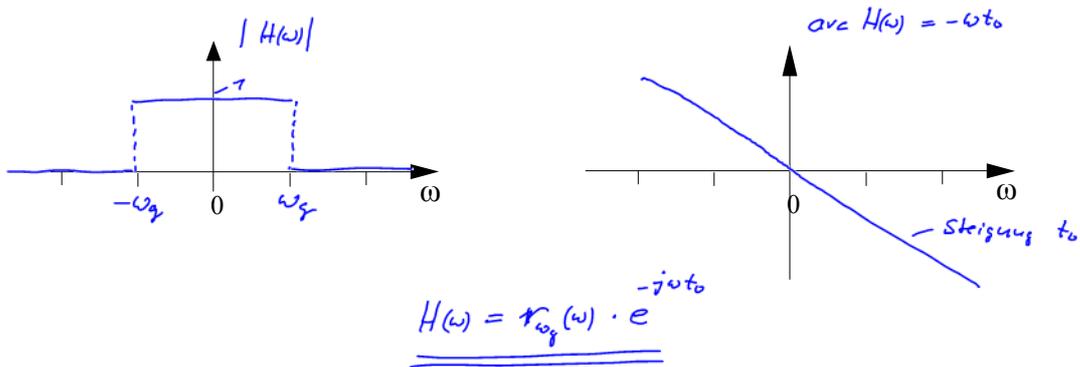
⇒ Das Modell des idealen TP muss noch verbessert werden.

Aus den Eigenschaften der Fourierreihe oder dem idealen Laufzeitglied

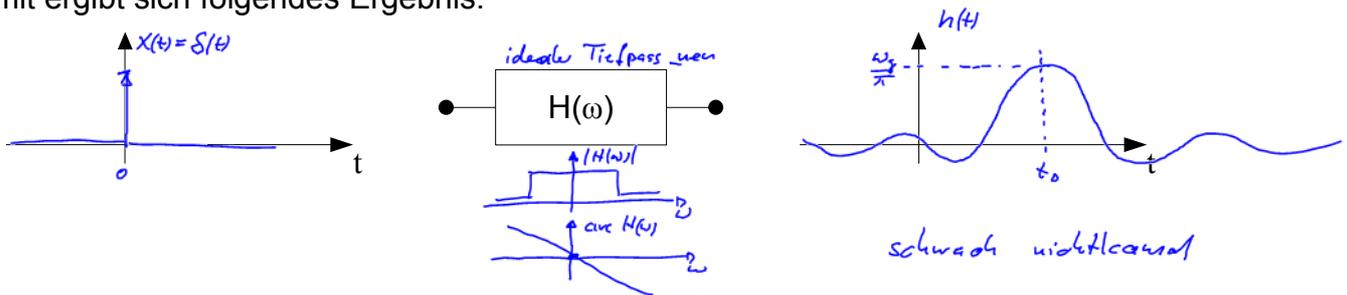
$$x(t) \leftrightarrow X(\omega)$$

$$x(t-t_0) \leftrightarrow X(\omega) \cdot e^{-j\omega t_0}$$

⇒ Neuer Ansatz:



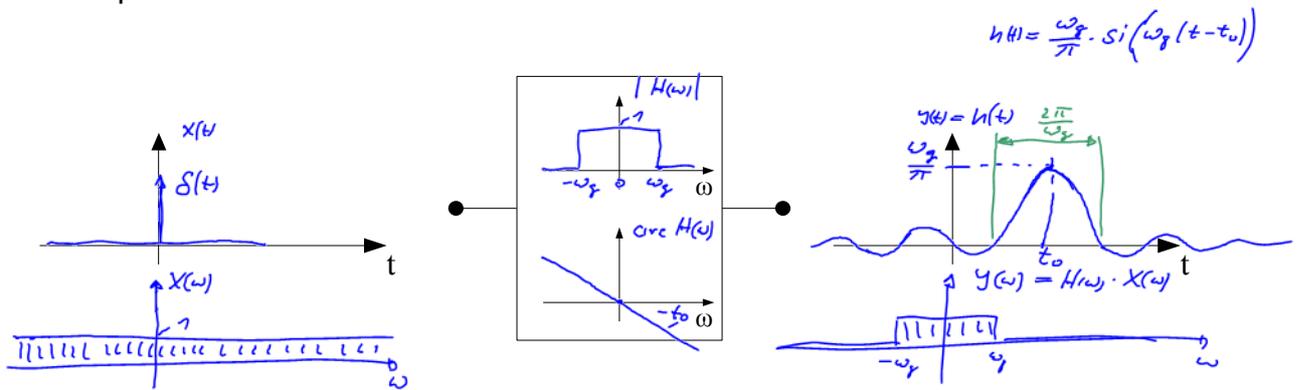
Damit ergibt sich folgendes Ergebnis:



Als Modell für einen idealen TP brauchbar

## Signale und Systeme: Die Laplacetransformation

Als nächstes soll die Frage untersucht werden, wie sich die Eigenschaften des Systems auf die Impulsantwort auswirken:



1)  $\omega_g$  größer  $\Rightarrow$   $h(t)$  wird höher und schmaler  
 im Grenzfall  $\omega_g \rightarrow \infty$  geht  $h(t)$  gegen den  $\delta$ -Impuls  
 $(h(t) = \delta(t-t_0))$

$\Rightarrow$  Allgemein: Die hohen Frequenzen in einem Signal sind für die schnellen Zeitsignalländerungen verantwortlich.

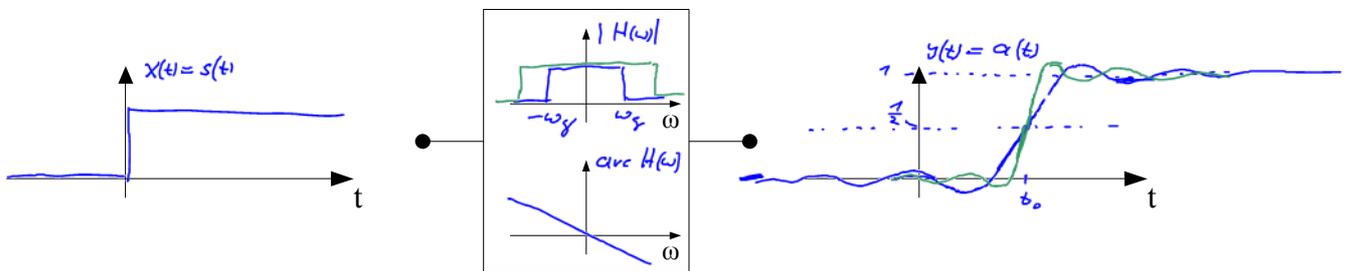
2)  $t_0$  größer  $\Rightarrow$  größere Steigung der Phase  $\Rightarrow$  Die Signalverzögerungszeit des idealen TP wird größer.

$\Rightarrow$  Allgemein: Die lineare Phase eines Systems bewirkt eine Verzögerung des Signals. Die Steigung der Phase ist identisch mit der Verzögerungszeit.

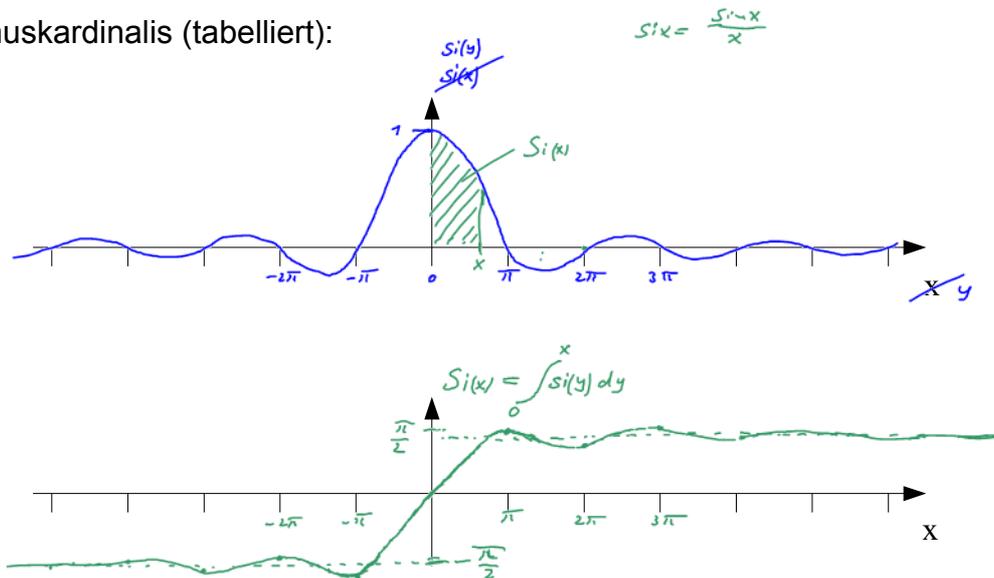
Ebenso kann untersucht werden, wie die Sprungantwort von den Eigenschaften des Systems abhängt:

$$\begin{aligned}
 a(t) &= \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau = \int_{\tau=-\infty}^{\tau=t} \frac{\omega_g}{\pi} \cdot \text{Si}(\omega_g(\tau-t_0)) d\tau \\
 &\quad \left[ \begin{array}{l} t' = \omega_g(\tau-t_0) \\ \frac{dt'}{d\tau} = \omega_g \end{array} \right. \\
 a(t) &= \frac{\omega_g}{\pi} \int_{t'=-\infty}^{t'=\omega_g(t-t_0)} \text{Si}(t') dt' = \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{\omega_g(t-t_0)} \text{Si}(t') dt' \\
 a(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \text{Si}(t') dt' + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_g(t-t_0)} \text{Si}(t') dt' = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \text{Si}(\omega_g(t-t_0))
 \end{aligned}$$

$\omega_g$  größer



Integralsinuskardinalis (tabelliert):



### 5.7.6 Der reale Tiefpass

In den bisher betrachteten Systemen hängen der Betrag und die Phase zusammen und können nicht unabhängig voneinander vorgegeben werden.

Im Allgemeinen wird in Filtern nur der Betrag und nicht die Phase vorgegeben.

Der Betragsverlauf seinerseits wird in der Filtertheorie häufig logarithmisch als sog. Dämpfung angegeben.

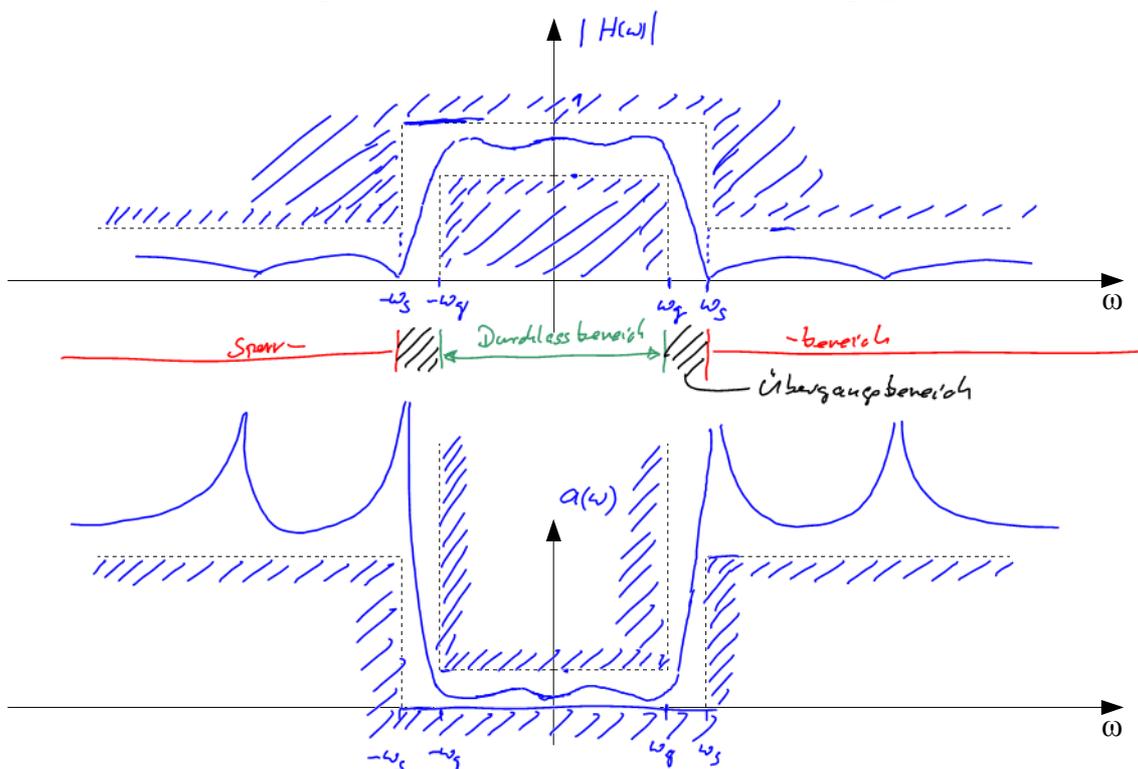
Betrag der Übertragungsfunktion:

$$|H(\omega)| = \left| \frac{y(\omega)}{X(\omega)} \right|$$

Dämpfung:

$$\underline{\underline{a = a(\omega) = 20 \cdot \lg \left| \frac{X(\omega)}{y(\omega)} \right| = -20 \lg \left| \frac{y(\omega)}{X(\omega)} \right| = \underline{\underline{-20 \cdot \lg |H(\omega)|}}}}$$

Mit den Bausteinen R,L,C lässt sich z.B. ein idealer Tiefpass oder auch ein anderes Filter das als Sollfunktion vorgegeben ist nicht realisieren, sondern nur annähern. In der Regel werden daher als Forderung eines Filters Toleranzschemata vorgegeben:



Je mehr Pole und Nullstellen in der Übertragungsfunktion vorliegen (größerer Aufwand der Schaltung), desto steiler können die Filterflanken im Übergangsbereich sein.

Die Aufgabe der Filtersynthese besteht darin, die Anzahl und Lage der Pole u. Nullstellen so zu bestimmen, dass die Filterkurve im Toleranzschema verläuft.

Am Fall des **Butterworthfilters** soll gezeigt werden, wie man ausgehend von einem Ansatz für den Betrag der Übertragungsfunktion zu den Pol-Nullstellenlagen kommt.

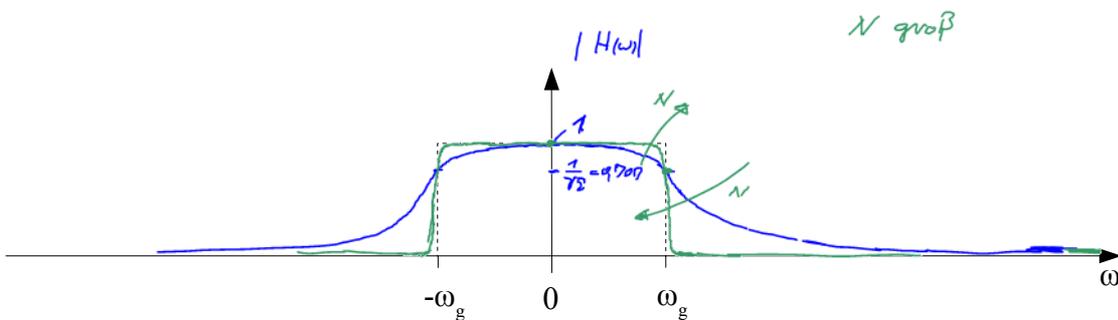
Ansatz: Der Betrag der Übertragungsfunktion sei durch folgende Funktion beschrieben:

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^{2N}}} \quad (1)$$

N – Ordnung des TP-Filters

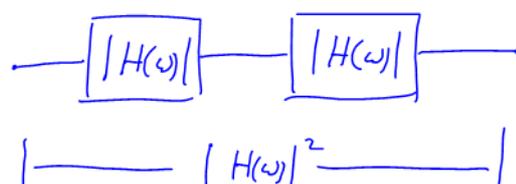
$\omega_g$  – 3dB – Grenzfrequenz (bei der  $|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ )

Veranschaulichung des Ansatzes:



Ziel:  $H(s)$  zu berechnen.  
Aus  $H(s)$  kann dann eine analoge Schaltung angegeben werden.

*|H(omega)| quadrieren, um die Wurzel wegzubekommen.  
Dies entspricht der Reihenschaltung zweier Systeme.*



$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^{2N}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{j\omega}{j\omega_g}\right)^{2N}}$$

mit  $|H(\omega)|^2 = H(j\omega) \cdot H^*(j\omega) = H(j\omega) \cdot H(-j\omega) = H(s) \cdot H(-s)$   
 $\swarrow$   
 $j\omega = s$

$$H(s) \cdot H(-s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j\omega_g}\right)^{2N}}$$

Pole von  $H(s) \cdot H(-s)$ :

Bedingung:  $1 + \left(\frac{s}{j\omega_g}\right)^{2N} = 0$

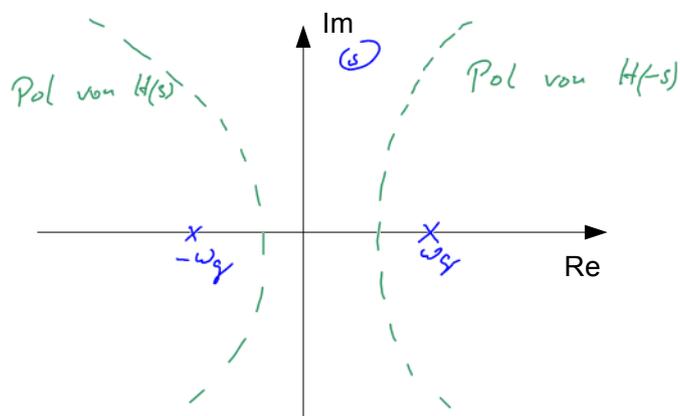
Für  $N=1$ :

$$1 + \left(\frac{s}{j\omega_g}\right)^2 = 0$$

$$1 + \frac{s^2}{-\omega_g^2} = 0$$

$$s^2 = +\omega_g^2$$

$$\underline{\underline{s_{1,2} = \pm \omega_g}}$$



$N=2:$

$$1 + \left(\frac{s}{j\omega_g}\right)^4 = 0$$

$$\left| \cdot (j\omega_g)^4 \right.$$

$$(j\omega_g)^4 + s^4 = 0$$

$$\omega_g^4 + s^4 = 0$$

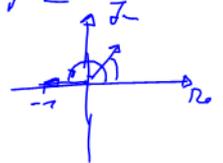
$$s^4 = -\omega_g^4$$

$$s_{1,2,3,4} = \omega_g \cdot \sqrt[4]{-1} = \omega_g \cdot (-1)^{\frac{1}{4}}$$

$$s_{1,2,3,4} = \omega_g \cdot e^{j\pi(2n+1)\frac{1}{4}}$$

$$\sqrt[2]{-1} = j$$

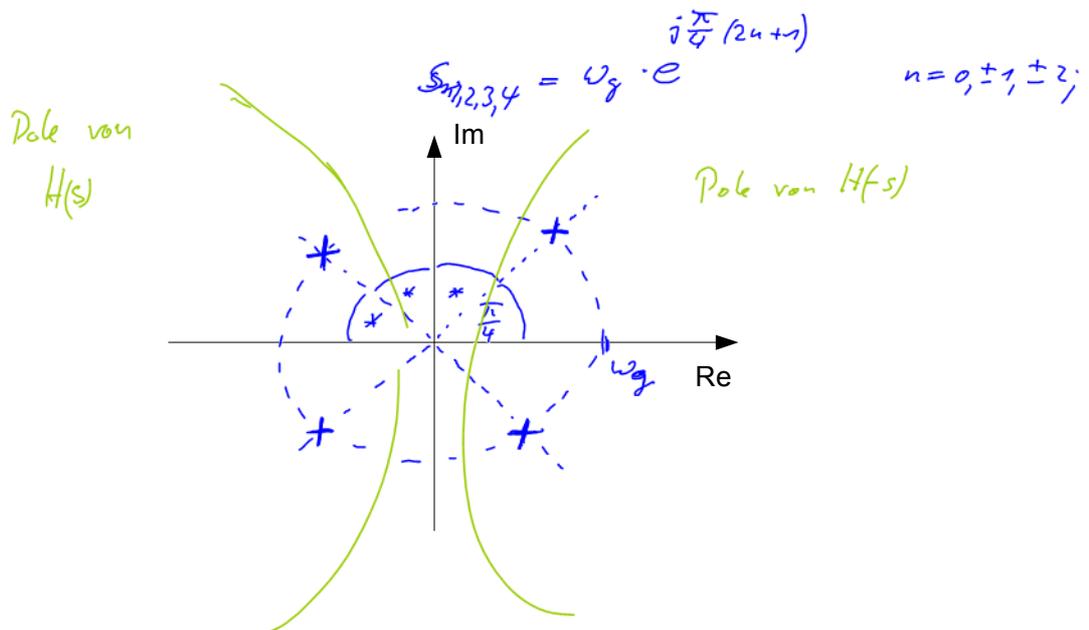
$$\sqrt[2]{-1} = -j$$

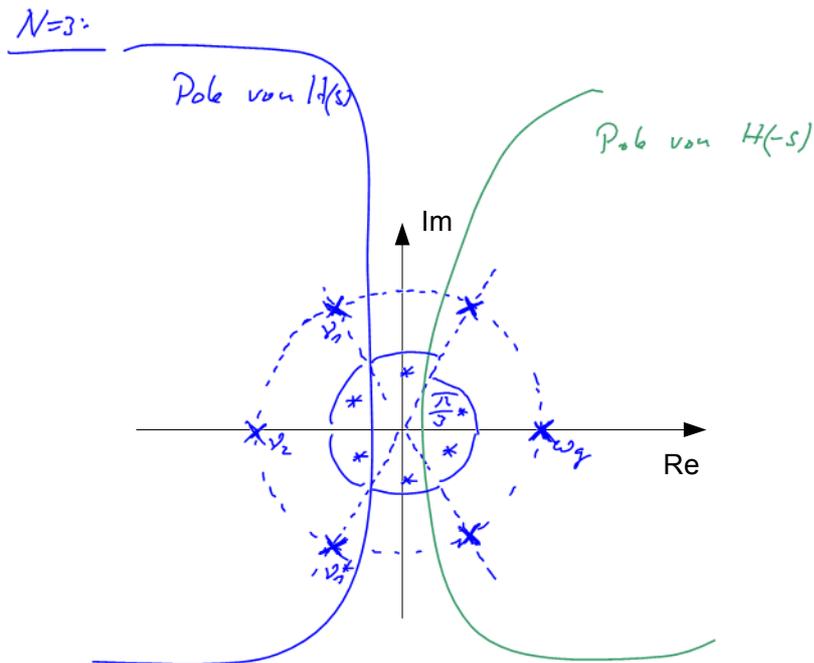


$$(-1) = e^{j\pi} = e^{j3\pi} = e^{j5\pi}$$

$$(-1) = e^{j\pi(2n+1)}$$

$n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$





Die Pole von  $H(+s) \cdot H(-s)$  liegen auf einem Kreis mit dem Radius  $\omega_g$ . Die Pole in der rechten  $s$ -Halbebene werden  $H(-s)$  zugeordnet; dadurch fallen sie in die linke  $s$ -Halbebene.

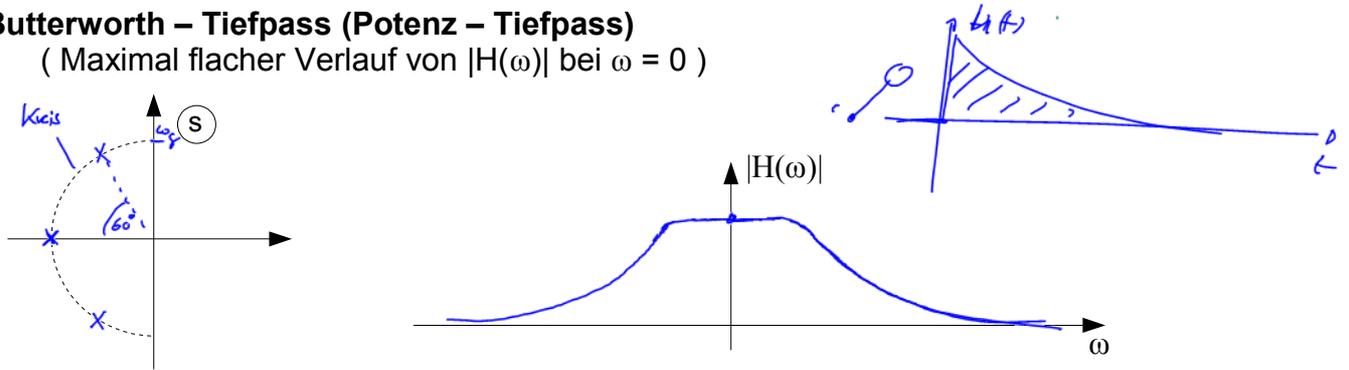
$$\Rightarrow H(s) = \frac{1}{(s-p_1)(s-p_1^*)(s-p_2)}$$

Dadurch kann eine Schaltung dimensioniert werden.

### 5.7.7 Charakteristische Lage von Polen u. Nullstellen für verschiedenen Filtertypen (Standardapproximationen)

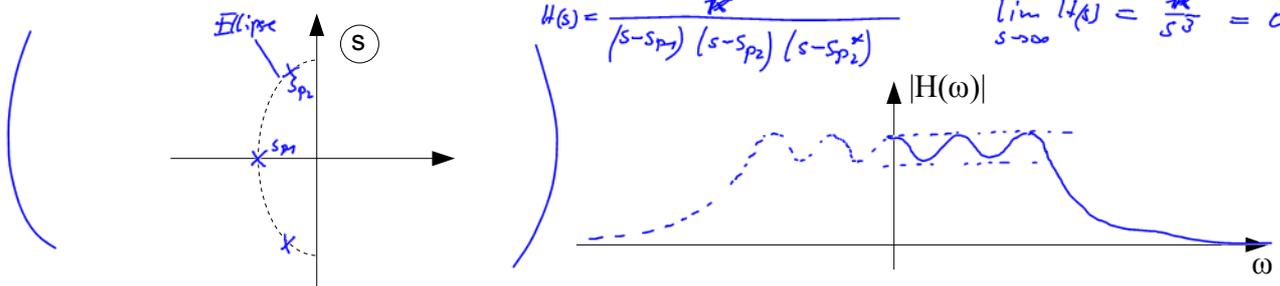
#### 5.7.7.1 Tiefpässe

**a) Butterworth – Tiefpass (Potenz – Tiefpass)**  
 (Maximal flacher Verlauf von  $|H(\omega)|$  bei  $\omega = 0$ )



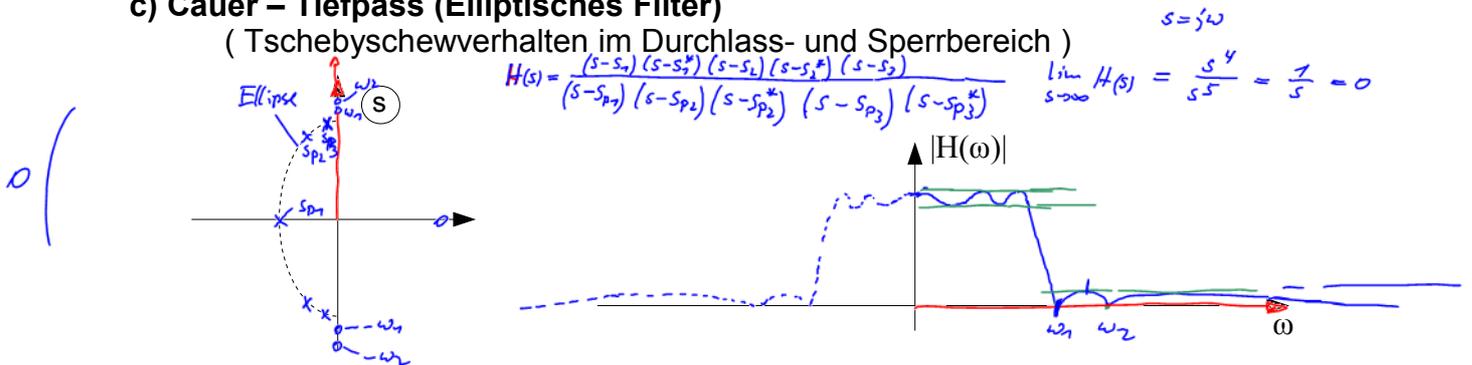
Die Pole liegen auf einem Kreis um den Ursprung. Die Nullstellen sind im Unendlichen.

**b) Tschebyschew – Tiefpass**  
 (Die maximalen Abweichungen von  $|H(\omega)|$  im Durchlassbereich sind konstant)



Die Pole liegen auf einer Ellipse. Die Nullstellen sind im Unendlichen.

**c) Cauer – Tiefpass (Elliptisches Filter)**  
 (Tschebyschewverhalten im Durchlass- und Sperrbereich)

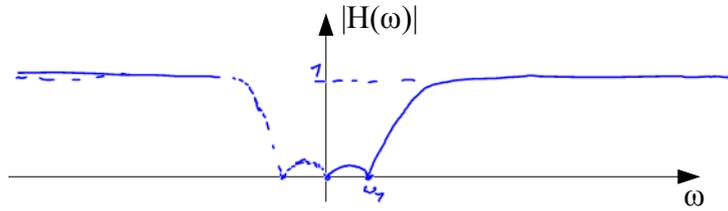
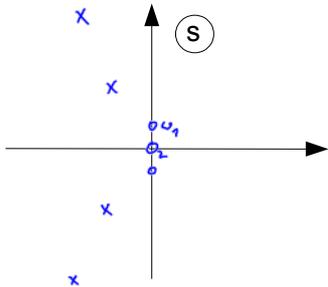


Die Pole liegen auf einer Ellipse. Die Nullstellen liegen auf der imaginären Achse.

**5.7.7.2 Hochpass**

$$H(s) = \frac{(s-s_{u1})(s-s_{u2})(s-s_{u2}^*)}{(s-s_{p1})(s-s_{p1}^*)(s-s_{p2})(s-s_{p2}^*)}$$

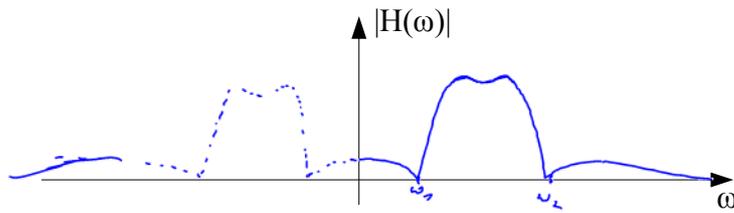
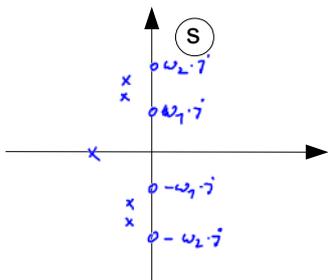
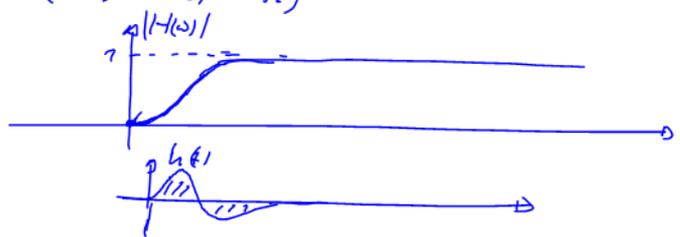
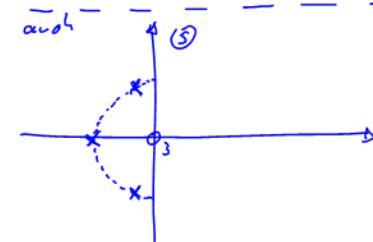
$$\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = \frac{s^4}{s^4} = 1$$



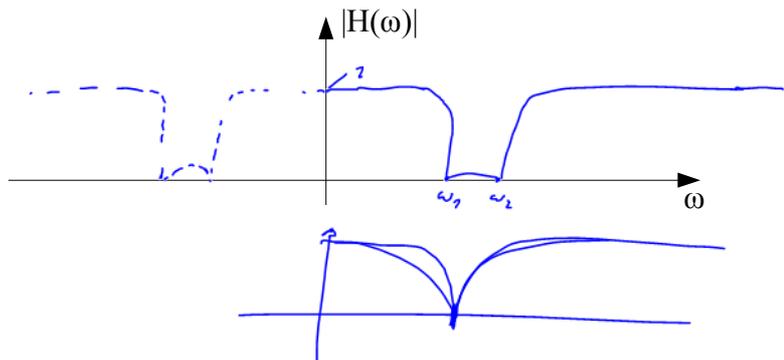
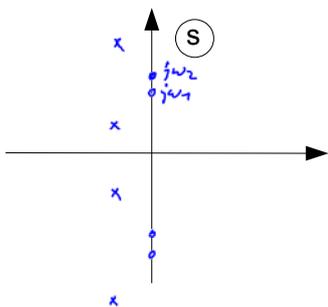
**5.7.7.3 Bandpass**

$$H(s) = \frac{(s^2)}{(s-s_{p1})(s-s_{p2})(s-s_{p2}^*)}$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = 1$$



**5.7.7.4 Bandsperre**



### 5.7.7.5 Laufzeitfilter

Bisher wurden die Pole u. Nullstellen so gelegt, dass sich der Betrag der Übertragungsfunktion möglichst gut dem idealen Tiefpass annähert. Die Phase wird dabei nicht berücksichtigt.

Für gewisse Anwendungen ist es notwendig eine möglichst geringe Verzerrung der Impulsantwort bzw. geringe Überschwinger der Sprungantwort zu haben.

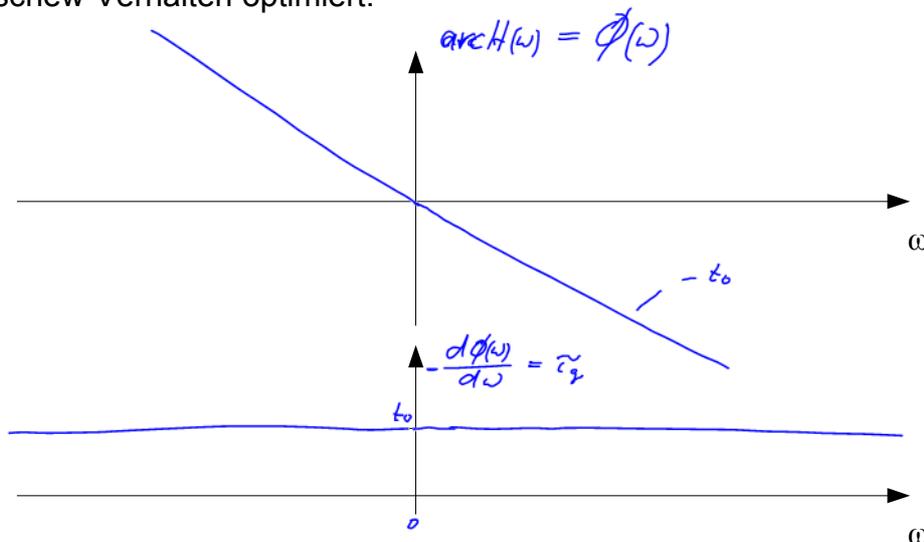
Dazu muss die Phase des TP – Filters möglichst linear sein (s. Eigenschaften der Fouriertransformation – ideales Laufzeitglied).

Die Linearität einer Funktion kann sehr einfach in der ersten Ableitung betrachtet werden, da sich dabei in Abhängigkeit der Frequenz ein konstanter Wert ergeben muss. Dieser konstante Wert als Ableitung der Phase nach der Frequenz ist gleichzeitig die Verzögerung des Filters.

Diese Ableitung der Phase nach der Frequenz wird daher Gruppenlaufzeit genannt.

$$\tau_g = -\frac{d\phi}{d\omega} \quad \text{mit} \quad \phi = \arg(H(\omega))$$

Bei den Laufzeitfiltern wird nun die Gruppenlaufzeit auf möglichst konstanten Wert bzw. auf Tschebyschew-Verhalten optimiert.



#### a) Bessel – Filter

Maximal flacher Verlauf der Gruppenlaufzeit im Durchlassbereich.

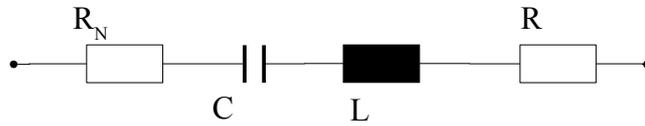
#### b) Tschebyschew - Laufzeitfilter

Die maximalen Abweichungen der Gruppenlaufzeit sind im Durchlassbereich konstant.

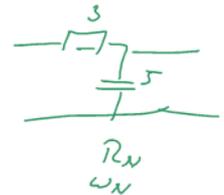
(s. a. Praktikum)

Zur Entnormierung von RLC – Filtern aus Filterkatalogen:

Die Entnormierung wird an einem Beispielnetzwerk entwickelt:



$$Z = R_N + R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$



$Z$  ist eine dimensionsbehaftete Größe

$Z$  wird dimensionslos durch Normierung auf irgendeinen ohmschen Widerstand in der Schaltung (z.B.  $R_N$ ):

$$\underline{Z}_N = 1 + \frac{R}{R_N} + \frac{j\omega L}{R_N} + \frac{1}{j\omega C R_N}$$

Alle Terme sind nun dimensionslos

$\omega$  taucht noch als dimensionsbehaftete Größe auf

Normierung von  $\omega$ :

$$\underline{Z}_N = 1 + \frac{R}{R_N} + \frac{j\omega \omega_N L}{\omega_N R_N} + \frac{1}{j \frac{\omega}{\omega_N} \omega_N C R_N}$$

mit  $\Omega = \frac{\omega}{\omega_N}$

$$\underline{Z}_N = 1 + \underbrace{\frac{R}{R_N}}_{R'} + j\Omega \underbrace{\frac{\omega_N L}{R_N}}_{L'} + \frac{1}{j\Omega \underbrace{\omega_N C R_N}_{C'}}$$

Daraus folgen folgende Umrechnungsregeln:

|                               |                               |
|-------------------------------|-------------------------------|
| $R' = \frac{R}{R_N}$          | $R = R' \cdot R_N$            |
| $L' = \frac{\omega_N L}{R_N}$ | $L = \frac{R_N L'}{\omega_N}$ |
| $C' = \omega_N C R_N$         | $C = \frac{C'}{\omega_N R_N}$ |
| <u>NORMIERUNG</u>             | <u>ENTNORMIERUNG</u>          |

### **5.7.8 Synthese von analogen Filtern**

Es existieren verschiedene Entwurfsverfahren. Hier sollen nur die Grundlagen und Grundbegriffe der Filtersynthese erläutert werden.

Die theoretischen Ableitungen der Filtersyntheseverfahren sollen hier nicht behandelt werden. Die Ergebnisse der Filtertheorie wurden früher in Tabellen abgebildet, während heute dafür Filtersyntheseprogramme verwendet werden.

Das Grundprinzip der Filtersynthese mit Tabellen oder Programmen besteht darin, aus den Forderungen an das Filter eine normierte Systemfunktion  $H(s)$  zu bestimmen. Aus  $H(s)$  kann dann eine Realisierung mit Bauelementen angegeben werden.

Es gibt Tabellen bzw. Programme, die noch zusätzlich eine Realisierung mit RLC-Schaltungen, Operationsverstärkerschaltungen usw. angeben.

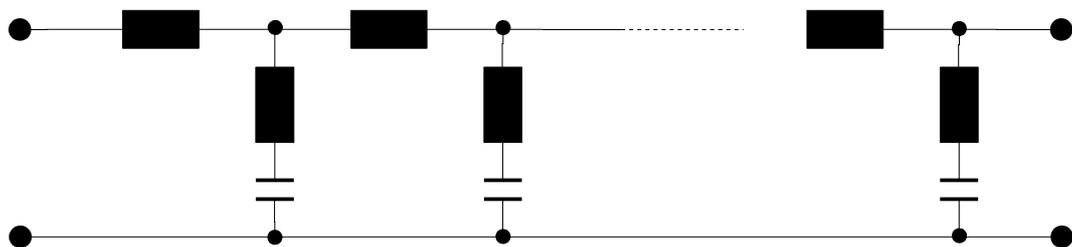
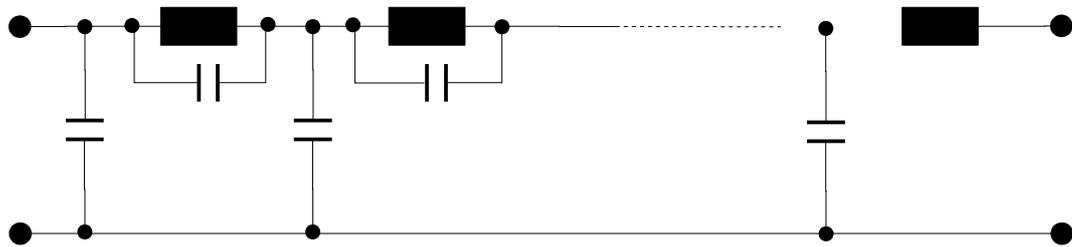
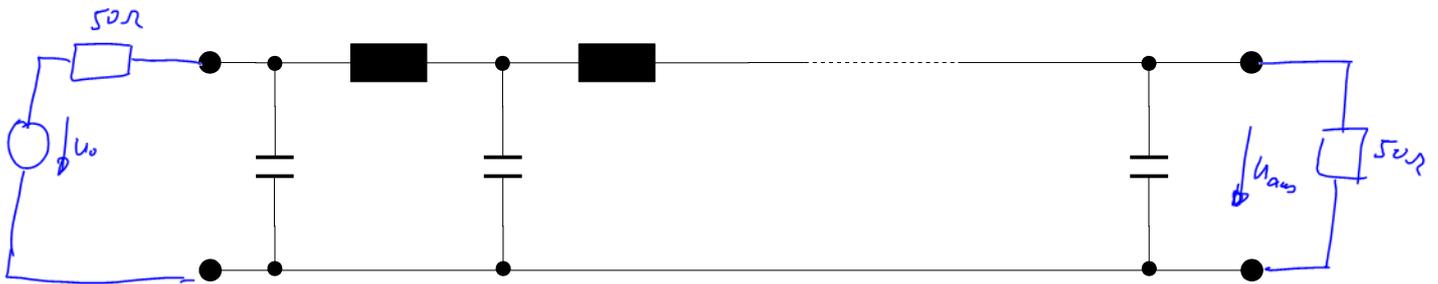
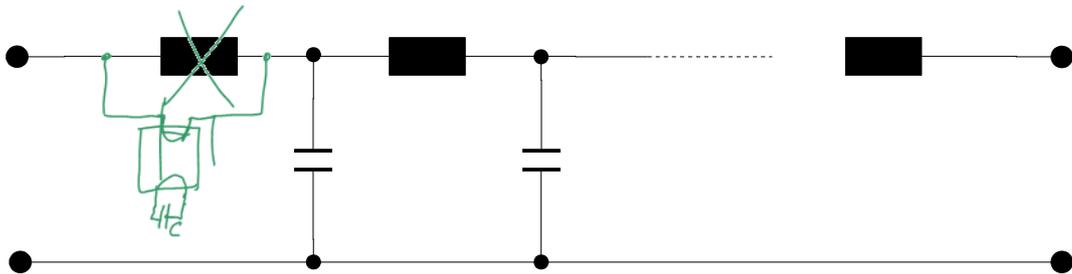
#### **5.7.8.1 Realisierung von analogen Filtern**

Lange Zeit wurden hauptsächlich **RLC-Filter** verwendet, da keine weiteren Filtertechniken zur Verfügung standen. Für tiefe Frequenzen (NF-Filter Niederfrequenz-Filter) ergeben sich dabei aber allerdings relativ große Induktivitätswerte (große Spulen).

Aus diesem Grund traten sog. **RC-aktive Filter** die Nachfolge der RLC-Filter bei tiefen Frequenzen an. Die RC-aktiven Filter bestehen aus den Bauelementen Widerstand (R), Kondensator (C) und Operationsverstärker (OP) und werden dadurch aktive analoge Filter genannt.

a) RLC – Filter:

Tiefpass – Abzeigstrukturen:



Die Dimensionierung und die Festlegung der Struktur erfolgt über Tabellenbücher oder heute über Programme.

**RC-aktive Filter:**

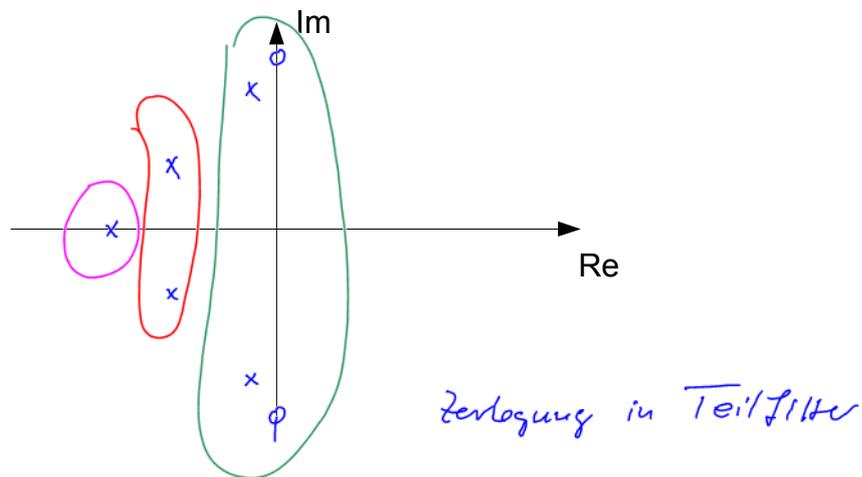
Es gibt eine sehr große Anzahl von Synthesemöglichkeiten für RC-aktive Filter:

Es können dabei zwei prinzipielle Gruppen unterschieden werden:

- **Kaskadensynthese** (Serienschaltung entkoppelter Filterstufen zweiten und ersten Grades)
- **Komponentensimulation** (Simulation passiver Bauteile, wie z.B. Induktivitäten, durch aktive Bauteile)

**Zur Kaskadensynthese:**

Die Pol – Nullstellen – Konfiguration eines Filters kann in Teilfilter zerlegt werden. Diese Teilfilter werden durch RC – aktive Schaltungen realisiert.



Zu realisieren ist also:

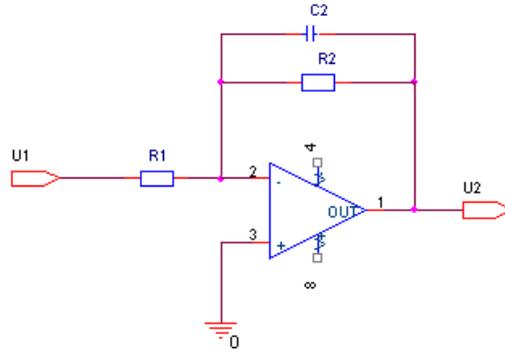
$$H_1(s) = \frac{k_1}{1 + a_1 s}$$

$$H_2(s) = \frac{k_2}{1 + a_2 s + b_2 s^2}$$

$$H_3(s) = \frac{k_3(1 + c_3 s^2)}{1 + a_3 s + b_3 s^2}$$

Es existieren verschiedene Schaltungen zur Realisierung dieser Teilfilter.

Z.B. Die Realisierung der Übertragungsfunktion 1. Grades:

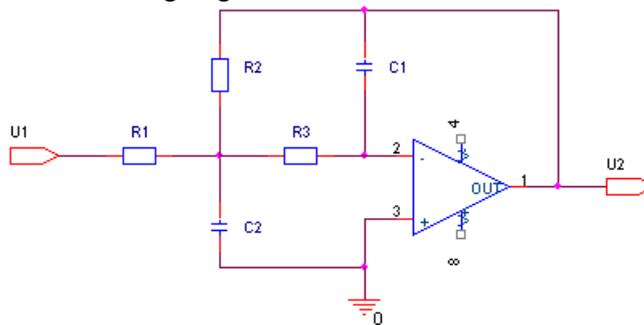


Die Übertragungsfunktion für obige Schaltung ist:

$$\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{-\frac{R_2}{R_1}}{1 + sC_2R_2}$$

*Umdrehung Ac!*

Z.B. Die Realisierung der Übertragungsfunktion 2. Grades:



Die Übertragungsfunktion für obige Schaltung ist:

$$\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{-\frac{R_2}{R_1} k_2}{1 + C_1 \left( R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1} \right) \cdot s + C_1 C_2 R_2 R_3 \cdot s^2}$$

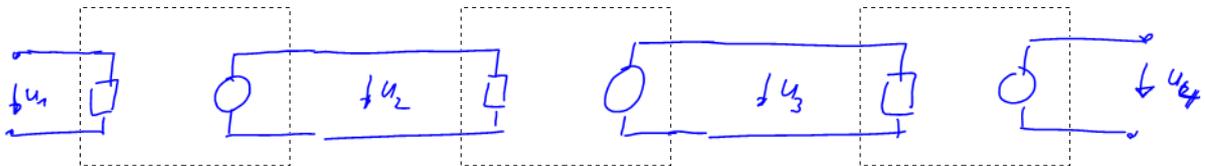
*3 Gleichg. für  $(k_2, a_2, b_2)$*   
*5 Unkde =  $R_1, R_2, R_3, C_1, C_2$*

*$a_2$        $b_2$*

Die Dimensionierung der Schaltung wird über einen Koeffizientenvergleich mit der zu realisierenden Übertragungsfunktion durchgeführt.

Die Kaskadierung, also Serienschaltung der einzelnen Teilfilter, führt zur Realisierung der gewünschten Gesamtfilterfunktion.

Diese Kaskadierung ist nur dadurch möglich, dass der Operationsverstärker eine Ursprungsquelle am Ausgang besitzt. Man sagt, die Teilschaltungen sind voneinander entkoppelt.



$$H_1(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)}$$

$$H_2(s) = \frac{U_3(s)}{U_2(s)}$$

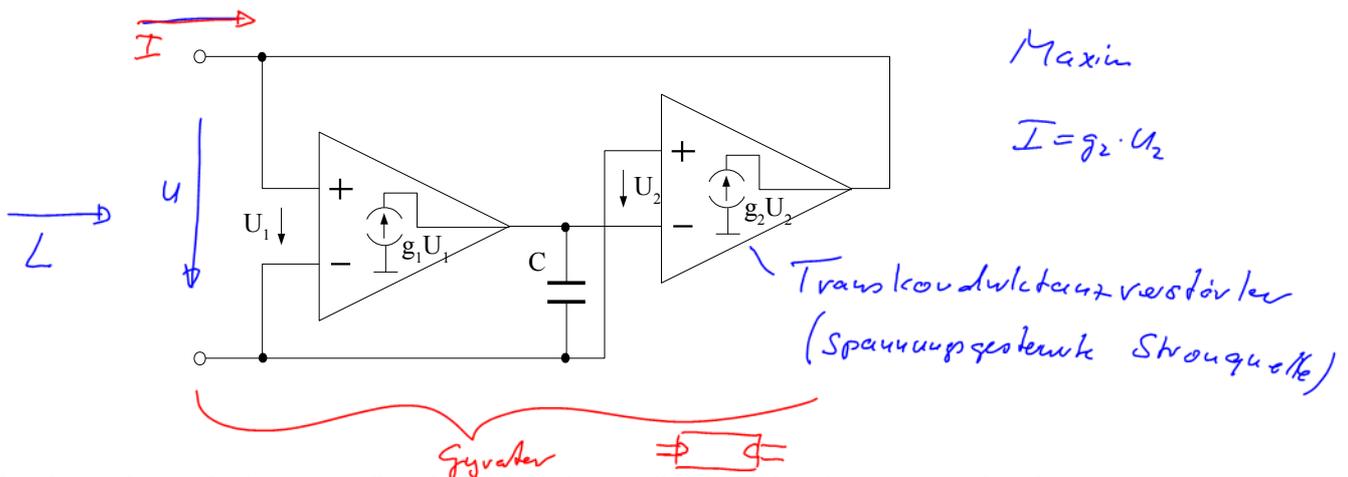
$$H_3(s) = \frac{U_4(s)}{U_3(s)}$$

$$\Rightarrow H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s) \cdot H_3(s)$$

**Zur Komponentensimulation:**

In den passiven RLC-Abzweigschaltungen können die Induktivitäten durch aktive Bauteile ersetzt werden. Dazu können sog. Gyratoren eingesetzt werden.

Die folgende Schaltung zeigt den inneren Aufbau eines Gyrotors:



Die Analyse der Schaltung ergibt eine Impedanz, die den Kondensator C in eine Induktivität L mit  $L = \frac{C}{g_1 g_2}$  umwandelt.

Diese aktive Schaltung in Verbindung mit dem Kondensator ersetzt damit eine voluminöse Spule.