

$$\begin{aligned}
x[0] &= \frac{1}{a_2} \cdot b_2 &= 0 \\
x[1] &= \frac{1}{a_2} \cdot (b_1 - a_1 x[0]) &= 0 \\
x[2] &= \frac{1}{a_2} \cdot (b_0 - a_1 x[1] - a_0 x[0]) &= 1 \\
x[3] &= \frac{1}{a_2} \cdot (-a_1 x[2] - a_0 x[1]) &= -2 \\
x[4] &= \frac{1}{a_2} \cdot (-a_1 x[3] - a_0 x[2]) &= 5 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Man kann also, wenn die Anzahl der a - und b -Koeffizienten verschieden ist, für N einfach den grösseren der beiden Werte verwenden, wie dies in Gleichung 26.35 gezeigt wird. $\square$

26.4 Gängige z-Transformierte

Zeitbereich	Bildbereich
1	$\frac{z}{z-1}$
a^k	$\frac{z}{z-a}$
a^{k-1}	$\frac{1}{z-a}$
$\delta[k]$	1
$e^{\alpha k}$	$\frac{z}{z-e^{\alpha}}$
$\cos \omega k$	$\frac{z^2 - z \cos \omega}{z^2 - 2 z \cos \omega + 1}$
$\sin \omega k$	$\frac{z \sin \omega}{z^2 - 2 z \cos \omega + 1}$

Tabelle 26.1. Gängige Korrespondenzen

26.5 Diskretisierung einer Übertragungsfunktion

Oft hat man die Übertragungsfunktion einer Regelstrecke oder eines Filters in kontinuierlicher Form als Laplace-Transformierte gegeben. Zur Implementierung eines entsprechenden Algorithmus muss diese Übertragungsfunktion dann noch diskretisiert werden. Das Problem besteht also im Wesentlichen darin, zu einer gegebenen Laplace-Transformierten eine entsprechende z -Transformierte zu finden, so dass sich bei der Rücktransformation ähnliche Kurven ergeben.

Hierzu gibt es mehrere Methoden. Hier gezeigt werden die bilineare Transformation und die sogenannte Matched z -Transformation.

26.5.1 Matched z-Transformation

Um aus der Laplace-Transformierten die z-Transformierte einer äquivalenten Strecke zu berechnen, geht man wie folgt vor. Gegeben sei eine kontinuierliche Übertragungsfunktion $G(s)$ in der Form

$$G(s) = K \cdot \frac{(s - n_1) \cdot (s - n_2) \cdot \dots \cdot (s - n_i)}{(s - p_1) \cdot (s - p_2) \cdot \dots \cdot (s - p_k)}$$

dann sind die Nullstellen die n_i und die Polstellen die p_k , K ist ein konstanter Verstärkungsfaktor. Um die z-Transformierte der diskreten Übertragungsfunktion zu erhalten, werden nun alle Pole und Nullstellen mit der Beziehung $z = e^{sT}$ umgesetzt, wobei für s nacheinander die n_i und die p_k eingesetzt werden. Der Parameter T ist die Abtastperiode.

Das Resultat dieser Transformation ist eine Übertragungsfunktion der Form

$$G(z) = K' \cdot \frac{(z - e^{n_1 T}) \cdot (z - e^{n_2 T}) \cdot \dots \cdot (z - e^{n_i T})}{(z - e^{p_1 T}) \cdot (z - e^{p_2 T}) \cdot \dots \cdot (z - e^{p_k T})}$$

wo noch der Verstärkungsfaktor K' unbekannt ist. Dieser kann z.B. durch Vergleich bei einer charakteristischen Frequenz bestimmt werden oder durch Vergleich der Endwerte von $G(s)$ bzw. $G(z)$.

Beispiel

Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.8s + 1}$$

deren zeitdiskretes Äquivalent gesucht wird. Die Abtastperiode sei $T = 0.1$ s. Zuerst müssen die Pole bestimmt werden. Die Gleichung lautet

$$s^2 + 0.8s + 1 = 0$$

und hat die Lösungen

$$\begin{aligned} s_1 &= -0.40000 + 0.91652j \\ s_2 &= -0.40000 - 0.91652j \end{aligned}$$

Die z-Übertragungsfunktion muss somit die Pole

$$\begin{aligned} e^{s_1 T} &= 0.956757 + 0.087935j \\ e^{s_2 T} &= 0.956757 - 0.087935j \end{aligned}$$

haben und wird damit

$$G(z) = \frac{K'}{(z - 0.956757 - 0.087935j) \cdot (z - 0.956757 + 0.087935j)} = \frac{K'}{z^2 - 1.91351z + 0.92312}$$

und jetzt muss nur noch die Verstärkung K' bestimmt werden.

Dazu kann beispielsweise der Endwert der Sprungantwort berechnet werden. Bei der gegebenen Übertragungsfunktion ist dieser

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 + 0.8s + 1} = 1$$

und bei der diskretisierten Übertragungsfunktion muss er gleich sein. Er lautet:

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{K'}{z^2 - 1.91351z + 0.92312} = \frac{K'}{0.0096025} \stackrel{!}{=} 1$$

und somit muss $K' = 0.0096025$ sein.

Somit lautet die gesamte diskretisierte Übertragungsfunktion:

$$G(z) = \frac{0.0096025}{z^2 - 1.91351z + 0.92312}$$

Die Sprungantwort der beiden Übertragungsfunktionen ist in Abbildung 26.1 dargestellt. □

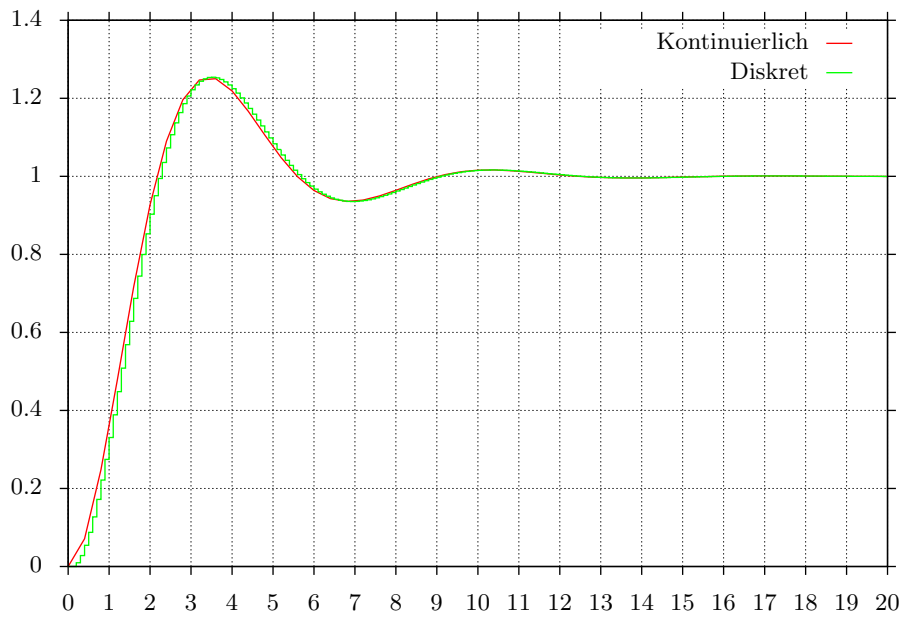


Abb. 26.1. Sprungantwort der kontinuierlichen und der diskretisierten Übertragungsfunktion unter Verwendung der Matched z-Transformation

26.5.2 Bilineare Transformation

Die bilineare Transformation wird auch als Möbius-Transformation bezeichnet. Die bilineare Transformation transformiert eindeutig alle Punkte der komplexen s -Ebene in die z -Ebene. Es handelt sich hierbei um eine sogenannte konforme Abbildung, das heisst, das Winkel bei der Transformation erhalten bleiben. Eine Gerade in der s -Ebene wird dabei auf einen Kreis in der z -Ebene abgebildet.

Die bilineare Transformation wird mittels der Rechenvorschrift

$$s = \frac{2}{T} \cdot \frac{z - 1}{z + 1} \quad (26.36)$$

durchgeführt. Hierbei ist T wieder die Abtastperiode. Auf die Herleitung dieser Beziehung im Detail wird an dieser Stelle verzichtet. Es sei jedoch folgendes erwähnt: ähnlich wie bei der Matched z-Transformation wird $z = e^{sT}$ gesetzt. Hieraus folgt: $s = \frac{1}{T} \ln z$. Anschliessend wird noch eine Reihenentwicklung für den natürlichen Logarithmus vorgenommen (sog. Laurent-Reihen-Entwicklung) und durch Abbrechen der Reihe nach dem ersten Glied erhält man die Beziehung in Gleichung 26.36.

Beispiel

Gegeben sei die kontinuierliche Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{2}{2s^2 + s + 1}$$

und gesucht wird die diskrete Variante.

Mit Hilfe der bilinearen Transformation erhält man durch Einsetzen von Gleichung 26.36 in die kontinuierliche Übertragungsfunktion:

$$G(z) = \frac{(2z^2 + 4z + 2) T^2}{(z^2 + 2z + 1) T^2 + (2z^2 - 2) T + 8z^2 - 16z + 8}$$

Die Abtastperiode sei nun $T = 0.2$ und damit ergibt sich

$$G(z) = \frac{0.08 z^2 + 0.16 z + 0.08}{0.04 z^2 + 0.08 z + 0.04 + 0.4 z^2 - 0.4 + 8 z^2 - 16 z + 8} = \frac{0.08 z^2 + 0.16 z + 0.08}{8.44 z^2 - 15.92 z + 7.64}$$

Die Sprungantwort der beiden Übertragungsfunktionen ist in Abbildung 26.2 dargestellt. $\square$

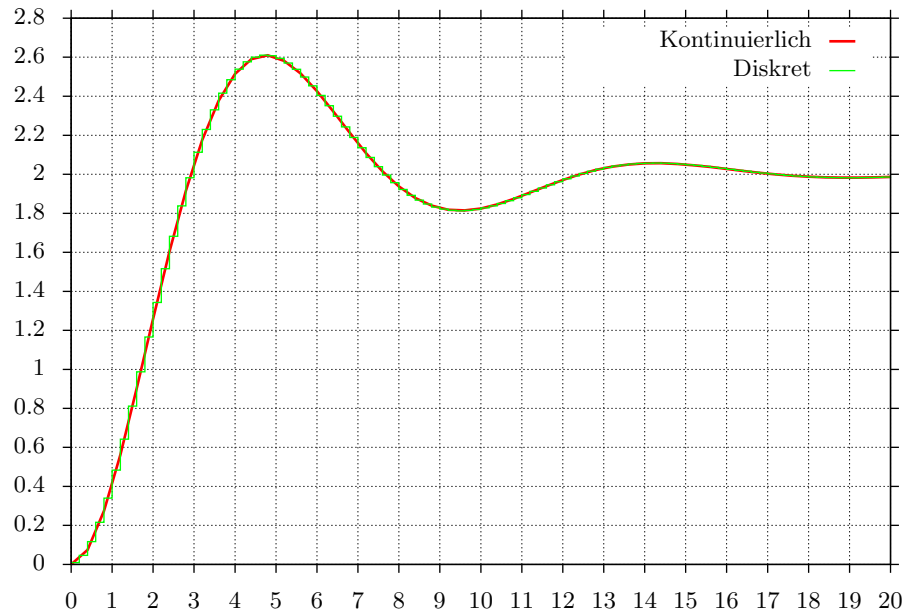


Abb. 26.2. Sprungantwort der kontinuierlichen und der diskretisierten Übertragungsfunktion unter Verwendung der bilinearen Transformation