

# **Die Mathematik der Gauß-Krüger-Abbildung**

Dr. rer. nat. Henrik Seidel

19. Februar 2006



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Überlegungen zur Abbildung der Erdoberfläche auf Karten</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>Mathematische Beschreibung von Ellipsen</b>	<b>10</b>
3.1	Definition 1 — Die Ellipse als gestreckter Kreis: . . . . .	10
3.2	Definition 2 — Gärtnerkonstruktion der Ellipse: . . . . .	10
3.3	Beweis der Äquivalenz beider Ellipsendefinitionen . . . . .	11
3.4	Die Parameter der Ellipse . . . . .	13
3.5	Die Polarkoordinatendarstellung der Ellipse . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Mathematische Beschreibung des Erdellipsoiden</b>	<b>16</b>
4.1	Die drei Breitenwinkel des Erdellipsoiden . . . . .	17
4.1.1	Geozentrische Breite . . . . .	18
4.1.2	Reduzierte Breite . . . . .	18
4.1.3	Geographische Breite . . . . .	19
<b>5</b>	<b>Die Gauß-Krüger-Abbildung</b>	<b>23</b>
5.1	Einführung der verwendeten Teilabbildungen . . . . .	23
5.2	Überlegungen zur Winkeltreue einer Abbildung . . . . .	25
5.3	Herleitung einer winkeltreuen Abbildung des Geoiden in die Ebene . . . . .	30
5.3.1	Die Gaußschen Koeffizienten der Parametrisierung des Geoiden . . . . .	31
5.3.2	Die Gaußschen Koeffizienten der Abbildung des Geoiden in die Ebene . . . . .	33
5.3.3	Die Konstruktion der winkeltreuen Abbildung des Geoiden in die Ebene . . . . .	34
5.4	Herleitung der zweiten Teilabbildung zum Erreichen der Längentreue auf dem Nullmeridian . . . . .	37
5.4.1	Berechnung der Länge eines Meridianbogens . . . . .	39
5.4.2	Berechnung der Ableitungen der Funktion $g$ . . . . .	51
<b>A</b>	<b>Beweis der Winkeltreue stetig differenzierbarer komplexwertiger Funktionen</b>	<b>64</b>

<b>B Meridiankrümmungsradius und Querkrümmungsradius</b>	<b>65</b>
<b>C Definition der Funktion <math>\operatorname{artanh}</math></b>	<b>66</b>
<b>D Die Newtonsche binomische Reihe</b>	<b>67</b>
D.1 Die Taylorsche Formel und die Taylorsche Reihe . . . . .	67
D.1.1 Die Taylorsche Formel . . . . .	67
D.1.2 Die Taylorsche Reihe . . . . .	71
D.2 Entwicklung der Newtonschen binomischen Reihe . . . . .	71
D.2.1 Berechnung der Reihenentwicklung von $(\mathbf{1} + \mathbf{x})^\alpha$ . . . . .	71
D.2.2 Beweis der Konvergenz für $ \mathbf{x}  < \mathbf{1}$ . . . . .	72
D.2.3 Beweis der Konvergenz von absolut konvergenten Reihen . . . . .	73
D.2.4 Beweis des Verschwindens des Restgliedes für $ \mathbf{x}  < \mathbf{1}$ . . . . .	75
D.2.5 Beweis der Divergenz für $ \mathbf{x}  > \mathbf{1}$ . . . . .	76
<b>E Die Formel von Moivre</b>	<b>77</b>

# 1 Einleitung

Mit diesem Schriftstück soll dem mathematisch interessierten Leser eine Einführung in die Mathematik der Gauß-Krüger-Abbildung gegeben werden. Die Gauß-Krüger-Abbildung liegt den meisten modernen Projektionen der Erdoberfläche auf zweidimensionale Karten zugrunde, beispielsweise auch der Universalen Transmercator-Projektion (UTM).

Mir ist es auch nach längerer Suche nicht gelungen, im Web einen leicht verständlichen mathematischen Abriss der Gauß-Krüger-Abbildung zu finden. Die Staatsexamensarbeit von Xenia Beate Rendtel kommt dem schon relativ nahe. Allerdings wird dort zur Herleitung der Gauß-Krüger-Abbildung die Theorie der Mannigfaltigkeiten bemüht, für Nicht-Mathematiker und Nicht-Physiker ohne entsprechende Vorkenntnisse keine leichte Kost. Auch für mich als Physiker bedeutete die Lektüre dieser Arbeit ein etwas mühsames Hervorholen beinahe verlorengelauten Wissens.

Die Theorie der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten ist eine Abstraktion auf relativ hohem Niveau, deren Anwendbarkeit weit über die uns alltäglich geläufige dreidimensionale Welt mit Euklidischer Metrik und deren Projektion auf zweidimensionale Karten hinausgeht. Dies hat natürlich viele Vorteile, da für Mannigfaltigkeiten bewiesene Sätze automatisch auch für alle Spezialfälle gelten. Andererseits stellt das Verständnis der Theorie der Mannigfaltigkeiten wegen der hohen Abstraktionsstufe auch relative hohe Anforderungen an den Leser.

Aus didaktischen Gründen ist es generell nicht ratsam, mit einer hoch abstrakten Theorie zu beginnen und diese erst anschließend auf einen uns interessierenden Spezialfall anzuwenden. Normalerweise ist dies auch nicht der Weg, auf dem neue mathematische Theorien entwickelt werden. Vielmehr untersucht man in der Regel verschiedene Beispiele, stellt dann Gemeinsamkeiten fest und versucht, eine übergeordnete abstrakte Theorie zu schaffen, die die Einzelbeispiele als Spezialfälle enthält. Ohne Kenntnis der Beispiele ist die abstrakte übergeordnete Theorie für den Neuling relativ schwer zu verstehen. Für den Mathematiker, der sich die Kenntnis der entsprechenden Theorien während seiner Ausbildung angeeignet hat, ist es natürlich sehr sinnvoll, einmal verstandene abstrakte Theorien auf Spezialfälle anzuwenden. Für den interessierten Laien bedeutet es allerdings häufig, mit Kanonen auf Spatzen zu schießen — es ist schlichtweg unnötig, sich eine komplexe Theorie anzueignen, wenn diese anschließend nur auf einen relativ einfach handhabbaren Spezialfall angewendet werden soll.

Für das Verständnis der in dieser Arbeit dargestellten Herleitung der Gauß-Krüger-Abbildung werden daher nur Grundkenntnisse der Differential- und Integralrechnung

## *1 Einleitung*

---

sowie die Kenntnis partieller Ableitungen vorausgesetzt. Ich hoffe, damit dem mathematisch interessierten Laien ein Mittel in die Hand zu geben, die Mathematik der Gauß-Krüger-Abbildung zu verstehen, ohne in die Tiefen der höheren Mathematik eindringen zu müssen.

## 2 Überlegungen zur Abbildung der Erdoberfläche auf Karten

In erster Näherung ist die Erde kugelförmig. Dies ist allerdings nur eine relative grobe Annäherung an die tatsächliche Gestalt der Erde. Die mit der Rotation der Erde verbundenen Zentrifugalkräfte haben zu einer Verformung der Erdkugel geführt. Da der Abstand der Erdoberfläche von der Rotationsachse am Äquator am größten ist und an den Polen verschwindet, sind auch die Zentrifugalkräfte am Äquator am größten, während sie an den Polen ebenfalls verschwinden. Das hat dazu geführt, daß die Erde am Äquator etwas in die Breite gegangen ist, d.h. der zwischen Nord- und Südpol gemessene Durchmesser der Erde ist kleiner als der senkrecht dazu gemessene Erddurchmesser am Äquator. Die Erde hat also nicht die Form einer Kugel, sondern eher die Form eines Gummiballes, der von oben und unten leicht zusammengedrückt wird. Diese Form entspricht einem Rotationsellipsoiden — man stelle sich eine Ellipse vor, die um ihre kleinere Halbachse rotiert, und man erhält eine schon deutlich bessere Annäherung an die tatsächliche Erdoberfläche, als dies eine Kugel darstellt.

Nun ist aber die Erde kein idealisierter geometrischer Körper. Auf dem Festland ist die Oberfläche geprägt durch das Landschaftsprofil. Auch Änderungen der Zusammensetzung der Erdkruste können zu lokalen Veränderungen der Richtung der Schwerkraft und damit zu Oberflächenveränderungen führen. Die Erde hat also eher die Form einer Kartoffel, obgleich die Abweichungen von der geometrischen Idealgestalt für die Erde aus der Ferne betrachtet natürlich deutlich weniger ins Auge fallen. Für hochpräzise Positionsmessungen, wie sie beispielsweise durch das Global Positioning System GPS geliefert werden, sind die Abweichungen jedoch nicht vernachlässigbar.

Um nun die Erdoberfläche möglichst präzise abbilden zu können, wird die Erdform zunächst durch einen Rotationsellipsoiden angenähert. Die tatsächliche Gestalt der Erde erhält man, indem man für jeden Punkt der Erdoberfläche zusätzlich eine Höhe angibt, d.h. die Abweichung der Position des Punktes der Erdoberfläche vom Ellipsoiden entlang der durch den betreffenden Punkt laufenden Flächennormalen des Ellipsoiden. In Abschnitt 4 werden wir eine mathematische Beschreibung des Rotationsellipsoiden angeben.

Man mag sich fragen, ob die Erde denn tatsächlich nahezu rotationssymmetrisch ist. Ein parallel zur Äquatorebene durchgeführter Schnitt durch einen Rotationsellipsoiden ergibt stets einen Kreis. Man könnte nun annehmen, eine noch genauere Beschreibung der Erde zu erhalten, wenn derartige Schnitte nicht kreisförmig, sondern ebenfalls ellip-

tisch wären. Beispielsweise haben über dem Meeresspiegel liegende Landmassen einen größeren Abstand von der Rotationsachse als das Meer auf gleicher geographischer Breite, außerdem hat Gestein eine höhere Dichte als Wasser. Man könnte also annehmen, daß die Zentrifugalkräfte auf den Kontinenten größer als auf Meeresgebieten gleicher geographischer Breite sind und daher die Erde in Richtung der Kontinente auseinandergezogen ist. Dies wäre dann kein Rotationsellipsoid mehr, sondern eher ein allgemeiner Ellipsoid mit drei verschiedenen großen Halbachsen (Rotationsellipsoiden sind ein Spezialfall von Ellipsoiden). Genaue Messungen der Erdgestalt haben aber ergeben, daß der Unterschied der beiden in der Äquatorebene liegenden Halbachsen vernachlässigbar ist.

Nachdem wir also festgestellt haben, daß die Erde durch einen Rotationsellipsoiden angenähert werden kann, stellt sich die Frage, wie man nun die gewölbte Oberfläche dieses Ellipsoiden auf ebene Karten übertragen kann. Wäre die Erdoberfläche ein Zylinder, dann wäre dies relativ einfach — man könnte wie bei einer Konservendose einfach das Etikett ablösen und abrollen, zusätzlich hätte man zwei Karten für Deckel und Boden der Dose. Leider ist die Erdoberfläche nicht nur in einer Richtung gewölbt, wie dies bei der Wand eines Zylinders der Fall ist, sondern in zwei Richtungen. Dies macht es unmöglich, eine verzerrungsfreie Abbildung der Erdoberfläche in die Ebene zu konstruieren. Man stelle sich beispielsweise vor, man zerschneide einen mit Luft gefüllten Gummiball in zwei Halbkugeln. Anschließend lege man eine dieser Halbkugeln auf einen großen Tisch, so daß sie eine Kuppel bildet, lege ein Brett darauf und beschwere dieses, bis die Kuppel plattgedrückt ist. Man erhält auf diese Weise eine Abbildung der Halbkugel in die Ebene. Man kann sich aber leicht vorstellen, daß dabei verschiedene Bereiche der Kuppel verschieden stark gedehnt werden — der ursprünglich auf dem Tisch liegende Rand der Kuppel wird sehr stark auseinandergezogen, während die Spitze der Kuppel eher etwas zusammengepreßt wird.

Es gibt zahlreiche Möglichkeiten, die Erdoberfläche in die Ebene abzubilden. Da aber jede dieser Abbildungen zu Verzerrungen führt, muß man sich fragen, welche Eigenschaften der Erdoberfläche bei der Abbildung möglichst erhalten bleiben sollen. Man kann beispielsweise fordern, daß zwei gleichgroße Gebiete auf der Erde auch nach der Abbildung in die Karte die gleiche Größe haben, die Abbildung also flächentreu ist. Für die in der Navigation verwendeten Karten ist es jedoch viel wichtiger, daß ein auf der Karte bestimmter Kurs ohne Umrechnung direkt als real zu steuernder Kurs verwendbar ist, d.h. daß der Winkel zwischen zwei sich schneidenden Linien auf der Erdoberfläche der gleiche ist wie in der Karte. Dies bedeutet, daß die Abbildung winkeltreu sein soll. Außerdem wäre es natürlich sehr schön, wenn gleiche Längen in der Karte auch gleichen Längen auf der Erde entsprechen, die Abbildung also längentreu ist. Leider läßt sich aber keine längentreue Abbildung der Erde in die Ebene konstruieren, wie das oben angeführte Beispiel des plattgedrückten Gummiballs anschaulich demonstrieren sollte. Gauß ist dieses Problem angegangen, indem er die Erdoberfläche ähnlich einer zu schälenden Apfelsine vom Nordpol zum Südpol mit Schnitten versieht und diese einzelnen „Schalenstücke“ dann abpellt und ähnlich unserem halben Gummiball plattdrückt. Wenn man die Scha-



---

lenstücke nur schmal genug macht, dann sind die dadurch verursachten Verzerrungen akzeptabel, d.h. die Abbildung ist zwar nicht längentreu, aber die Abweichungen von der Längentreue sind nicht allzu gravierend. Gauß hat also für die Entwicklung seiner Abbildung folgendes gefordert:

1. Die Abbildung soll winkeltreu sein.
2. Der Äquator soll auf die horizontale Achse der zweidimensionalen Ebene abgebildet werden.
3. Der Zentralmeridian eines Sektors (sozusagen die von Nord nach Süd verlaufende Mittellinie des Apfelsinenschalenstückes) soll auf die vertikale Achse der zweidimensionalen Ebene abgebildet werden.
4. Die Abbildung soll wenigstens direkt auf dem Zentralmeridian längentreu sein.

Die letzte Forderung kann man sich etwa so vorstellen, daß man die Mittellinie des Apfelsinenschalenstückes fest auf eine Unterlage nagelt und dann den Rest des Schalenstückes so breitklopft, daß dabei keine Winkel verzerrt werden. Zum Schluß kann man dann die einzelnen breitgeklopften Schalenstücke nebeneinander legen und wieder zu einer Gesamtkarte zusammennähen. Die mathematische Herleitung der hier etwas salopp beschriebenen Abbildung wird den Hauptteil dieses Papiers einnehmen.

## 3 Mathematische Beschreibung von Ellipsen

Bevor wir zur eigentlichen Herleitung der Gauß-Krüger-Abbildung kommen können, benötigen wir eine mathematische Beschreibung der Erdoberfläche. Wie im letzten Abschnitt festgestellt, läßt sich die Erde durch einen Rotationsellipsoiden annähern, also durch eine rotierende Ellipse. Daher werden wir hier die Gleichungen der Ellipse re-minisizieren und diese anschließend im folgenden Abschnitt zum Rotationsellipsoiden erweitern.

Es gibt verschiedene Definitionen der Ellipse. Zwei mögliche Definitionen seien hier angegeben.

### 3.1 Definition 1 — Die Ellipse als gestreckter Kreis:

Jede Ellipse mit den beiden Halbachsen  $a$  und  $b$  ist äquivalent zum Einheitskreis um den Nullpunkt eines kartesischen Koordinatensystems der Ebene, wobei die horizontale Achse ( $x$ -Achse) um den Faktor  $a$  und die vertikale Achse ( $y$ -Achse) um den Faktor  $b$  gestreckt wurde. Aus dieser Definition und der Gleichung des Einheitskreises  $x^2 + y^2 = 1$  ergibt sich unmittelbar die Ellipsengleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \quad (3.1.1)$$

wobei  $a$  die große Halbachse und  $b$  die kleine Halbachse der Ellipse sind.

### 3.2 Definition 2 — Gärtnerkonstruktion der Ellipse:

Man wähle zwei beliebige, aber feste Punkte  $F_1$  und  $F_2$ . Der Abstand dieser Punkte sei  $2\varepsilon$ . Die Menge aller Punkte  $P$ , für welche die Summe der beiden Abstände zu  $F_1$  und zu  $F_2$  konstant ist (also  $\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = \text{const}$ ), bildet eine Ellipse. Die beiden Punkte  $F_1$  und  $F_2$  werden auch Brennpunkte und  $\varepsilon$  wird Brennweite der Ellipse genannt.

**Bemerkung:** Diese Definition heißt Gärtnerkonstruktion, da sie benutzt werden kann, um ein ellipsenförmiges Beet abzustecken: Man schlägt zwei Stöcke an den Brennpunkten in den Boden und befestigt eine Leine, die länger als der Abstand der Brennpunkte ist

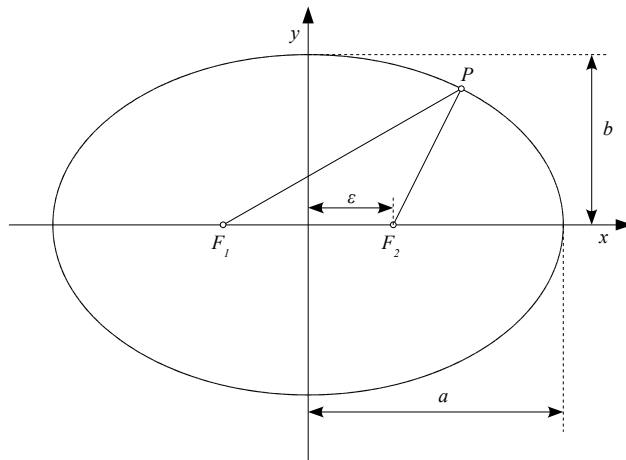


Abbildung 3.1: Gärtnerkonstruktion der Ellipse.

mit jedem ihrer Enden an jeweils einem Brennpunkt. Anschließend nimmt man einen dritten Stock und benutzt diesen als „Reißnadel“, er entspricht dem Punkt  $P$ . Mit diesem dritten Stock wird die Leine zunächst gespannt, dann wird er bei stets gespannter Leine um die Brennpunkte herumgeführt. Dabei verändert sich die Gesamtlänge der Leine nicht (schließlich ist sie an beiden Enden in den Brennpunkten befestigt), folglich bleibt die Summe der Abstände des dritten Stocks zu den beiden Brennpunkten konstant.

### 3.3 Beweis der Äquivalenz beider Ellipsendefinitionen

Als kleine Fingerübung zum Warmwerden wollen wir die Äquivalenz der beiden Definitionen beweisen. Dazu werden wir von der Gärtnerkonstruktion ausgehen und zeigen, daß daraus die Ellipsengleichung (3.1.1) folgt. Betrachten wir zunächst zwei besonders ausgezeichnete Punkte der Ellipse, nämlich  $(0, b)$  und  $(a, 0)$ .

Die Summe der Abstände eines Punktes der Ellipse zu den beiden Brennpunkten (also die Länge der Leine) sei  $2l$ . Für den Punkt  $(0, b)$  folgt daraus

$$l = \sqrt{b^2 + \varepsilon^2}. \quad (3.3.1)$$

Für den Punkt  $(a, 0)$  wiederum folgt

$$2l = (a + \varepsilon) + (a - \varepsilon) \quad (3.3.2)$$

woraus sich  $l = a$  ergibt, d.h.  $\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2a$ . Somit ist mit Gleichung (3.3.1)

$$a^2 = b^2 + \varepsilon^2. \quad (3.3.3)$$

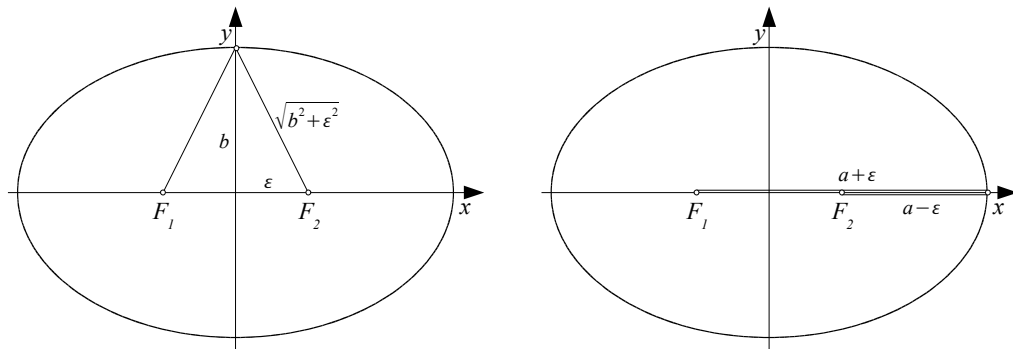


Abbildung 3.2: Die besonders ausgezeichneten Ellipsenpunkte  $P = (0, b)$  und  $P = (a, 0)$ .

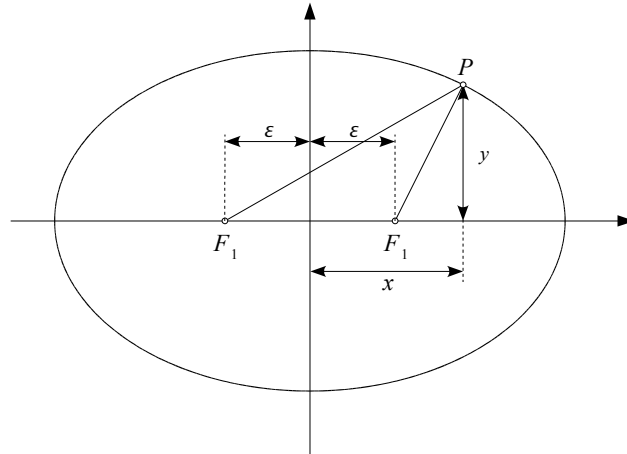


Abbildung 3.3: Die Gärtnerkonstruktion für einen beliebigen Punkt  $P$ .

Für einen beliebigen Punkt  $P$  finden wir

$$\overline{F_1P}^2 = (x + \varepsilon)^2 + y^2 \quad (3.3.4)$$

$$\overline{F_2P}^2 = (x - \varepsilon)^2 + y^2 \quad (3.3.5)$$

und wegen  $\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2a$  also

$$2a = \sqrt{(x + \varepsilon)^2 + y^2} + \sqrt{(x - \varepsilon)^2 + y^2} \quad (3.3.6)$$

$$4a^2 = (x + \varepsilon)^2 + y^2 + (x - \varepsilon)^2 + y^2 + 2\sqrt{((x + \varepsilon)^2 + y^2)((x - \varepsilon)^2 + y^2)} \quad (3.3.7)$$

$$2a^2 = x^2 + \varepsilon^2 + y^2 + \sqrt{(x^2 - \varepsilon^2)^2 + 2(x^2 + \varepsilon^2)y^2 + y^4} \quad (3.3.8)$$

$$2a^2 - x^2 - \varepsilon^2 - y^2 = \sqrt{(x^2 - \varepsilon^2)^2 + 2(x^2 + \varepsilon^2)y^2 + y^4} \quad (3.3.9)$$

$$\begin{aligned} 4a^4 + x^4 + \varepsilon^4 + y^4 - 4a^2x^2 - 4a^2\varepsilon^2 - 4a^2y^2 + 2x^2\varepsilon^2 + 2x^2y^2 + 2\varepsilon^2y^2 \\ = x^4 - 2x^2\varepsilon^2 + \varepsilon^4 + 2x^2y^2 + 2\varepsilon^2y^2 + y^4 \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

$$4a^4 - 4a^2x^2 - 4a^2\varepsilon^2 - 4a^2y^2 + 4x^2\varepsilon^2 = 0, \quad (3.3.11)$$

woraus sich unter Verwendung von  $\varepsilon^2 = a^2 - b^2$  ergibt, daß

$$a^4 - a^2x^2 - a^2(a^2 - b^2) - a^2y^2 + x^2(a^2 - b^2) = 0 \quad (3.3.12)$$

$$a^4 - a^2x^2 - a^4 + a^2b^2 - a^2y^2 + x^2a^2 - x^2b^2 = 0 \quad (3.3.13)$$

$$a^2b^2 - a^2y^2 - x^2b^2 = 0 \quad (3.3.14)$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1. \quad (3.3.15)$$

Damit haben wir gezeigt, daß aus der Gärtnerkonstruktion der Ellipse die Gültigkeit von Gleichung (3.1.1) aus Definition 1 folgt. Da alle bei diesem Beweis verwendeten Schritte umkehrbar sind, d.h. der Beweis auch in umgekehrter Richtung von unten nach oben geführt werden kann, folgt andererseits aus Definition 1 die Gärtnerkonstruktion. Damit ist die Äquivalenz beider Definitionen der Ellipse gezeigt.

### 3.4 Die Parameter der Ellipse

Zusätzlich zu den bereits eingeführten Halbachsen  $a$  und  $b$  sowie der Brennweite  $\varepsilon$  werden für die Beschreibung von Ellipsen häufig auch die erste elliptische Exzentrizität  $e$  und die zweite elliptische Exzentrizität  $e'$

$$e = \frac{\varepsilon}{a}, \quad e' = \frac{\varepsilon}{b} \quad (3.4.1)$$

sowie die Abplattung

$$f = \frac{a-b}{a} = 1 - \frac{b}{a} = 1 - \sqrt{1-e^2} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+e'^2}} \quad (3.4.2)$$

verwendet. Diese sind nicht unabhängig von  $a$  und  $b$ , grundsätzlich ist eine Ellipse durch die Angabe von beliebigen zwei der insgesamt sechs Parameter  $a$ ,  $b$ ,  $\varepsilon$ ,  $e$ ,  $e'$  und  $f$  definiert, wobei allerdings nicht beide Parameter dimensionslos sein dürfen ( $e$ ,  $e'$  und  $f$  sind dimensionslos).

## 3.5 Die Polarkoordinatendarstellung der Ellipse

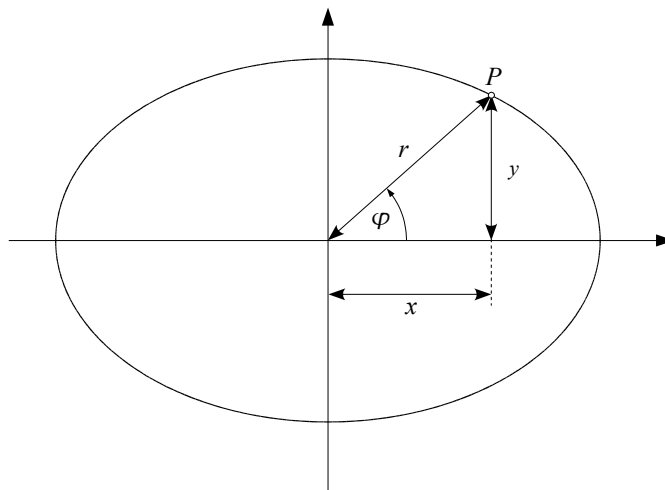


Abbildung 3.4: Polarkoordinaten der Ellipse

Ein Punkt auf der Erdoberfläche wird normalerweise nicht durch seine kartesischen Koordination  $(x, y, z)$  angegeben, sondern durch geographische Länge und Breite. Aus diesem Grunde ist es nützlich, die Gleichung der Ellipse auch in Polarkoordinaten anzugeben. Aus Gleichung (3.1.1) folgt unter Verwendung der Bezeichnungen aus Abbildung 3.4:

$$x = r \cos \varphi \quad (3.5.1)$$

$$y = r \sin \varphi \quad (3.5.2)$$

$$1 = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 \quad (3.5.3)$$

$$= \left( \frac{r \cos \varphi}{a} \right)^2 + \left( \frac{r \sin \varphi}{b} \right)^2. \quad (3.5.4)$$

Unter Verwendung von  $a^2 = b^2 + \varepsilon^2$  und  $e = \varepsilon/a$  ergibt sich

$$1 = r^2 \left( \frac{\cos^2 \varphi}{b^2 + \varepsilon^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2} \right) \quad (3.5.5)$$

$$1 = \frac{r^2}{b^2} \left( \frac{b^2 \cos^2 \varphi + (b^2 + \varepsilon^2) \sin^2 \varphi}{b^2 + \varepsilon^2} \right) \quad (3.5.6)$$

$$1 = \frac{r^2}{b^2} \left( \frac{b^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi + \varepsilon^2(1 - \cos^2 \varphi)}{b^2 + \varepsilon^2} \right) \quad (3.5.7)$$

$$1 = \frac{r^2}{b^2} \left( \frac{b^2 + \varepsilon^2 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}{b^2 + \varepsilon^2} \right) \quad (3.5.8)$$

$$1 = \frac{r^2}{b^2} \left( 1 - \frac{\varepsilon^2 \cos^2 \varphi}{a^2} \right) \quad (3.5.9)$$

$$1 = \frac{r^2}{b^2} (1 - e^2 \cos^2 \varphi). \quad (3.5.10)$$

Daraus folgt also die Polarkoordinatendarstellung der Ellipse

$$r(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi}} \quad (3.5.11)$$

oder auch, unter Verwendung von Gleichungen (3.5.1) und (3.5.2),

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi}} \\ \frac{b \sin \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi}} \end{pmatrix}. \quad (3.5.12)$$

## 4 Mathematische Beschreibung des Erdellipsoiden

Wir wollen nun von der in den zweidimensionalen Raum  $\mathbb{R}^2$  eingebetteten Ellipse zum in den dreidimensionalen Raum  $\mathbb{R}^3$  eingebetteten Rotationsellipsoiden übergehen. Dazu stellen wir uns einfach vor, daß eine Ellipse um ihre kleine Halbachse rotiert und dadurch eine geschlossene Fläche im dreidimensionalen Raum ergibt (Abb. 4.1).

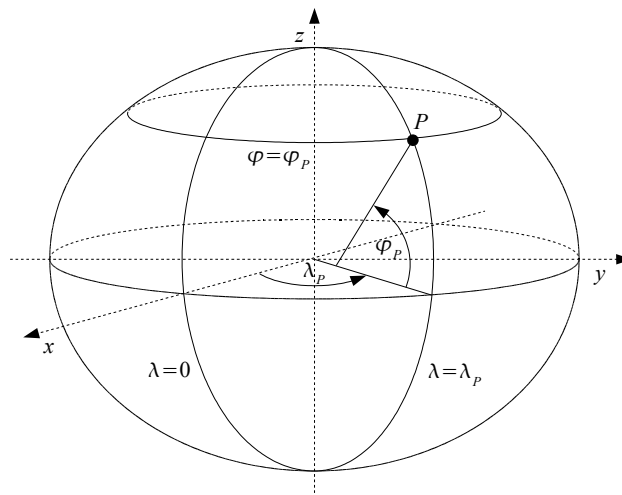


Abbildung 4.1: Geographische Länge  $\lambda$  und geographische Breite  $\varphi$  des Erdellipsoiden

Ebenen, die parallel zur  $x$ - $y$  Ebene verlaufen (d.h.  $z = \text{const}$ ), schneiden den Ellipsoiden jeweils in einem Kreis. Diese Kreise werden Breitenkreise genannt, da alle Punkte auf einem Breitenkreis die gleiche geographische Breite  $\varphi$  haben. Die Ebene mit  $z = 0$  wird auch Äquatorebene genannt. Ebenen, die die  $z$ -Achse enthalten, stehen senkrecht auf der Äquatorebene und schneiden den Ellipsoiden in zueinander kongruenten Ellipsen, Meridianellipsen genannt (manchmal auch Längengrade, obwohl es sich um Ellipsen und nicht um Kreise handelt). Alle Punkte auf jeweils einem der beiden vom Nordpol zum Südpol verlaufenden Bögen einer Meridianellipse haben die gleiche geographische Länge  $\lambda$ . Da alle Meridianellipsen zueinander kongruent sind und keiner der Meridiane auf natürliche Weise besonders herausgestellt ist, muß der Nullmeridian mit  $\lambda = 0$



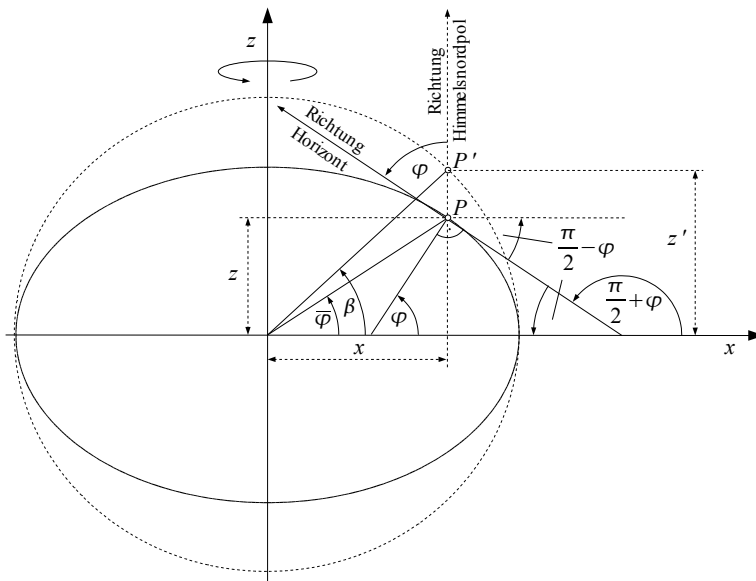


Abbildung 4.2: Die drei Breitenwinkel des Ellipsoiden: Reduzierte Breite  $\beta$ , geozentrische Breite  $\bar{\varphi}$  und geographische Breite  $\varphi$ .

explizit definiert werden. Dazu wird ein Punkt auf der Erde festgelegt und dem durch diesen Punkt verlaufenden Meridian  $\lambda = 0$  zugeordnet. Im Laufe der Geschichte hat dieser Punkt an verschiedenen Orten gelegen. Heute verläuft der Nullmeridian durch die Sternwarte von Greenwich.

## 4.1 Die drei Breitenwinkel und die dazugehörigen Gleichungen des Erdellipsoiden

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Breite eines Ortes auf der Erdoberfläche zu definieren (siehe Abb. 4.2). Wir werden uns hier die reduzierte Breite  $\beta$ , die geozentrische Breite  $\bar{\varphi}$  und die geographische Breite  $\varphi$  näher ansehen, Umrechnungsformeln zwischen diesen Breitenwinkeln herleiten und für jeden der drei Breitenwinkel eine Parametrisierung der Oberfläche des Erdellipsoiden angeben. Für die Gauß-Krüger-Abbildung werden wir anschließend die Parametrisierung des Erdellipsoiden durch geographische Länge  $\lambda$  und geographische Breite  $\varphi$  verwenden (Gleichung (4.1.31)).

### 4.1.1 Geozentrische Breite

Die geozentrische Breite  $\bar{\varphi}$  eines auf der Erdoberfläche befindlichen Punktes  $P$  ist der Winkel zwischen der Äquatorebene und der Verbindungslinie von  $P$  zum Erdmittelpunkt (siehe Abb. 4.2).

#### Parametrisierung des Erdellipsoiden durch Länge $\lambda$ und geozentrische Breite $\bar{\varphi}$ :

Unter Verwendung der Ellipsengleichung (3.5.12) läßt sich relativ direkt die Gleichung für den Ellipsoiden ableiten. Wir hatten bereits festgestellt, daß sich der Ellipsoid aus der Rotation einer Ellipse um ihre kleine Halbachse ergibt. Damit bilden Orte gleicher geozentrischer Breite  $\bar{\varphi}$  einen Kreis parallel zur Äquatorebene. Der Radius dieses Kreises entspricht der  $x$ -Koordinate aus Gleichung (3.5.12), ist also  $\frac{b \cos \bar{\varphi}}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \cos^2 \bar{\varphi}}}$ . Daraus ergibt sich  $x = \frac{b \cos \bar{\varphi} \cos \lambda}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \cos^2 \bar{\varphi}}}$  und  $y = \frac{b \cos \bar{\varphi} \sin \lambda}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \cos^2 \bar{\varphi}}}$ . Die  $z$ -Koordinate des Ellipsoiden entspricht der  $y$ -Koordinate aus Gleichung (3.5.12). Zusammenfassend finden wir damit als Parametrisierung des Erdellipsoiden durch die Länge  $\lambda$  und die geozentrische Breite  $\bar{\varphi}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b \cos \bar{\varphi} \cos \lambda}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \cos^2 \bar{\varphi}}} \\ \frac{b \cos \bar{\varphi} \sin \lambda}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \cos^2 \bar{\varphi}}} \\ \frac{b \sin \bar{\varphi}}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \cos^2 \bar{\varphi}}} \end{pmatrix}. \quad (4.1.1)$$

### 4.1.2 Reduzierte Breite

Bei der Definition der Ellipse in Abschnitt 3.1 wurde festgestellt, daß eine Ellipse einem Einheitskreis entspricht, wenn die  $x$ -Achse mit dem Faktor  $a$  und die  $y$ -Achse mit dem Faktor  $b$  gestreckt werden. Daraus folgt, daß man den Erdellipsoiden auch als Kugel mit dem Durchmesser  $a$  auffassen kann, dessen  $z$ -Achse um den Faktor  $\frac{b}{a}$  gestaucht wurde. Wenn man also den Ellipsoiden durch Streckung der  $z$ -Achse mit dem Faktor  $\frac{a}{b}$  wieder „entstaucht“, erhält man eine Kugel mit dem Durchmesser  $a$ . Ein Punkt  $P$  des Ellipsoids wandert dabei zu einem Punkt  $P'$ . Aus dieser Überlegung ergeben sich unmittelbar die beiden folgenden Darstellungsweisen des Erdellipsoiden.

#### Gleichung des Erdellipsoiden in kartesischen Koordinaten:

Nach Entstauchung der  $z$ -Achse durch dem Faktor  $\frac{a}{b}$  muß für den Erdellipsoiden die Kugelgleichung  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  gelten, d.h.

$$x^2 + y^2 + \left(\frac{a}{b}z\right)^2 = a^2, \quad (4.1.2)$$

also

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{b}\right)^2 = 1. \quad (4.1.3)$$

**Parametrisierung des Erdellipsoiden durch Länge  $\lambda$  und reduzierte Breite  $\beta$ :**

Aus der Polarkoordinatendarstellung der Kugel folgt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \beta \cos \lambda \\ a \cos \beta \sin \lambda \\ a \sin \beta \end{pmatrix} \quad (4.1.4)$$

nach Stauchung der  $z$ -Achse unmittelbar für den Ellipsoiden:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \beta \cos \lambda \\ a \cos \beta \sin \lambda \\ b \sin \beta \end{pmatrix}. \quad (4.1.5)$$

**4.1.3 Geographische Breite**

Bei genauer Betrachtung von Abbildung 4.1 fällt auf, daß die geographische Breite  $\varphi$  nicht, wie man vielleicht erwarten würde, der geozentrischen Breite entspricht. Stattdessen ist die geographische Breite  $\varphi$  der Winkel zwischen der Äquatorebene und einer auf den ersten Blick etwas mysteriös erscheinenden, durch den Punkt  $P$  verlaufenden Gerade, welche eben nicht durch den Erdmittelpunkt verläuft.

Dieses Rätsel läßt sich lösen, wenn man sich überlegt, auf welche Weise ein Beobachter vor Einführung der Satellitennavigation überhaupt die Breite seines Standpunktes bestimmen konnte. Traditionell geschieht dies durch die Messung der Höhe von Himmelskörpern. Mit der Höhe eines Gestirns ist der Winkel zwischen der Sichtlinie vom Beobachter zum Gestirn und der Sichtlinie vom Beobachter zum Horizont gemeint. Die Horizontebene entspricht der durch den Beobachterstandpunkt verlaufenden Tangentialebene des Ellipsoiden. Schweremessungen liefern die die Flächennormale zur Horizontebene, stehen also senkrecht auf dieser, allerdings können hier lokale Dichteanomalien zu Abweichungen der Lotrichtung von der Flächennormalen führen.

Während also die Horizontebene und deren Flächennormale durch direkte Beobachtung des Horizontes oder durch Schweremessung bestimmbar sind, kann ein Beobachter die Richtung zum Erdmittelpunkt nicht ohne weiteres feststellen. Die geographische Breite wird daher definiert als die Höhe des Himmelsnordpols über dem Horizont. Dies entspricht dem Winkel zwischen der Äquatorebene und der durch den Beobachter verlaufenden Flächennormalen der ebenfalls durch den Beobachter verlaufenden Tangentialebene des Ellipsoiden (Abb. 4.2).

**Umrechnung zwischen geographischer Breite und reduzierter Breite.**

Zur Herleitung einer Umrechnungsformel zwischen geographischer und reduzierter Breite betrachten wir den Schnitt des Ellipsoiden mit der  $x$ - $z$ -Ebene, d.h.  $\lambda = 0$  und damit

auch  $y = 0$ . Wegen der Rotationssymmetrie des Ellipsoiden gelten die für diesen Fall hergeleiteten Umrechnungen zwischen  $\beta$  und  $\varphi$  auch für beliebiges  $\lambda$ .

Aus Abbildung 4.2 kann man entnehmen, daß

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = \frac{dz}{dx}. \quad (4.1.6)$$

Nun folgt aus Gleichung (4.1.3) mit  $y = 0$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (4.1.7)$$

und damit

$$\frac{2x dx}{a^2} + \frac{2z dz}{b^2} = 0 \quad (4.1.8)$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{xb^2}{za^2}. \quad (4.1.9)$$

Setzen wir nun für  $x$  und  $z$  die Werte aus Gleichung (4.1.5) unter Beachtung von  $\lambda = 0$  ein, ergibt sich

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{b^2 a \cos \beta}{a^2 b \sin \beta} \quad (4.1.10)$$

$$= -\frac{b}{a} \frac{1}{\tan \beta}. \quad (4.1.11)$$

Daraus folgt mit Gleichung (4.1.6) unter Verwendung von

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)} = \frac{\sin \frac{\pi}{2} \cos \varphi + \cos \frac{\pi}{2} \sin \varphi}{\cos \frac{\pi}{2} \cos \varphi - \sin \frac{\pi}{2} \sin \varphi} = \frac{\cos \varphi}{-\sin \varphi} = -\frac{1}{\tan \varphi}$$

daß

$$-\frac{1}{\tan \varphi} = -\frac{b}{a} \frac{1}{\tan \beta} \quad (4.1.12)$$

und wegen  $b/a = \sqrt{1 - e^2}$

$$\tan \varphi = \frac{\tan \beta}{\sqrt{1 - e^2}}. \quad (4.1.13)$$

### Umrechnung zwischen geozentrischer Breite und reduzierter Breite

Zur Umrechnung zwischen geographischer und geozentrischer Breite ist es hilfreich, zunächst die Umrechnung zwischen geozentrischer und reduzierter Breite herzuleiten. Aus Abbildung 4.2 sieht man unmittelbar, daß

$$\tan \beta = \frac{z'}{x} \quad (4.1.14)$$

$$\tan \bar{\varphi} = \frac{z}{x} \quad (4.1.15)$$

und damit wegen  $z' = \frac{a}{b}z$  und  $\frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}$

$$\tan \beta = \frac{\tan \bar{\varphi}}{\sqrt{1-e^2}}. \quad (4.1.16)$$

### Umrechnung zwischen geographischer Breite und geozentrischer Breite

Die Verbindung von Gleichung (4.1.16) mit Gleichung (4.1.13) ergibt

$$\tan \varphi = \frac{\tan \bar{\varphi}}{1-e^2}. \quad (4.1.17)$$

### Parametrisierung des Erdellipsoiden durch Länge $\lambda$ und geographische Breite $\varphi$ :

Wir werden nun eine Parametrisierung des Erdellipsoiden durch die Länge  $\lambda$  und die geographische Breite  $\varphi$  herleiten. Dazu werden wir die reduzierte Breite  $\beta$  in Gleichung (4.1.5) mit Hilfe von Gleichung (4.1.13) durch die geographische Breite ersetzen. Aus Gleichung (4.1.5) ergibt sich wegen

$$\tan^2 \beta = \frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \beta} \quad (4.1.18)$$

$$= \frac{1 - \cos^2 \beta}{\cos^2 \beta} = \frac{1}{\cos^2 \beta} - 1 \quad (4.1.19)$$

$$= \frac{\sin^2 \beta}{1 - \sin^2 \beta} = -1 + \frac{1}{1 - \sin^2 \beta} \quad (4.1.20)$$

d.h.

$$|\cos \beta| = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \beta}} \quad (4.1.21)$$

und wegen  $\cos \beta \geq 0$  für  $-\pi/2 \leq \beta \leq \pi/2$

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \beta}} \quad (4.1.22)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + (1 - e^2) \tan^2 \varphi}} \quad (4.1.23)$$

$$= \frac{\cos \varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (4.1.24)$$

$$\cos \beta = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (4.1.25)$$

sowie außerdem

$$|\sin \beta| = \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \tan^2 \beta}} = \frac{|\tan \beta|}{\sqrt{1 + \tan^2 \beta}}, \quad (4.1.26)$$

woraus sich wegen  $\text{sign}(\sin \beta) = \text{sign}(\tan \beta)$  für  $-\pi/2 \leq \beta \leq \pi/2$

$$\sin \beta = \frac{\tan \beta}{\sqrt{1 + \tan^2 \beta}} \quad (4.1.27)$$

$$= \frac{\sqrt{1 - e^2} \tan \varphi}{\sqrt{1 + (1 - e^2) \tan^2 \varphi}} \quad (4.1.28)$$

$$= \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (4.1.29)$$

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (4.1.30)$$

ergibt. Setzt man Gleichungen (4.1.25) und (4.1.30) in Gleichung (4.1.5) ein unter Verwendung von  $b = a\sqrt{1 - e^2}$ , erhält man

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a \cos \varphi \cos \lambda}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \\ \frac{a \cos \varphi \sin \lambda}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \\ \frac{a(1 - e^2) \sin \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \end{pmatrix} \quad (4.1.31)$$

als Parametrisierung des Erdellipsoiden durch geographische Länge  $\lambda$  und geographische Breite  $\varphi$ .

# 5 Die Gauß-Krüger-Abbildung

## 5.1 Einführung der verwendeten Teilabbildungen

Im letzten Abschnitt haben wir die Parametrisierung des Erdellipsoiden durch geographische Länge und Breite hergeleitet. An dieser Stelle sei bemerkt, daß der Erdellipsoid auch *Geoid*  $G$  genannt wird. Im folgenden bezeichnen wir die Parametrisierung des Geoiden mit  $\psi$ , d.h.

$$\psi : (-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow G \subset \mathbb{R}^3 \quad | \quad (\lambda, \varphi) \mapsto (x, y, z) \quad (5.1.1)$$

mit

$$\psi(\lambda, \varphi) = \begin{pmatrix} \frac{a \cos \varphi \cos \lambda}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} \\ \frac{a \cos \varphi \sin \lambda}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} \\ \frac{a(1-e^2) \sin \varphi}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} \end{pmatrix}. \quad (5.1.2)$$

Wir suchen nun eine Karte des Geoiden  $G$ , also eine Abbildung  $\mathcal{G}$  des Geoiden in die Ebene  $\mathbb{R}^2$ , welche die in Abschnitt 2 auf Seite 9 angegebenen Anforderungen erfüllt, d.h.

$$\mathcal{G} : G \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad | \quad (x, y, z) \mapsto (X, Y) \quad (5.1.3)$$

mit

1.  $\mathcal{G}$  ist winkeltreu,
2.  $\mathcal{G}$  bildet den Äquator auf die horizontale Achse von  $\mathbb{R}^2$  ab,
3.  $\mathcal{G}$  bildet den Nullmeridian auf die vertikale Achse von  $\mathbb{R}^2$  ab,
4.  $\mathcal{G}$  ist auf dem Nullmeridian längentreu.

Dabei sind  $\vartheta$  und  $\rho$  die horizontale und vertikale Position eines Punktes in der Karte.

An dieser Stelle sei noch darauf hingewiesen, daß wir hier anstelle des Zentralmeridians eines Sektors den Nullmeridian verwendet haben. Dies vereinfacht die nachfolgenden Rechnungen, ohne eine wesentliche Einschränkung darzustellen. Will man die Gauß-Krüger-Abbildung für einen Sektor berechnen, dessen Zentralmeridian nicht der Nullmeridian ist, so ist von der Länge  $\lambda$  zunächst die Länge  $\lambda_0$  des Zentralmeridians

zu subtrahieren, bevor die Gleichungen der Gauß-Krüger-Abbildung verwendet werden, d.h. man ersetzt in den Gleichungen  $\lambda$  durch  $\lambda - \lambda_0$ .

Für die folgenden Berechnungen ist es sinnvoll, die Parametrisierung  $\psi$  des Geoiden  $G$  zu verwenden. Die Hintereinanderausführung von  $\psi$  und  $\mathcal{G}$  nennen wir dann  $\tilde{\mathcal{G}}$ , d.h.  $\tilde{\mathcal{G}}(\lambda, \varphi) = \mathcal{G}(\psi(\lambda, \varphi)) = (\mathcal{G} \circ \psi)(\lambda, \varphi)$  mit

$$\tilde{\mathcal{G}} : (-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad | \quad (\lambda, \varphi) \mapsto (X, Y). \quad (5.1.4)$$

Dies bedeutet also, daß die Funktion  $\psi$  die geographische Länge und Breite einem Ort auf dem Geoiden zuordnet, die Abbildung  $\mathcal{G}$  diesen Ort des Geoiden in eine Karte abbildet, während die Abbildung  $\tilde{\mathcal{G}}$  die geographische Länge und Breite eines Ortes unmittelbar in die Karte abbildet.

Wir werden die Abbildung  $\mathcal{G}$  nicht auf direktem Wege herleiten. Stattdessen zerlegen wir die Abbildung  $\mathcal{G}$  in die Hintereinanderausführung zweier noch zu bestimmender Abbildungen  $k$  und  $g$ , d.h.  $\mathcal{G} = g \circ k$  mit

$$k : G \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad | \quad (x, y, z) \mapsto (\gamma, \eta), \quad (5.1.5)$$

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad | \quad (\gamma, \eta) \mapsto (X, Y). \quad (5.1.6)$$

Außerdem bezeichnen wir analog zu  $\mathcal{G}$  und  $\tilde{\mathcal{G}}$  die Hintereinanderausführung von  $\psi$  und  $k$  mit  $\tilde{k}$ , d.h.  $\tilde{k} = \psi \circ k$ . Dabei soll  $k$  die ersten der drei oben genannten Bedingungen erfüllen, also winkeltreu sein und Äquator sowie Nullmeridian auf die Achsen von  $\mathbb{R}^2$  abbilden, längentreu auf dem Nullmeridian muß  $k$  aber nicht sein. Die Hintereinanderausführung von  $k$  und  $g$  soll dann alle vier Bedingungen erfüllen. Dies bedeutet unter anderem auch, daß  $g$  winkeltreu sein muß.

Auf den ersten Blick erscheint diese Vorgehensweise unnötig kompliziert — warum sollte man die Abbildung  $\mathcal{G}$  in zwei verschiedene Abbildungen zerlegen, wenn man am Ende doch wieder eine Abbildung  $g$  suchen muß, die sowohl winkeltreu ist, als auch zu einer längentreuen Abbildung des Nullmeridians führt? Warum sucht man dann nicht gleich nach einer Abbildung, die alle vier Bedingungen erfüllt?

Die Antwort darauf ist ein mathematischer Trick. Es ist nicht allzu kompliziert, eine Abbildung zu finden, die den Geoiden  $G$  winkeltreu in die Ebene abbildet. Es ist allerdings keineswegs trivial, diese Abbildung gleichzeitig so einzurichten, daß sie den Nullmeridian längentreu abbildet. Also konstruieren wir zunächst unter Verzicht auf die Längentreue eine Zwischenabbildung  $k$  und biegen diese anschließend durch eine nachgeschaltete Abbildung  $g$  so zurecht, daß dann auch die Längentreue auf dem Nullmeridian gegeben ist. Der große Vorteil dieser Zerlegung ist, daß die zum Zurechtbiegen verwendete Abbildung  $g$  nicht mehr vom Geoiden in die Ebene abbildet, sondern von der Ebene in die Ebene. Das ist der wesentliche Grund, weshalb die Zerlegung von  $\mathcal{G}$  in zwei Teilabbildungen das Problem vereinfacht. Es ist nämlich relativ einfach, winkeltreue Abbildungen der Ebene in die Ebene zu konstruieren. Dazu faßt man die Ebene  $\mathbb{R}^2$



als die Menge aller komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  auf, wobei die horizontale Achse dem Realteil und die vertikale Achse dem Imaginärteil einer komplexen Zahl entspricht. Mit anderen Worten, die gegenüber Gleichungen (5.1.5) und (5.1.6) eigentlich korrektere Definition von  $k$  und  $g$  ist

$$k : G \rightarrow \mathbb{C} \quad | \quad (x, y, z) \mapsto \eta + i\gamma \quad (5.1.7)$$

$$g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad | \quad \eta + i\gamma \mapsto Y + iX. \quad (5.1.8)$$

Nun ist, wie wir in Anhang A zeigen werden, jede stetig differenzierbare Funktion, die komplexe Zahlen auf komplexe Zahlen abbildet, auch winkeltreu. Wir müssen uns demzufolge überhaupt nicht um die automatisch gegebene Winkeltreue von  $g$  kümmern, sondern können uns völlig auf die Herstellung der Längentreue für den Nullmeridian konzentrieren. Es ist also zur Bestimmung von  $g$  einfach nur eine stetig differenzierbare Funktion komplexer Zahlen auf komplexer Zahlen zu konstruieren, welche die dem Nullmeridian entsprechende imaginäre Achse so transformiert, daß der Abstand zweier Orte auf dem Nullmeridian identisch dem Abstand der entsprechenden Kartenorte auf der imaginären Achse ist.

Also noch einmal: Der entscheidende Trick ist der Übergang von der Beschreibung von Punkten der Ebene durch zwei reelle Zahlen zu einer Beschreibung durch eine komplexe Zahl und die Verwendung stetig differenzierbarer komplexwertiger Funktionen. Diesen Trick kann man aber erst anwenden, nachdem der Geoid  $G$  schon einmal in die Ebene abgebildet wurde. Daher erreicht man durch die auf den ersten Blick wie eine Verkomplizierung anmutende Zerlegung der Abbildung  $\mathcal{G}$  in die zwei Abbildungen  $k$  und  $g$  in der Tat eine Vereinfachung — mit der Abbildung  $k$  erzeugt man Winkeltreue, mit der Abbildung  $g$  Längentreue auf dem Nullmeridian.

## 5.2 Überlegungen zur Winkeltreue einer Abbildung

Bisher haben wir von der Winkeltreue einer Abbildung gesprochen, ohne diese mathematisch genau zu definieren. Hätten wir es nur mit Abbildungen zu tun, die aus der Ebene in die Ebene und dabei auch Geraden auf Geraden abbilden, wäre die Definition einfach — eine Abbildung ist winkeltreu, wenn sich die Geraden im Ursprungsraum im gleichen Winkel wie deren Bilder im Bildraum schneiden. Nun ist aber der Geoid keine Ebene, und außerdem werden beispielsweise Breitenkreise auf Geraden abgebildet. Daher muß der Begriff der Winkeltreue für derartige geometrische Körper erweitert werden.

Obleich die Erdoberfläche keine Ebene ist, so sind dennoch kleine Ausschnitte der Erdoberfläche einer Ebene sehr ähnlich, genaugenommen natürlich einer Teilmenge der unendlichen Ebene. Betrachtet man einen kleinen Ausschnitt der Erdoberfläche um einen Standort herum, so sehen die eigentlich kreisförmigen Breitenkreise und elliptischen Meridiane nahezu wie Geraden aus. Wenn man nun den Ausschnitt der Erdoberfläche immer weiter verkleinert und schließlich infinitesimal klein werden läßt, dann sind in diesem

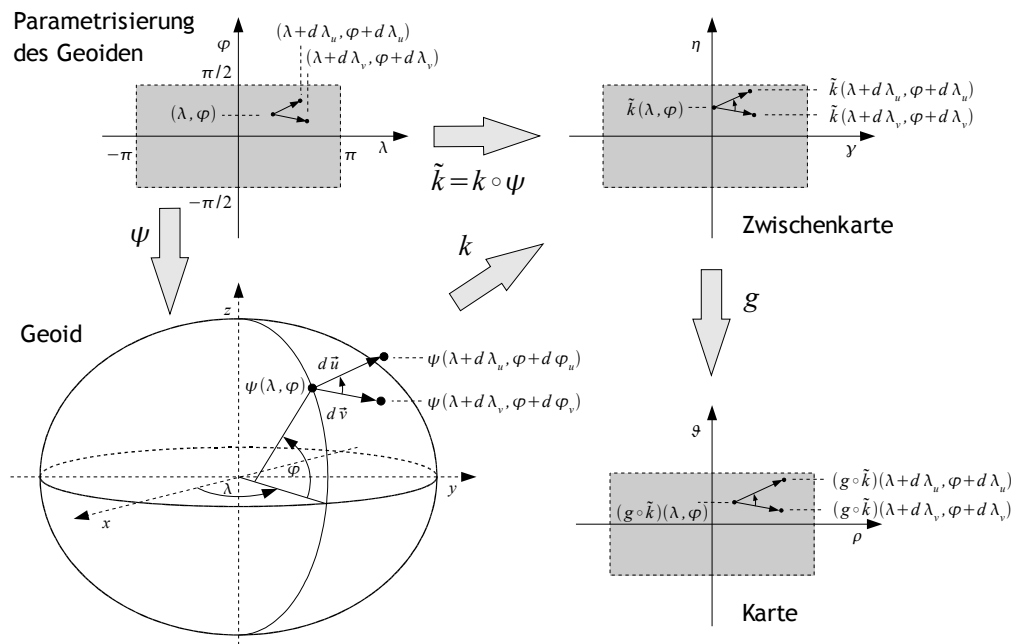


Abbildung 5.1: Die für die Gauß-Krüger-Abbildung verwendeten Funktionen  $\psi$ ,  $k$  und  $g$ .

Ausschnitt Breitenkreise und Meridiane schließlich nicht mehr von Geraden zu unterscheiden. Dies gilt nun nicht nur für Breitenkreise und Meridiane, sondern für beliebige Kurven auf der Erdoberfläche, die keine scharfen Knicke aufweisen. Die Richtung dieser Geraden entspricht der Richtung der Tangenten an diese Kurven im Standort.

Winkeltreue bedeutet also, daß sich in jedem Punkt der Erdoberfläche die Tangenten zweier beliebiger durch diesen Punkt auf der Erdoberfläche verlaufender glatter Kurven im gleichen Winkel schneiden wie deren Bilder in der Karte. Das ist gewährleistet, wenn sich zwei beliebige infinitesimal kleine, tangential zur Erdoberfläche verlaufende Vektoren  $d\vec{u}$  und  $d\vec{v}$  im gleichen Winkel schneiden wie deren Bilder  $dk_{\vec{u}}$  und  $dk_{\vec{v}}$  auf der Karte. Die beiden Vektoren  $d\vec{u}$  und  $d\vec{v}$  können angegeben werden durch

$$d\vec{u} = \begin{pmatrix} dx_{\vec{u}} \\ dy_{\vec{u}} \\ dz_{\vec{u}} \end{pmatrix}, \quad d\vec{v} = \begin{pmatrix} dx_{\vec{v}} \\ dy_{\vec{v}} \\ dz_{\vec{v}} \end{pmatrix}. \quad (5.2.1)$$

Nun sind aber die Differentiale der drei Koordinaten nicht voneinander unabhängig, da  $d\vec{u}$  und  $d\vec{v}$  schließlich tangential zur Erdoberfläche verlaufen sollen. Deshalb ist es hilfreich,  $d\vec{u}$  und  $d\vec{v}$  nicht durch die kartesischen Koordinaten darzustellen, sondern stattdessen die Parametrisierung  $\psi$  des Geoiden zu verwenden, um  $d\vec{u}$  und  $d\vec{v}$  durch Differentiale der geographischen Länge und Breite zu spezifizieren:

$$dx_{\vec{u}} = \frac{\partial \psi_x(\lambda, \varphi)}{\partial \lambda} d\lambda_{\vec{u}} + \frac{\partial \psi_x(\lambda, \varphi)}{\partial \varphi} d\varphi_{\vec{u}} \quad (5.2.2)$$

$$dy_{\vec{u}} = \frac{\partial \psi_y(\lambda, \varphi)}{\partial \lambda} d\lambda_{\vec{u}} + \frac{\partial \psi_y(\lambda, \varphi)}{\partial \varphi} d\varphi_{\vec{u}} \quad (5.2.3)$$

$$dz_{\vec{u}} = \frac{\partial \psi_z(\lambda, \varphi)}{\partial \lambda} d\lambda_{\vec{u}} + \frac{\partial \psi_z(\lambda, \varphi)}{\partial \varphi} d\varphi_{\vec{u}} \quad (5.2.4)$$

oder zusammengefaßt in Vektorschreibweise

$$d\vec{u} = \frac{\partial \psi(\lambda, \varphi)}{\partial(\lambda, \varphi)} \begin{pmatrix} d\lambda_{\vec{u}} \\ d\varphi_{\vec{u}} \end{pmatrix}, \quad (5.2.5)$$

wobei

$$\frac{\partial \psi(\lambda, \varphi)}{\partial(\lambda, \varphi)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi(\lambda, \varphi)}{\partial \lambda} & \frac{\partial \psi(\lambda, \varphi)}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_x(\lambda, \varphi)}{\partial \lambda} & \frac{\partial \psi_x(\lambda, \varphi)}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \psi_y(\lambda, \varphi)}{\partial \lambda} & \frac{\partial \psi_y(\lambda, \varphi)}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \psi_z(\lambda, \varphi)}{\partial \lambda} & \frac{\partial \psi_z(\lambda, \varphi)}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \quad (5.2.6)$$

eine  $2 \times 3$ -Matrix ist. Analoges gilt natürlich auch für  $d\vec{v}$ .

Der Winkel zwischen zwei Vektoren  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  ist gegeben durch

$$\cos \angle(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle}{\sqrt{\langle \vec{u} | \vec{u} \rangle} \sqrt{\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle}}, \quad (5.2.7)$$

wobei  $\langle | \rangle$  das Skalarprodukt zweier Vektoren bezeichnet. Da wir hier ausschließlich die Euklidische Metrik verwenden, gilt

$$\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = \vec{u}^T \vec{v} = (u_x, u_y, u_z) \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z. \quad (5.2.8)$$

Damit finden wir

$$\langle d\vec{u} | d\vec{v} \rangle = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi(\lambda, \varphi)}{\partial(\lambda, \varphi)} & \begin{pmatrix} d\lambda_{\vec{u}} \\ d\varphi_{\vec{u}} \end{pmatrix} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi(\lambda, \varphi)}{\partial(\lambda, \varphi)} & \begin{pmatrix} d\lambda_{\vec{v}} \\ d\varphi_{\vec{v}} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (5.2.9)$$

$$\langle d\vec{u} | d\vec{v} \rangle = \begin{pmatrix} d\lambda_{\vec{u}} \\ d\varphi_{\vec{u}} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi(\lambda, \varphi)}{\partial(\lambda, \varphi)} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi(\lambda, \varphi)}{\partial(\lambda, \varphi)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\lambda_{\vec{v}} \\ d\varphi_{\vec{v}} \end{pmatrix} \quad (5.2.10)$$

$$(5.2.11)$$

$$\langle d\vec{u} | d\vec{v} \rangle = \begin{pmatrix} d\lambda_{\vec{u}} & d\varphi_{\vec{u}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_x(\lambda, \varphi)}{\partial \lambda} & \frac{\partial \psi_y(\lambda, \varphi)}{\partial \lambda} & \frac{\partial \psi_z(\lambda, \varphi)}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \psi_x(\lambda, \varphi)}{\partial \varphi} & \frac{\partial \psi_y(\lambda, \varphi)}{\partial \varphi} & \frac{\partial \psi_z(\lambda, \varphi)}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_x(\lambda, \varphi)}{\partial \lambda} & \frac{\partial \psi_y(\lambda, \varphi)}{\partial \lambda} & \frac{\partial \psi_z(\lambda, \varphi)}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \psi_x(\lambda, \varphi)}{\partial \varphi} & \frac{\partial \psi_y(\lambda, \varphi)}{\partial \varphi} & \frac{\partial \psi_z(\lambda, \varphi)}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\lambda_{\vec{v}} \\ d\varphi_{\vec{v}} \end{pmatrix} \quad (5.2.12)$$

$$\langle d\vec{u} | d\vec{v} \rangle = \begin{pmatrix} d\lambda_{\vec{u}} & d\varphi_{\vec{u}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{(\partial \psi(\lambda, \varphi))^T}{\partial \lambda} \frac{(\partial \psi(\lambda, \varphi))}{\partial \lambda} & \frac{(\partial \psi(\lambda, \varphi))^T}{\partial \lambda} \frac{(\partial \psi(\lambda, \varphi))}{\partial \varphi} \\ \frac{(\partial \psi(\lambda, \varphi))^T}{\partial \varphi} \frac{(\partial \psi(\lambda, \varphi))}{\partial \lambda} & \frac{(\partial \psi(\lambda, \varphi))^T}{\partial \varphi} \frac{(\partial \psi(\lambda, \varphi))}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\lambda_{\vec{v}} \\ d\varphi_{\vec{v}} \end{pmatrix}. \quad (5.2.13)$$

Die vier Elemente der Matrix in Gleichung (5.2.13) werden auch Gaußsche Koeffizienten  $E$ ,  $F$  und  $G$  genannt mit

$$E_\psi(\lambda, \varphi) = \frac{\partial \psi^T}{\partial \lambda} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \quad (5.2.14)$$

$$= \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial \lambda} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi_z}{\partial \lambda} \right)^2 \quad (5.2.15)$$

$$F_\psi(\lambda, \varphi) = \frac{\partial \psi^T}{\partial \lambda} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \quad (5.2.16)$$

$$= \frac{\partial \psi_x}{\partial \lambda} \frac{\partial \psi_x}{\partial \varphi} + \frac{\partial \psi_y}{\partial \lambda} \frac{\partial \psi_y}{\partial \varphi} + \frac{\partial \psi_z}{\partial \lambda} \frac{\partial \psi_z}{\partial \varphi} \quad (5.2.17)$$

$$G_\psi(\lambda, \varphi) = \frac{\partial \psi^T}{\partial \varphi} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \quad (5.2.18)$$

$$= \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi_z}{\partial \varphi} \right)^2 \quad (5.2.19)$$

$$(5.2.20)$$

womit sich Gleichung (5.2.13) auch schreiben läßt als

$$\langle d\vec{u}|d\vec{v}\rangle = (d\lambda_{\vec{u}} \quad d\varphi_{\vec{u}}) \begin{pmatrix} E_{\psi}(\lambda, \varphi) & F_{\psi}(\lambda, \varphi) \\ F_{\psi}(\lambda, \varphi) & G_{\psi}(\lambda, \varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\lambda_{\vec{v}} \\ d\varphi_{\vec{v}} \end{pmatrix} \quad (5.2.21)$$

was letztendlich für den Winkel zwischen  $d\vec{u}$  und  $d\vec{v}$  ergibt, daß

$$\begin{aligned} \cos \sphericalangle(d\vec{u}, d\vec{v}) &= \\ &= \frac{(d\lambda_{\vec{u}} \quad d\varphi_{\vec{u}}) \begin{pmatrix} E_{\psi} & F_{\psi} \\ F_{\psi} & G_{\psi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\lambda_{\vec{v}} \\ d\varphi_{\vec{v}} \end{pmatrix}}{\sqrt{(d\lambda_{\vec{u}} \quad d\varphi_{\vec{u}}) \begin{pmatrix} E_{\psi} & F_{\psi} \\ F_{\psi} & G_{\psi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\lambda_{\vec{u}} \\ d\varphi_{\vec{u}} \end{pmatrix}} \sqrt{(d\lambda_{\vec{v}} \quad d\varphi_{\vec{v}}) \begin{pmatrix} E_{\psi} & F_{\psi} \\ F_{\psi} & G_{\psi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\lambda_{\vec{v}} \\ d\varphi_{\vec{v}} \end{pmatrix}}. \end{aligned} \quad (5.2.22)$$

Betrachten wir nun anstelle der Parametrisierung  $\psi$  die Abbildung  $k$  des Geoiden in die Ebene bzw. die Hintereinanderausführung  $\tilde{k} = k \circ \psi$ . Dann läßt sich unter Verwendung von

$$\begin{aligned} dk_{\vec{u}} &= k(\psi(\lambda, \varphi) + d\vec{u}) - k(\psi(\lambda, \varphi)) \\ &= \tilde{k}(\lambda + d\lambda_{\vec{u}}, \varphi + d\varphi_{\vec{u}}) - \tilde{k}(\lambda, \varphi) \\ &= \frac{\partial \tilde{k}(\lambda, \varphi)}{\partial \lambda} d\lambda_{\vec{u}} + \frac{\partial \tilde{k}(\lambda, \varphi)}{\partial \varphi} d\varphi_{\vec{u}} \end{aligned} \quad (5.2.23)$$

$$\begin{aligned} dk_{\vec{v}} &= k(\psi(\lambda, \varphi) + d\vec{v}) - k(\psi(\lambda, \varphi)) \\ &= \tilde{k}(\lambda + d\lambda_{\vec{v}}, \varphi + d\varphi_{\vec{v}}) - \tilde{k}(\lambda, \varphi) \\ &= \frac{\partial \tilde{k}(\lambda, \varphi)}{\partial \lambda} d\lambda_{\vec{v}} + \frac{\partial \tilde{k}(\lambda, \varphi)}{\partial \varphi} d\varphi_{\vec{v}} \end{aligned} \quad (5.2.24)$$

völlig analog zur oben angegebenen Vorgehensweise berechnen, daß

$$\begin{aligned} \cos \sphericalangle(dk_{\vec{u}}, dk_{\vec{v}}) &= \\ &= \frac{(d\lambda_{\vec{u}} \quad d\varphi_{\vec{u}}) \begin{pmatrix} E_{\tilde{k}} & F_{\tilde{k}} \\ F_{\tilde{k}} & G_{\tilde{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\lambda_{\vec{v}} \\ d\varphi_{\vec{v}} \end{pmatrix}}{\sqrt{(d\lambda_{\vec{u}} \quad d\varphi_{\vec{u}}) \begin{pmatrix} E_{\tilde{k}} & F_{\tilde{k}} \\ F_{\tilde{k}} & G_{\tilde{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\lambda_{\vec{u}} \\ d\varphi_{\vec{u}} \end{pmatrix}} \sqrt{(d\lambda_{\vec{v}} \quad d\varphi_{\vec{v}}) \begin{pmatrix} E_{\tilde{k}} & F_{\tilde{k}} \\ F_{\tilde{k}} & G_{\tilde{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\lambda_{\vec{v}} \\ d\varphi_{\vec{v}} \end{pmatrix}} \end{aligned} \quad (5.2.25)$$

mit

$$E_{\tilde{k}}(\lambda, \varphi) = \frac{\partial \tilde{k}^T}{\partial \lambda} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial \lambda} \quad (5.2.26)$$

$$= \left( \frac{\partial \tilde{k}_\gamma}{\partial \lambda} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tilde{k}_\eta}{\partial \lambda} \right)^2 \quad (5.2.27)$$

$$F_{\tilde{k}}(\lambda, \varphi) = \frac{\partial \tilde{k}^T}{\partial \lambda} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial \varphi} \quad (5.2.28)$$

$$= \frac{\partial \tilde{k}_\gamma}{\partial \lambda} \frac{\partial \tilde{k}_\gamma}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tilde{k}_\eta}{\partial \lambda} \frac{\partial \tilde{k}_\eta}{\partial \varphi} \quad (5.2.29)$$

$$G_{\tilde{k}}(\lambda, \varphi) = \frac{\partial \tilde{k}^T}{\partial \varphi} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial \varphi} \quad (5.2.30)$$

$$= \left( \frac{\partial \tilde{k}_\gamma}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tilde{k}_\eta}{\partial \varphi} \right)^2. \quad (5.2.31)$$

Aus Gleichungen (5.2.22) und (5.2.25) sieht man unmittelbar, daß die Abbildung  $k$  winkeltreu ist, wenn

$$\begin{pmatrix} E_{\tilde{k}}(\lambda, \varphi) & F_{\tilde{k}}(\lambda, \varphi) \\ F_{\tilde{k}}(\lambda, \varphi) & G_{\tilde{k}}(\lambda, \varphi) \end{pmatrix} = p(\lambda, \varphi) \begin{pmatrix} E_\psi(\lambda, \varphi) & F_\psi(\lambda, \varphi) \\ F_\psi(\lambda, \varphi) & G_\psi(\lambda, \varphi) \end{pmatrix} \quad (5.2.32)$$

für eine beliebige positiv reellwertige Funktion

$$p : (-\pi, \pi) \times \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+. \quad (5.2.33)$$

Setzt man nämlich Gleichung (5.2.32) in Gleichung (5.2.25) ein, so kürzt sich die Funktion  $p$  in Zähler und Nenner heraus und wir erhalten für  $\cos \sphericalangle (dk_{\vec{u}}, dk_{\vec{v}})$  den gleichen Ausdruck wie für  $\cos \sphericalangle (d\vec{u}, d\vec{v})$ , d.h. die infinitesimalen Vektoren  $d\vec{u}$  und  $d\vec{v}$  bilden den gleichen Winkel wie deren Bilder  $dk_{\vec{u}}$  und  $dk_{\vec{v}}$ , also ist  $k$  winkeltreu.

### 5.3 Herleitung einer winkeltreuen Abbildung des Geoiden in die Ebene

Nach den einführenden Bemerkungen zur Winkeltreue im letzten Abschnitt wollen wir nun die Abbildung  $k$  konstruieren, welche den Geoiden winkeltreu in die Ebene abbildet. Dazu sind zunächst die Gaußschen Koeffizienten für die Abbildung  $\psi$  zu bestimmen.

### 5.3.1 Die Gaußschen Koeffizienten der Parametrisierung des Geoiden

Zur Bestimmung der Gaußschen Koeffizienten  $E_\psi(\lambda, \varphi)$ ,  $F_\psi(\lambda, \varphi)$  und  $G_\psi(\lambda, \varphi)$  müssen wir zunächst die partiellen Ableitungen von  $\psi(\lambda, \varphi)$  berechnen. Zur Erinnerung sei hier noch einmal die Parametrisierung  $\psi$  des Geoiden durch geographische Länge und Breite wiederholt (siehe Gleichung (4.1.31)):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a \cos \varphi \cos \lambda}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} \\ \frac{a \cos \varphi \sin \lambda}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} \\ \frac{a(1-e^2) \sin \varphi}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} \end{pmatrix}. \quad (5.3.1)$$

Die partiellen Ableitungen nach  $\lambda$  sind relativ einfach zu bestimmen:

$$\frac{\partial \psi(\lambda, \varphi)}{\partial \lambda} = \begin{pmatrix} \frac{-a \cos \varphi \sin \lambda}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} \\ \frac{a \cos \varphi \cos \lambda}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.3.2)$$

Die partiellen Ableitungen nach  $\varphi$  sind etwas aufwendiger, daher betrachten wir die drei kartesischen Koordinaten vorerst getrennt:

$$\frac{\partial \psi_x(\lambda, \varphi)}{\partial \varphi} = a \cos \lambda \left( \frac{-\sin \varphi}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} + \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{\cos \varphi \cdot (-2e^2 \sin \varphi \cos \varphi)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (5.3.3)$$

$$= a \cos \lambda \left( \frac{-\sin \varphi + e^2 \sin^3 \varphi + e^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (5.3.4)$$

$$= a \cos \lambda \left( \frac{-\sin \varphi + e^2 \sin \varphi}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (5.3.5)$$

$$= \frac{-a(1-e^2) \cos \lambda \sin \varphi}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}. \quad (5.3.6)$$

Für  $\partial \psi_y / \partial \varphi$  verläuft die Rechnung völlig analog, da sich  $\psi_x$  und  $\psi_y$  nur durch die von  $\varphi$  unabhängigen Faktoren  $\cos \lambda$  bzw.  $\sin \lambda$  unterscheiden, d.h.

$$\frac{\partial \psi_y(\lambda, \varphi)}{\partial \varphi} = \frac{-a(1-e^2) \sin \lambda \sin \varphi}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}. \quad (5.3.7)$$

Für  $\partial\psi_z/\partial\varphi$  ergibt sich

$$\frac{\partial\psi_z(\lambda, \varphi)}{\partial\varphi} = a(1 - e^2) \left( \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}} + \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{\sin\varphi \cdot (-2e^2 \sin\varphi \cos\varphi)}{(1 - e^2 \sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (5.3.8)$$

$$= a(1 - e^2) \left( \frac{\cos\varphi - e^2 \sin^2\varphi \cos\varphi + e^2 \sin^2\varphi \cos\varphi}{(1 - e^2 \sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (5.3.9)$$

$$= \frac{a(1 - e^2) \cos\varphi}{(1 - e^2 \sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}. \quad (5.3.10)$$

Damit erhalten wir also zusammengefaßt

$$\frac{\partial\psi(\lambda, \varphi)}{\partial\lambda} = \begin{pmatrix} \frac{-a \cos\varphi \sin\lambda}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}} \\ \frac{a \cos\varphi \cos\lambda}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial\psi(\lambda, \varphi)}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} \frac{-a(1 - e^2) \cos\lambda \sin\varphi}{(1 - e^2 \sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} \\ -a(1 - e^2) \sin\lambda \sin\varphi \\ \frac{a(1 - e^2) \cos\varphi}{(1 - e^2 \sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix}. \quad (5.3.11)$$

Nun können wir die Gaußschen Koeffizienten berechnen:

$$E_\psi(\lambda, \varphi) = \left[ \frac{\partial\psi(\lambda, \varphi)}{\partial\lambda} \right]^T \left[ \frac{\partial\psi(\lambda, \varphi)}{\partial\lambda} \right] \quad (5.3.12)$$

$$= \left[ \frac{\partial\psi_x(\lambda, \varphi)}{\partial\lambda} \right]^2 + \left[ \frac{\partial\psi_y(\lambda, \varphi)}{\partial\lambda} \right]^2 + \left[ \frac{\partial\psi_z(\lambda, \varphi)}{\partial\lambda} \right]^2 \quad (5.3.13)$$

$$= \frac{a^2 \cos^2\varphi \sin^2\lambda + a^2 \cos^2\varphi \cos^2\lambda}{1 - e^2 \sin^2\varphi} \quad (5.3.14)$$

$$= \frac{a^2 \cos^2\varphi}{1 - e^2 \sin^2\varphi} \quad (5.3.15)$$

$$F_\psi(\lambda, \varphi) = \left[ \frac{\partial\psi(\lambda, \varphi)}{\partial\lambda} \right]^T \left[ \frac{\partial\psi(\lambda, \varphi)}{\partial\varphi} \right] \quad (5.3.16)$$

$$= \frac{\partial\psi_x(\lambda, \varphi)}{\partial\lambda} \frac{\partial\psi_x(\lambda, \varphi)}{\partial\varphi} + \frac{\partial\psi_y(\lambda, \varphi)}{\partial\lambda} \frac{\partial\psi_y(\lambda, \varphi)}{\partial\varphi} + \frac{\partial\psi_z(\lambda, \varphi)}{\partial\lambda} \frac{\partial\psi_z(\lambda, \varphi)}{\partial\varphi} \quad (5.3.17)$$

$$= \frac{a^2(1 - e^2) \sin\varphi \cos\varphi \sin\lambda \cos\lambda - a^2(1 - e^2) \sin\varphi \cos\varphi \sin\lambda \cos\lambda}{(1 - e^2 \sin^2\varphi)^2} \quad (5.3.18)$$

$$= 0 \quad (5.3.19)$$



$$G_\psi(\lambda, \varphi) = \left[ \frac{\partial \psi(\lambda, \varphi)}{\partial \varphi} \right]^T \left[ \frac{\partial \psi(\lambda, \varphi)}{\partial \varphi} \right] \quad (5.3.20)$$

$$= \left[ \frac{\partial \psi_x(\lambda, \varphi)}{\partial \varphi} \right]^2 + \left[ \frac{\partial \psi_y(\lambda, \varphi)}{\partial \varphi} \right]^2 + \left[ \frac{\partial \psi_z(\lambda, \varphi)}{\partial \varphi} \right]^2 \quad (5.3.21)$$

$$= \frac{a^2(1 - e^2)^2 (\sin^2 \varphi \cos^2 \lambda + \sin^2 \varphi \sin^2 \lambda + \cos^2 \varphi)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^3} \quad (5.3.22)$$

$$= \frac{a^2(1 - e^2)^2}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^3}. \quad (5.3.23)$$

Wir führen außerdem die Definition des Meridiankrümmungsradius  $R_M$  und des Querkrümmungsradius  $R_N$  ein:

$$R_M(\varphi) = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}, \quad (5.3.24)$$

$$R_N(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (5.3.25)$$

Warum dies Krümmungsradien sind, wird in Anhang B erläutert. Mit diesen Definitionen erhalten wir

$$E_\psi(\lambda, \varphi) = R_N^2(\varphi) \cos^2 \varphi, \quad (5.3.26)$$

$$F_\psi(\lambda, \varphi) = 0, \quad (5.3.27)$$

$$G_\psi(\lambda, \varphi) = R_M^2(\varphi). \quad (5.3.28)$$

Man beachte, daß die Gaußschen Koeffizienten nur von  $\varphi$  und nicht von  $\lambda$  abhängen.

### 5.3.2 Die Gaußschen Koeffizienten der Abbildung des Geoiden in die Ebene

Nun ist also die Abbildung  $k$  so zu konstruieren, daß sich die Gaußschen Koeffizienten von  $\tilde{k}$  von denen der Abbildung  $\psi$  nur durch einen Faktor  $p(\lambda, \varphi)$  unterscheiden. Es ist sicherlich naheliegend, die horizontale Koordinate  $\gamma$  der Abbildung  $\tilde{k}$  gleich der geographischen Länge  $\lambda$  zu setzen, d.h.  $\tilde{k}_\gamma(\lambda, \varphi) = \lambda$ . Damit ist automatisch gesichert, daß der Nullmeridian auf die vertikale Achse der Ebene abgebildet wird. Blicke also noch die vertikale Koordinate  $\eta$  der Abbildung  $\tilde{k}$  so zu konstruieren, daß  $k$  winkeltreu ist. Nun muß  $\eta$  eine reellwertige Funktion der geographischen Länge und Breite sein. Wir bezeichnen diese Funktion als  $q(\lambda, \varphi)$ , d.h.  $\eta = q(\lambda, \varphi)$ , auch *isometrische Breite* genannt. Damit erhalten wir also

$$\tilde{k}(\lambda, \varphi) = \begin{pmatrix} \lambda \\ q(\lambda, \varphi) \end{pmatrix}. \quad (5.3.29)$$

Daraus ergeben sich die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \tilde{k}(\lambda, \varphi)}{\partial \lambda} = \left( \frac{1}{\frac{\partial q(\lambda, \varphi)}{\partial \lambda}} \right) \quad \frac{\partial \tilde{k}(\lambda, \varphi)}{\partial \varphi} = \left( \frac{0}{\frac{\partial q(\lambda, \varphi)}{\partial \varphi}} \right) \quad (5.3.30)$$

und somit die Gaußschen Koeffizienten

$$E_{\tilde{k}}(\lambda, \varphi) = \left[ \frac{\partial \tilde{k}_\gamma(\lambda, \varphi)}{\partial \lambda} \right]^2 + \left[ \frac{\partial \tilde{k}_\eta(\lambda, \varphi)}{\partial \lambda} \right]^2 \quad (5.3.31)$$

$$= 1 + \left[ \frac{\partial q(\lambda, \varphi)}{\partial \lambda} \right]^2 \quad (5.3.32)$$

$$F_{\tilde{k}}(\lambda, \varphi) = \frac{\partial \tilde{k}_\gamma(\lambda, \varphi)}{\partial \lambda} \frac{\partial \tilde{k}_\gamma(\lambda, \varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tilde{k}_\eta(\lambda, \varphi)}{\partial \lambda} \frac{\partial \tilde{k}_\eta(\lambda, \varphi)}{\partial \varphi} \quad (5.3.33)$$

$$= \frac{\partial q(\lambda, \varphi)}{\partial \lambda} \frac{\partial q(\lambda, \varphi)}{\partial \varphi} \quad (5.3.34)$$

$$G_{\tilde{k}}(\lambda, \varphi) = \left[ \frac{\partial \tilde{k}_\gamma(\lambda, \varphi)}{\partial \varphi} \right]^2 + \left[ \frac{\partial \tilde{k}_\eta(\lambda, \varphi)}{\partial \varphi} \right]^2 \quad (5.3.35)$$

$$= \left[ \frac{\partial q(\lambda, \varphi)}{\partial \varphi} \right]^2. \quad (5.3.36)$$

### 5.3.3 Die Konstruktion der winkeltreuen Abbildung des Geoiden in die Ebene

Damit nun  $F_\psi(\lambda, \varphi) = p(\lambda, \varphi) \cdot F_{\tilde{k}}(\lambda, \varphi)$  gelten kann, muß wegen  $F_\psi(\lambda, \varphi) \equiv 0$  und  $p(\lambda, \varphi) > 0$  gelten, daß  $F_{\tilde{k}}(\lambda, \varphi) \equiv 0$  ist, d.h. eine der beiden partiellen Ableitungen von  $q$  muß verschwinden. Die partielle Ableitung nach  $\varphi$  darf nicht verschwinden, da sonst  $q$  nicht von  $\varphi$  abhängen würde und damit sowohl die horizontale Koordinate als auch die vertikale Koordinate der Abbildung  $\tilde{k}$  von der geographischen Breite  $\varphi$  unabhängig wären. In diesem Falle würden also alle Punkte gleicher Länge auf einunddenselben Punkt der Karte abgebildet, was sicher nicht gewünscht ist. Folglich muß  $\partial q / \partial \lambda \equiv 0$  sein, d.h. die Funktion  $q$  darf nur von  $\varphi$  und nicht von  $\lambda$  abhängen. Setzen wir dies in Gleichungen (5.3.32), (5.3.34) und (5.3.36) ein, so erhalten wir

$$E_{\tilde{k}}(\lambda, \varphi) = 1 \quad (5.3.37)$$

$$F_{\tilde{k}}(\lambda, \varphi) = 0 \quad (5.3.38)$$

$$G_{\tilde{k}}(\lambda, \varphi) = \left[ \frac{dq(\varphi)}{d\varphi} \right]^2. \quad (5.3.39)$$

Nun soll wegen der Winkeltreue gelten, daß

$$E_\psi(\lambda, \varphi) = p(\lambda, \varphi) \cdot E_{\tilde{k}}(\lambda, \varphi), \quad (5.3.40)$$

woraus sich mit Gleichungen (5.3.26) und (5.3.37) unmittelbar

$$p(\lambda, \varphi) = R_N^2(\varphi) \cos^2 \varphi \quad (5.3.41)$$

ergibt.

Die letzte noch sicherzustellende Forderung zur Erreichung der Winkeltreue von  $k$  ist, daß

$$G_\psi(\lambda, \varphi) = p(\lambda, \varphi) \cdot G_{\tilde{k}}(\lambda, \varphi) \quad (5.3.42)$$

gilt. Mit Gleichungen (5.3.28), (5.3.39) und (5.3.41) erhalten wir

$$R_M^2(\varphi) = R_N^2(\varphi) \cos^2 \varphi \left[ \frac{dq(\varphi)}{d\varphi} \right]^2 \quad (5.3.43)$$

und damit

$$[q'(\varphi)]^2 = \frac{R_M^2(\varphi)}{R_N^2(\varphi) \cos^2 \varphi}. \quad (5.3.44)$$

Da sowohl die Krümmungsradien  $R_M$  und  $R_N$  als auch  $\cos \varphi$  niemals negativ werden, ergibt dies

$$q'(\varphi) = \frac{R_M(\varphi)}{R_N(\varphi) \cos \varphi}, \quad (5.3.45)$$

also

$$q(\varphi) = q(0) + \int_0^\varphi \frac{R_M(\tau)}{R_N(\tau) \cos \tau} d\tau. \quad (5.3.46)$$

Nun soll der Äquator auf die horizontale Achse abgebildet werden, d.h. es soll gelten  $q(0) = 0$ . Demzufolge ist

$$q(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{R_M(\tau)}{R_N(\tau) \cos \tau} d\tau \quad (5.3.47)$$

und wir erhalten letztendlich

$$\tilde{k}(\lambda, \varphi) = \left( \begin{array}{c} \lambda \\ \int_0^\varphi \frac{R_M(\tau)}{R_N(\tau) \cos \tau} d\tau \end{array} \right). \quad (5.3.48)$$

Setzen wir die Definitionen von  $R_M$  und  $R_N$  in Gleichung (5.3.46) ein, folgt

$$q(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \tau)^{3/2}} \frac{(1-e^2 \sin^2 \tau)^{1/2}}{a \cos \tau} d\tau \quad (5.3.49)$$

$$= \int_0^\varphi \frac{1-e^2}{(1-e^2 \sin^2 \tau) \cos \tau} d\tau \quad (5.3.50)$$

$$= \int_0^\varphi \frac{(1-e^2) \cos \tau}{(1-e^2 \sin^2 \tau) \cos^2 \tau} d\tau \quad (5.3.51)$$

$$= \int_0^\varphi \frac{(1-e^2) \cos \tau}{(1-e^2 \sin^2 \tau)(1-\sin^2 \tau)} d\tau \quad (5.3.52)$$

Wir substituieren nun  $\omega = \sin \tau$ , d.h.  $d\omega = \cos \tau d\tau$ :

$$q(\varphi) = \int_0^{\sin \varphi} \frac{1-e^2}{(1-e^2 \omega^2)(1-\omega^2)} d\omega \quad (5.3.53)$$

und ersetzen den Integranden durch dessen Partialbruchzerlegung

$$q(\varphi) = \frac{1}{2} \int_0^{\sin \varphi} \left( \frac{1}{1-\omega} + \frac{1}{1+\omega} - \frac{e^2}{1-e\omega} - \frac{e^2}{1+e\omega} \right) d\omega \quad (5.3.54)$$

$$= \frac{1}{2} \left[ -\ln(1-\omega) \Big|_0^{\sin \varphi} + \ln(1+\omega) \Big|_0^{\sin \varphi} \right. \quad (5.3.55)$$

$$\left. -e \ln(1-e\omega) \Big|_0^{\sin \varphi} + e \ln(1+e\omega) \Big|_0^{\sin \varphi} \right] \quad (5.3.56)$$

$$q(\varphi) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+\sin \varphi}{1-\sin \varphi} \right) - e \cdot \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+e \sin \varphi}{1-e \sin \varphi} \right) . \quad (5.3.57)$$

Unter Verwendung der Definition des  $\operatorname{artanh}$  (siehe Anhang C) läßt sich dies schreiben als

$$q(\varphi) = \operatorname{artanh}(\sin \varphi) - e \operatorname{artanh}(e \sin \varphi) . \quad (5.3.58)$$

Somit erhalten wir schließlich

$$\boxed{\tilde{k}(\lambda, \varphi) = \left( \begin{array}{c} \lambda \\ \operatorname{artanh}(\sin \varphi) - e \operatorname{artanh}(e \sin \varphi) \end{array} \right)} . \quad (5.3.59)$$

für die gesuchte winkeltreue Abbildung des Geoiden in die Ebene. Betrachtet man die Erde als Kugel, also  $e = 0$ , so geht dies übrigens über in die Mercatorabbildung

$$\mathcal{M}(\lambda, \varphi) = \begin{pmatrix} \lambda \\ \operatorname{artanh}(\sin \varphi) \end{pmatrix}. \quad (5.3.60)$$

## 5.4 Herleitung der zweiten Teilabbildung zum Erreichen der Längentreue auf dem Nullmeridian

Wenden wir uns nun der Abbildung  $g$  zu, mit deren Hilfe wir die Längentreue auf dem Nullmeridian erreichen wollen. Wir hatten bereits festgestellt, daß wir hier einen mathematischen Trick anwenden werden, um die durch die Abbildung  $k$  bereits erreichte Winkeltreue nicht wieder zu verlieren. Man kann jeden Punkt der zweidimensionalen Ebene entweder durch zwei reelle Koordinaten oder aber auch durch eine komplexe Zahl eindeutig identifizieren. Dabei entsprechen Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl den zwei reellen Koordinaten. Konstruieren wir die Funktion  $g$  so, daß sie komplexe Zahlen auf komplexe Zahlen abbildet und außerdem im gesamten Definitionsbereich eine Ableitung besitzt, welche stetig ist, dann ist  $g$  winkeltreu (siehe Anhang A). Solche Funktionen nennt man auch *regulär*.

Es ist normalerweise üblich, die horizontale Achse dem Realteil und die vertikale Achse dem Imaginärteil zuzuordnen. Für die Konstruktion der Abbildung  $g$  wird es sich jedoch als zweckmäßiger erweisen, diese Zuordnung umzukehren, d.h. die horizontale Achse (entsprechend Gleichung (5.3.29) die geographische Länge  $\lambda$ ) wird dem Imaginärteil und die vertikale Achse (wiederum entsprechend Gleichung (5.3.29) die isometrische Breite  $q(\lambda, \varphi)$ ) dem Realteil zugeordnet. Dieser Wechsel der Zuordnung der Koordinaten entspricht einer Spiegelung an einer durch den Koordinatenursprung verlaufenden Geraden, die zu den beiden Achsen jeweils einen Winkel von  $45^\circ$  bildet. Da eine Spiegelung eine winkeltreue Abbildung ist, entstehen dadurch keinerlei zusätzliche Forderungen an die Konstruktion von  $g$ . Natürlich wird dann analog der Realteil eines durch die Funktion  $g$  gegebenen Bildpunktes der vertikalen Achse auf der entgültigen Karte zugeordnet, der Imaginärteil der horizontalen Achse. Für die Koordinaten auf dieser finalen Karte werden wir die Symbole  $X$  und  $Y$  verwenden.

Fassen wir also zusammen:

$$g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad | \quad (q(\varphi) + i\lambda) \mapsto (Y + iX) \quad (5.4.1)$$

$$z := q(\varphi) + i\lambda \quad (5.4.2)$$

$$X := \Im g(z) \quad (5.4.3)$$

$$Y := \Re g(z) \quad (5.4.4)$$

$$g(z) = Y + iX \quad (5.4.5)$$

Zur Konstruktion der Funktion  $g$  werden wir nun deren Taylor-Entwicklung um den Punkt  $q(\varphi) + i \cdot 0$  herleiten. Dies bedeutet also, daß wir zunächst die Funktion  $g$  auf dem Zentralmeridian, d.h. für  $\lambda = 0$ , bestimmen müssen. Für eine beliebige Position  $q(\varphi) + i\lambda$  entwickeln wir dann  $g$  um  $q(\varphi) + i \cdot 0$  nach Potenzen von  $i\lambda$ :

$$g(q(\varphi) + i\lambda) = g(q(\varphi)) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^{(n)}(q(\varphi))}{n!} (i\lambda)^n . \quad (5.4.6)$$

Nun ist jede reguläre Funktion beliebig oft stetig differenzierbar, die in Gleichung (5.4.6) verwendeten Ableitungen existieren also tatsächlich und sind stetig, wenn  $g$  regulär ist. Um diesen Satz beweisen zu können, müßten wir eine Einführung in die Anfangsgründe der Funktionentheorie vorausschicken, was den Rahmen des vorliegenden Schriftstücks sprengen würde. Dem interessierten Leser sei daher die Lektüre eines entsprechenden Lehrbuches empfohlen, der Beweis wird unter Verwendung der CAUCHYSchen Integralformel geführt.

Auf dem Zentralmeridian, also für  $\lambda = 0$ , soll die Abbildung  $\mathcal{G} = g \circ k$  längentreu sein. Das bedeutet, daß die Differenz  $g(q(\varphi_1)) - g(q(\varphi_2))$  für zwei beliebige geographische Breiten  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  der Länge der auf dem Zentralmeridian verlaufenden Verbindungslinie zwischen diesen beiden Breitengraden entsprechen muß. Da insbesondere der Äquator auf die Achse  $Y = 0$  und der Zentralmeridian auf die Achse  $X = 0$  abgebildet werden sollen und  $q(0) = 0$  ist, folgt unmittelbar, daß  $g(q(0)) = g(0) = 0$  gelten muß. Setzt man  $\varphi_2 = 0$ , so sieht man sofort, daß  $g(q(\varphi))$  der Länge des auf dem Nullmeridian verlaufenden Bogens zwischen dem Äquator und der geographischen Breite  $\varphi$  entsprechen muß. Wir bezeichnen diese Länge des Meridianbogens mit  $s(\varphi)$ . Da sowohl  $\varphi$  als auch die Länge des Meridianbogens reelle Zahlen sind, bildet  $s$  von reellen Zahlen auf reelle Zahlen ab, ist somit im Gegensatz zu  $g$  eine rein reelle Funktion. Aus den obigen Betrachtungen folgt also, daß  $g(q(\varphi)) = s(\varphi)$ .

Da die Funktion  $g$  regulär sein soll und damit alle Ableitungen von  $g$  stetig sind, ist der Wert einer Ableitung von  $g$  in einem Punkt  $z$  unabhängig davon, aus welcher Richtung man sich bei der Berechnung des Grenzwertes

$$g^{(n+1)}(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{g^{(n)}(z + \Delta z) - g^{(n)}(z)}{\Delta z} \quad (5.4.7)$$

nähert. Man kann sich also insbesondere auf der reellen Achse an einen Punkt  $z = q(\varphi)$  annähern, um die Ableitung von  $g$  in diesem Punkt zu bestimmen. Da nun aber, wie eben festgestellt, die Funktion  $g(z)$  für reelle  $z = q(\varphi)$  mit der Funktion  $s(\varphi)$  identisch ist, gilt unter Verwendung der Kettenregel

$$\frac{ds(\varphi)}{d\varphi} = \frac{dg(q(\varphi))}{d\varphi} = g'(q(\varphi)) q'(\varphi) \quad (5.4.8)$$

$$g'(q(\varphi)) = \frac{s'(\varphi)}{q'(\varphi)} \quad (5.4.9)$$

und somit wegen Gleichung (5.3.45)

$$g'(q(\varphi)) = \frac{R_N(\varphi) \cos \varphi}{R_M(\varphi)} s'(\varphi). \quad (5.4.10)$$

Die höheren Ableitungen von  $g$  kann man, wieder unter Verwendung der Kettenregel, iterativ bestimmen:

$$\frac{d}{d\varphi} g^{(n)}(q(\varphi)) = g^{(n+1)}(q(\varphi)) q'(\varphi) \quad (5.4.11)$$

$$g^{(n+1)}(q(\varphi)) = \frac{R_N(\varphi) \cos \varphi}{R_M(\varphi)} \frac{d}{d\varphi} g^{(n)}(q(\varphi)). \quad (5.4.12)$$

Nun sind alle in Gleichungen (5.4.10) und (5.4.12) auftretenden Werte reell, folglich ist auch  $g^{(n)}(q(\varphi))$  reell für jedes  $n$  und jedes  $\varphi$ . Man kann dann in Gleichung (5.4.6) Realteil und Imaginärteil der Funktion  $g$  leicht voneinander abtrennen und erhält

$$X(\lambda, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} g^{(2n+1)}(q(\varphi)) \lambda^{2n+1} \quad (5.4.13)$$

$$Y(\lambda, \varphi) = s(\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} g^{(2n)}(q(\varphi)) \lambda^{2n}. \quad (5.4.14)$$

Mit diesen beiden Gleichungen haben wir also die gesuchte Gauß-Krüger-Abbildung hergeleitet. Ein guter Teil Arbeit liegt allerdings noch vor uns, nämlich die Berechnung der Meridianbogenlänge  $s(\varphi)$  sowie der Ableitungen  $g^{(n)}$  unter Verwendung von Gleichungen (5.4.10) und (5.4.12). Diesen Berechnungen werden wir uns in den nächsten beiden Abschnitten widmen.

Bevor wir jedoch damit beginnen, wollen wir noch zeigen, daß  $g$  tatsächlich eine reguläre Funktion ist. Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, daß  $s(\varphi)$  stetig differenzierbar ist. Unter Verwendung von Gleichungen (5.4.10) und (5.4.12) folgt daraus, daß die Funktion  $g$  auf der reellen Achse beliebig oft stetig differenzierbar ist, da, wie man sich leicht überzeugt, sämtliche in diesen beiden Gleichungen auftretenden Faktoren beliebig oft stetig differenzierbar sind (unter Beachtung von  $e < 1$  und  $\cos \varphi > 0$  für  $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ). Aus Gleichung (5.4.6) folgt dann, daß die Funktion  $g$  eine unendliche Reihe darstellt, wobei jeder Summand eine stetig differenzierbare Funktion ist. Da nun aber eine Summe regulärer Funktionen selbst regulär ist, folgt unmittelbar, daß  $g$  eine reguläre Funktion ist, falls die Reihe konvergiert.

### 5.4.1 Berechnung der Länge eines Meridianbogens

Widmen wir uns also nun zunächst der Berechnung der Länge eines Meridianbogens. Ein differentiell kleines Kurvenstück des Geoiden hat die Länge

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}. \quad (5.4.15)$$

Verwenden wir nun Gleichung (5.2.21) mit  $d\vec{u} = d\vec{v} = (dx, dy, dz)$ , erhalten wir

$$ds = \sqrt{(d\lambda \quad d\varphi) \begin{pmatrix} E_\psi(\lambda, \varphi) & F_\psi(\lambda, \varphi) \\ F_\psi(\lambda, \varphi) & G_\psi(\lambda, \varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\lambda \\ d\varphi \end{pmatrix}}. \quad (5.4.16)$$

Da wir die Länge einer Kurve auf dem Nullmeridian bestimmen wollen, ist  $d\lambda = 0$ , d.h.

$$ds = \sqrt{G_\psi(\lambda, \varphi)(d\varphi)^2}. \quad (5.4.17)$$

Unter Verwendung von Gleichung (5.3.28) erhalten wir dann

$$\begin{aligned} s(\varphi) &= \int_0^\varphi R_M(\tau) d\tau \\ &= \int_0^\varphi \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \tau)^{3/2}} d\tau. \end{aligned} \quad (5.4.18)$$

Leider ist dies ein elliptisches Integral, das sich nicht geschlossen lösen läßt. Um das Integral dennoch berechnen zu können, ersetzen wir den Integranden durch eine unendliche Reihe. Hierzu verwenden wir die in Anhang D hergeleitete Newtonschen Binomische Reihe

$$(1 - \xi)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\alpha}{n} \xi^n, \quad (5.4.19)$$

für  $|\xi| < 1$  und beliebiges  $\alpha \in \mathbb{R}$  mit

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \quad \text{für alle } n \geq 1 \text{ und} \quad (5.4.20)$$

$$\binom{\alpha}{n} := 1 \quad \text{für } n = 0. \quad (5.4.21)$$

Es ist dabei  $|\xi| = |e^2 \sin^2 \tau| < 1$ , womit die Konvergenz der Reihe gewährleistet ist.

$$s(\varphi) = a(1-e^2) \int_0^\varphi \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-\frac{3}{2}}{n} (e \sin \tau)^{2n} d\tau. \quad (5.4.22)$$

Jetzt sind wir zwar ein kleines Stück weiter, da dies nun eine unendliche Reihe von Integralen ist, deren jedes kein elliptisches Integral mehr darstellt. Allerdings ist das Integral der Funktion  $\sin^{2n}(\tau)$  ebenfalls nicht direkt zu berechnen. Es wäre also schön, wenn man  $\sin^{2n}(\tau)$  in irgendeiner Weise durch nichtpotenzierte Winkelfunktionen ersetzen könnte,



#### 5.4 Herleitung der zweiten Teilabbildung zum Erreichen der Längentreue auf dem Nullmeridian

deren Integration dann einfach ist. Glücklicherweise ist dies in der Tat möglich, wir verwenden dazu die im Anhang E hergeleitete Formel von Moivre

$$\sin^{2n}(\tau) = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} \cos((2n-2k)\tau). \quad (5.4.23)$$

Außerdem ist

$$\binom{-\frac{3}{2}}{n} = \frac{(-\frac{3}{2})(-\frac{3}{2}-1)\cdots(-\frac{3}{2}-(n-1))}{n!} \quad (5.4.24)$$

$$= (-1)^n \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}{2^n n!} \quad (5.4.25)$$

$$= (-1)^n \prod_{i=0}^{n-1} \frac{2i+3}{2i+2}. \quad (5.4.26)$$

Man beachte dabei, daß das Produkt für  $n = 0$  keine Elemente enthält, in diesem Fall ist für das Produkt der Wert 1 einzusetzen. Damit erhalten wir also

$$s(\varphi) = a(1-e^2) \times \int_0^\varphi \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \prod_{i=0}^{n-1} \frac{2i+3}{2i+2} e^{2n} \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} \cos((2n-2k)\tau) d\tau \quad (5.4.27)$$

Da das Integral einer Summe gleich der Summe der Integrale ist, d.h. da Summenbildung und Integration in ihrer Reihenfolge vertauschbar sind, ergibt sich damit

$$s(\varphi) = a(1-e^2) \times \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \prod_{i=0}^{n-1} \frac{2i+3}{2i+2} e^{2n} \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} \int_0^\varphi \cos((2n-2k)\tau) d\tau \quad (5.4.28)$$

Wir müssen in der Summe über  $k$  nun den Fall  $k = n$  getrennt betrachten, da in diesem Fall das Argument des  $\cos$  verschwindet und sich dieser daher auf den Faktor 1 reduziert:

$$s(\varphi) = a(1-e^2) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \prod_{i=0}^{n-1} \frac{2i+3}{2i+2} e^{2n} \frac{1}{2^{2n}} \times \left[ \left( \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} \int_0^\varphi \cos((2n-2k)\tau) d\tau \right) + \left( (-1)^n \binom{2n}{n} \int_0^\varphi d\tau \right) \right] \quad (5.4.29)$$

$$s(\varphi) = a(1 - e^2) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{2n}}{2^{2n}} \left( \prod_{i=0}^{n-1} \frac{2i+3}{2i+2} \right) \times \left[ \left( \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} \frac{\sin((2n-2k)\tau)}{2n-2k} \right) \Big|_0^\varphi \right] + \left( (-1)^n \binom{2n}{n} \tau \Big|_0^\varphi \right) \quad (5.4.30)$$

$$s(\varphi) = a(1 - e^2) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{2n}}{2^{2n}} \left( \prod_{i=0}^{n-1} \frac{2i+3}{2i+2} \right) \times \left[ \left( \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} \frac{\sin((2n-2k)\varphi)}{2n-2k} \right) + \left( (-1)^n \binom{2n}{n} \varphi \right) \right]. \quad (5.4.31)$$

Eine wichtige Frage ist nun, wieviele Glieder der unendlichen Reihe berechnet werden müssen, um eine ausreichende Genauigkeit zu erhalten. Dazu bezeichnen wir die endliche Reihe von  $n = 0$  bis  $n = m$  als  $s_m(\varphi)$ , d.h.

$$s_m(\varphi) = a(1 - e^2) \sum_{n=0}^m (-1)^n \frac{e^{2n}}{2^{2n}} \left( \prod_{i=0}^{n-1} \frac{2i+3}{2i+2} \right) \times \left[ \left( \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} \frac{\sin((2n-2k)\varphi)}{2n-2k} \right) + \left( (-1)^n \binom{2n}{n} \varphi \right) \right]. \quad (5.4.32)$$

Das Restglied  $R_M(\varphi) = s(\varphi) - s_m(\varphi)$  ist dann

$$R_M(\varphi) = a(1 - e^2) \sum_{n=m+1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{2n}}{2^{2n}} \left( \prod_{i=0}^{n-1} \frac{2i+3}{2i+2} \right) \times \left[ \left( \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} \frac{\sin((2n-2k)\varphi)}{2n-2k} \right) + \left( (-1)^n \binom{2n}{n} \varphi \right) \right]. \quad (5.4.33)$$

Wir wollen nun eine obere Grenze für dieses Restglied finden:

$$|R_M(\varphi)| \leq a |1 - e^2| \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{e^{2n}}{2^{2n}} \left( \prod_{i=0}^{n-1} \frac{2i+3}{2i+2} \right) \times \left[ \left( \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{2n} \binom{2n}{k} \frac{|\sin((2n-2k)\varphi)|}{|2n-2k|} \right) + \left( \binom{2n}{n} |\varphi| \right) \right]. \quad (5.4.34)$$

#### 5.4 Herleitung der zweiten Teilabbildung zum Erreichen der Längentreue auf dem Nullmeridian

Nun ist  $0 \leq e < 1$ , d.h.  $|1 - e^2| = (1 - e^2)$ . Außerdem gilt  $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$  und

$$\frac{|\sin((2n - 2k)\varphi)|}{|2n - 2k|} \leq \frac{1}{2|n - k|} \leq \frac{1}{2} < \frac{\pi}{2}. \quad (5.4.35)$$

Für das Produkt finden wir schließlich wegen

$$0 \leq i \quad (5.4.36)$$

$$0 \leq 2i \quad (5.4.37)$$

$$4i + 6 \leq 6i + 6 \quad (5.4.38)$$

$$2(2i + 3) \leq 3(2i + 2) \quad (5.4.39)$$

$$\frac{2i + 3}{2i + 2} \leq \frac{3}{2}, \quad (5.4.40)$$

daß

$$\prod_{i=0}^{n-1} \frac{2i + 3}{2i + 2} \leq \prod_{i=0}^{n-1} \frac{3}{2} = \left(\frac{3}{2}\right)^n. \quad (5.4.41)$$

Damit erhalten wir also

$$|R_M(\varphi)| \leq a(1 - e^2) \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{e^{2n}}{2^{2n}} \left(\frac{3}{2}\right)^n \left[ \left( \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{2n} \binom{2n}{k} \frac{\pi}{2} \right) + \left( \binom{2n}{n} \frac{\pi}{2} \right) \right] \quad (5.4.42)$$

$$= a(1 - e^2) \frac{\pi}{2} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{e^{2n}}{2^{2n}} \left(\frac{3}{2}\right)^n \left( \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \right) \quad (5.4.43)$$

$$= a(1 - e^2) \frac{\pi}{2} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{e^{2n}}{2^{2n}} \left(\frac{3}{2}\right)^n (1 + 1)^{2n} \quad (5.4.44)$$

$$= a(1 - e^2) \frac{\pi}{2} \sum_{n=m+1}^{\infty} \left(\frac{3e^2}{2}\right)^n \quad (5.4.45)$$

$$= a(1 - e^2) \frac{\pi}{2} \left(\frac{3e^2}{2}\right)^{m+1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3e^2}{2}\right)^n. \quad (5.4.46)$$

Die Summe konvergiert für  $3e^2/2 < 1$ , d.h. für  $e < \sqrt{2/3}$ , was für alle für die Erde realistischen Werten von  $e$  der Fall ist. Dann ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3e^2}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{3e^2}{2}} \quad (5.4.47)$$

und damit

$$|R_M(\varphi)| \leq a \pi \frac{1 - e^2}{2 - 3e^2} \left( \frac{3e^2}{2} \right)^{m+1}. \quad (5.4.48)$$

Wir haben nun also eine obere Grenze für das Restglied  $R_M$ , welches sich ergibt, wenn man die Reihe in Gleichung (5.4.31) bis  $n = m$  berechnet. In der Praxis verwendet man als Abbruchbedingung für die Reihe aber in der Regel nicht ein bestimmtes maximales  $n$ , sondern eine maximale Potenz von  $e$ , d.h. die Reihe wird soweit entwickelt, bis sämtliche im Restglied verbleibenden Summanden einen Faktor  $e^{2j}$  mit  $j \geq p+1$  enthalten, wobei  $2p$  die Potenz von  $e$  ist, bis zu der die Reihe berechnet wird. Nun erreicht man diese Abbruchbedingung aber nicht, wenn man bis zu einem bestimmten maximalen  $n$  aufsummiert. Grund dafür ist der außerhalb der Summe befindliche Faktor  $(1 - e^2)$ . Berechnet man die Reihe bis  $n = m$ , so führt der Term  $-e^2$  im Faktor  $(1 - e^2)$  dazu, daß die maximale Potenz von  $e$  gerade  $2m+2$  ist. Dieselbe Potenz erhält man nun aber auch für  $n = m+1$ , wenn die Summe mit dem Term 1 im Faktor  $(1 - e^2)$  multipliziert wird. um dieses Problem zu lösen, muß der Faktor  $(1 - e^2)$  in Gleichung (5.4.31) ausmultipliziert werden.

$$\begin{aligned} s(\varphi) &= a \sum_{n=0}^p (-1)^n \frac{e^{2n}}{2^{2n}} \left( \prod_{i=0}^{n-1} \frac{2i+3}{2i+2} \right) \times \\ &\times \left[ \left( \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} \frac{\sin((2n-2k)\varphi)}{2n-2k} \right) + \left( (-1)^n \binom{2n}{n} \varphi \right) \right] + \\ &- a \sum_{n=0}^{p-1} (-1)^n \frac{e^{2n+2}}{2^{2n}} \left( \prod_{i=0}^{n-1} \frac{2i+3}{2i+2} \right) \times \\ &\times \left[ \left( \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} \frac{\sin((2n-2k)\varphi)}{2n-2k} \right) + \left( (-1)^n \binom{2n}{n} \varphi \right) \right] + R(2p). \quad (5.4.49) \end{aligned}$$

Wir erreichen also die Berechnung bis zu einer bestimmten Potenz  $2p$  von  $e$ , indem die zweite Summe nur bis  $(p-1)$  und nicht wie die erste Summe bis  $p$  läuft. Mit  $R(2p)$  wird das Restglied bei Entwicklung bis zur Potenz  $e^{2p}$  bezeichnet. Nun läßt sich dies unter Verwendung von Gleichung (5.4.32) auch darstellen als

$$s(\varphi) = \frac{s_p(\varphi) - e^2 s_{p-1}(\varphi)}{1 - e^2} + R(2p), \quad (5.4.50)$$

#### 5.4 Herleitung der zweiten Teilabbildung zum Erreichen der Längentreue auf dem Nullmeridian

was man umformen kann zu

$$R(2p) = \frac{[s_p(\varphi) - s(\varphi)] - e^2[s_{p-1}(\varphi) - s(\varphi)]}{1 - e^2} \quad (5.4.51)$$

$$= \frac{R_p - e^2 R_{p-1}}{1 - e^2}, \quad (5.4.52)$$

wobei mit Gleichung (5.4.48) obere Grenzen für  $R_p$  und  $R_{p-1}$  angegeben werden können. Es ergibt sich also

$$|R(2p)| \leq \frac{|R_p| + e^2 |R_{p-1}|}{1 - e^2} \quad (5.4.53)$$

$$\leq \frac{a \pi}{2 - 3e^2} \left(\frac{3e^2}{2}\right)^p \left(\frac{3e^2}{2} + e^2\right), \quad (5.4.54)$$

d.h.

$$|R(2p)| \leq \frac{5 a \pi}{3(2 - 3e^2)} \left(\frac{3e^2}{2}\right)^{p+1}. \quad (5.4.55)$$

Setzen wir nun beispielsweise für  $a$  und  $e$  die Werte des Bessel-Ellipsoiden ein, d.h.  $a = 6.377.397,155$  m und  $e = 0,081696830396505$ , so erhalten wir

$$|R(0)| \leq 169 \text{ km} \quad (5.4.56)$$

$$|R(2)| \leq 1690 \text{ m} \quad (5.4.57)$$

$$|R(4)| \leq 16,9 \text{ m} \quad (5.4.58)$$

$$|R(6)| \leq 16,9 \text{ cm} \quad (5.4.59)$$

$$|R(8)| \leq 1,7 \text{ mm} \quad (5.4.60)$$

$$|R(10)| \leq 17 \mu\text{m} \quad (5.4.61)$$

$$|R(12)| \leq 170 \text{ nm}. \quad (5.4.62)$$

Eine Genauigkeit der Abbildung von  $17\mu\text{m}$  sollte für alle praktischen Zwecke ausreichend sein, daher wird die Reihe bis zur zehnten Potenz von  $e$  berechnet:

$$\begin{aligned} s(\varphi) &= a \sum_{n=0}^5 (-1)^n \frac{e^{2n}}{2^{2n}} \left( \prod_{i=0}^{n-1} \frac{2i+3}{2i+2} \right) \times \\ &\times \left[ \left( \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} \frac{\sin((2n-2k)\varphi)}{2n-2k} \right) + \left( (-1)^n \binom{2n}{n} \varphi \right) \right] + \\ &- a \sum_{n=0}^4 (-1)^n \frac{e^{2n+2}}{2^{2n}} \left( \prod_{i=0}^{n-1} \frac{2i+3}{2i+2} \right) \times \end{aligned}$$

$$\times \left[ \left( \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} \frac{\sin((2n-2k)\varphi)}{2n-2k} \right) + \left( (-1)^n \binom{2n}{n} \varphi \right) \right] + R(10). \quad (5.4.63)$$

Um die beiden Summen über  $n$  zusammenfassen zu können, ersetzen wir zunächst in der zweiten Summe  $n \rightarrow (n-1)$ :

$$\begin{aligned} s(\varphi) &= a \sum_{n=0}^5 (-1)^n \frac{e^{2n}}{2^{2n}} \left( \prod_{i=0}^{n-1} \frac{2i+3}{2i+2} \right) \times \\ &\times \left[ \left( \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} \frac{\sin((2n-2k)\varphi)}{2n-2k} \right) + \left( (-1)^n \binom{2n}{n} \varphi \right) \right] + \\ &- a \sum_{n=1}^5 (-1)^{n-1} \frac{e^{2n}}{2^{2n-2}} \left( \prod_{i=0}^{n-2} \frac{2i+3}{2i+2} \right) \times \\ &\times \left[ \left( \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n-1}}^{2n-2} (-1)^k \binom{2n-2}{k} \frac{\sin((2n-2-2k)\varphi)}{2n-2-2k} \right) + \left( (-1)^{n-1} \binom{2n-2}{n-1} \varphi \right) \right] + R(10). \end{aligned} \quad (5.4.64)$$

Damit die nachfolgenden Gleichungen nicht gar zu lang werden, zerlegen wir die Gesamtsumme  $s(\varphi)$  in zwei Summanden  $\tilde{s}(\varphi)$  und  $\hat{s}(\varphi)$ , d.h.

$$s(\varphi) = \tilde{s}(\varphi) + \hat{s}(\varphi) + R(10), \quad (5.4.65)$$

wobei  $\tilde{s}(\varphi)$  alle Terme mit der Sinusfunktion enthält,  $\hat{s}(\varphi)$  alle ohne diese. Damit ergibt sich zunächst für  $\hat{s}(\varphi)$ :

$$\begin{aligned} \hat{s}(\varphi) &= a \sum_{n=0}^5 (-1)^n \frac{e^{2n}}{2^{2n}} \left( \prod_{i=0}^{n-1} \frac{2i+3}{2i+2} \right) \left[ \left( (-1)^n \binom{2n}{n} \varphi \right) \right] + \\ &- a \sum_{n=1}^5 (-1)^{n-1} \frac{e^{2n}}{2^{2n-2}} \left( \prod_{i=0}^{n-2} \frac{2i+3}{2i+2} \right) \left[ \left( (-1)^{n-1} \binom{2n-2}{n-1} \varphi \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.4.66)$$

Wir berechnen nun den Summanden für  $n=0$  in der ersten Summe explizit und verwenden außerdem

$$\prod_{i=0}^{n-1} \frac{2i+3}{2i+2} = \frac{2n+1}{2n} \prod_{i=0}^{n-2} \frac{2i+3}{2i+2} \quad (5.4.67)$$

und

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{2n(2n-1)}{n^2} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} = \frac{2n(2n-1)}{n^2} \binom{2n-2}{n-1}, \quad (5.4.68)$$

#### 5.4 Herleitung der zweiten Teilabbildung zum Erreichen der Längentreue auf dem Nullmeridian

womit wir folgendes erhalten:

$$\hat{s}(\varphi) = a\varphi \left\{ 1 + \sum_{n=1}^5 \frac{e^{2n}}{2^{2n-2}} \left( \prod_{i=0}^{n-2} \frac{2i+3}{2i+2} \right) \binom{2n-2}{n-1} \left( \frac{1}{4} \frac{2n+1}{2n} \frac{2n(2n-1)}{n^2} - 1 \right) \right\} \quad (5.4.69)$$

$$= a\varphi \left\{ 1 + \sum_{n=1}^5 e^{2n} \left[ \frac{1}{2^{2n-2}} \left( \prod_{i=0}^{n-2} \frac{2i+3}{2i+2} \right) \binom{2n-2}{n-1} \left( \frac{4n^2-1}{4n^2} - 1 \right) \right] \right\} \quad (5.4.70)$$

$$= a\varphi \left\{ 1 - \sum_{n=1}^5 e^{2n} \left[ \frac{1}{2^{2n} n^2} \left( \prod_{i=0}^{n-2} \frac{2i+3}{2i+2} \right) \binom{2n-2}{n-1} \right] \right\} \quad (5.4.71)$$

$$\begin{aligned} \hat{s}(\varphi) = a\varphi \left\{ 1 - e^2 \frac{1}{2^2 \cdot 1} \cdot 1 \cdot 1 - e^4 \frac{1}{2^4 \cdot 2^2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{1 \cdot 1} - e^6 \frac{1}{2^6 \cdot 3^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2} \right. \\ \left. - e^8 \frac{1}{2^8 \cdot 4^2} \cdot \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} \right. \\ \left. - e^{10} \frac{1}{2^{10} \cdot 5^2} \cdot \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} \right\} \quad (5.4.72) \end{aligned}$$

$$\hat{s}(\varphi) = a\varphi \left( 1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{64}e^4 - \frac{5}{256}e^6 - \frac{175}{16384}e^8 - \frac{441}{65536}e^{10} \right). \quad (5.4.73)$$

Wenden wir uns nun  $\tilde{s}(\varphi)$  zu:

$$\begin{aligned} \tilde{s}(\varphi) = a \sum_{n=0}^5 (-1)^n \frac{e^{2n}}{2^{2n}} \left( \prod_{i=0}^{n-1} \frac{2i+3}{2i+2} \right) \left( \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} \frac{\sin((2n-2k)\varphi)}{2n-2k} \right) + \\ - a \sum_{n=1}^5 (-1)^{n-1} \frac{e^{2n}}{2^{2n-2}} \left( \prod_{i=0}^{n-2} \frac{2i+3}{2i+2} \right) \times \\ \times \left( \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n-1}}^{2n-2} (-1)^k \binom{2n-2}{k} \frac{\sin((2n-2-2k)\varphi)}{2n-2-2k} \right). \quad (5.4.74) \end{aligned}$$

Nun verschwindet der Summand für  $n=0$  in der ersten Summe über  $n$ , da die Summe über  $k$  dann wegen  $k \neq n$  keine Elemente enthält. Zusätzlich substituieren wir  $k \rightarrow k-n$  in der ersten Summe über  $k$  sowie  $k \rightarrow k-n+1$  in der zweiten Summe über  $k$  und

verwenden  $\sin(-x) = -\sin(x)$ :

$$\begin{aligned} \tilde{s}(\varphi) &= a \sum_{n=1}^5 (-1)^n \frac{e^{2n}}{2^{2n}} \left( \prod_{i=0}^{n-1} \frac{2i+3}{2i+2} \right) \left( \sum_{\substack{k=-n \\ k \neq 0}}^n (-1)^k (-1)^n \binom{2n}{k+n} \frac{\sin(2k\varphi)}{2k} \right) + \\ &\quad - a \sum_{n=1}^5 (-1)^{n-1} \frac{e^{2n}}{2^{2n-2}} \left( \prod_{i=0}^{n-2} \frac{2i+3}{2i+2} \right) \times \\ &\quad \times \left( \sum_{\substack{k=-(n-1) \\ k \neq 0}}^{n-1} (-1)^k (-1)^{n-1} \binom{2n-2}{k+n-1} \frac{\sin(2k\varphi)}{2k} \right). \end{aligned} \quad (5.4.75)$$

Die Summationen über  $k$  sind symmetrisch bezüglich 0, d.h. der Summand ist für  $k$  und  $-k$  jeweils identisch wegen

$$(-1)^k = (-1)^{-k} \quad (5.4.76)$$

$$\frac{\sin(-2k\varphi)}{-2k} = \frac{\sin(2k\varphi)}{2k} \quad (5.4.77)$$

$$\binom{2n}{-k+n} = \binom{2n}{2n-(-k+n)} = \binom{2n}{k+n} \quad (5.4.78)$$

$$\binom{2n-2}{-k+n-1} = \binom{2n-2}{2n-2-(-k+n-1)} = \binom{2n-2}{k+n-1}. \quad (5.4.79)$$

Damit können wir also auch schreiben

$$\begin{aligned} \tilde{s}(\varphi) &= a \sum_{n=1}^5 \frac{e^{2n}}{2^{2n}} \left( \prod_{i=0}^{n-1} \frac{2i+3}{2i+2} \right) \left( 2 \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{2n}{k+n} \frac{\sin(2k\varphi)}{2k} \right) + \\ &\quad - a \sum_{n=1}^5 \frac{e^{2n}}{2^{2n-2}} \left( \prod_{i=0}^{n-2} \frac{2i+3}{2i+2} \right) \left( 2 \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{2n-2}{k+n-1} \frac{\sin(2k\varphi)}{2k} \right). \end{aligned} \quad (5.4.80)$$

Wir wollen diesen Ausdruck nun so umformen, daß wir eine Summe von Sinusfunktionen mit jeweils einem multiplikativen Koeffizienten erhalten. Dazu ist die Summation über  $k$  und  $n$  zu vertauschen. Man kann sich leicht verdeutlichen, daß

$$\sum_{n=1}^5 \sum_{k=1}^n = \sum_{k=1}^5 \sum_{n=k}^5 \quad (5.4.81)$$

$$\sum_{n=1}^5 \sum_{k=1}^n = \sum_{k=1}^4 \sum_{n=k+1}^5, \quad (5.4.82)$$



## 5.4 Herleitung der zweiten Teilabbildung zum Erreichen der Längentreue auf dem Nullmeridian

womit

$$\begin{aligned} \tilde{s}(\varphi) = & 2a \sum_{k=1}^5 (-1)^k \frac{\sin(2k\varphi)}{2k} \left( \sum_{n=k}^5 \frac{e^{2n}}{2^{2n}} \left( \prod_{i=0}^{n-1} \frac{2i+3}{2i+2} \right) \binom{2n}{k+n} \right) + \\ & - 2a \sum_{k=1}^4 (-1)^k \frac{\sin(2k\varphi)}{2k} \left( \sum_{n=k+1}^5 \frac{e^{2n}}{2^{2n-2}} \left( \prod_{i=0}^{n-2} \frac{2i+3}{2i+2} \right) \binom{2n-2}{k+n-1} \right). \end{aligned} \quad (5.4.83)$$

gilt. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \tilde{s}(\varphi) = & -2a \frac{\sin(10\varphi)}{10} \left( \frac{e^{10}}{2^{10}} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \right) + \\ & + 2a \sum_{k=1}^4 (-1)^k \frac{\sin(2k\varphi)}{2k} \left\{ \frac{e^{2k}}{2^{2k}} \left( \prod_{i=0}^{k-1} \frac{2i+3}{2i+2} \right) + \right. \\ & \left. \sum_{n=k+1}^5 \left( \frac{e^{2n}}{2^{2n}} \left( \prod_{i=0}^{n-1} \frac{2i+3}{2i+2} \right) \binom{2n}{k+n} \right) - \left( \frac{e^{2n}}{2^{2n-2}} \left( \prod_{i=0}^{n-2} \frac{2i+3}{2i+2} \right) \binom{2n-2}{k+n-1} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (5.4.84)$$

Unter Verwendung von (5.4.67) und von

$$\binom{2n}{k+n} = \frac{(2n)!}{(k+n)!(2n-(k+n))!} \quad (5.4.85)$$

$$= \frac{2n(2n-1)}{(n+k)(n-k)} \cdot \frac{(2n-2)!}{(k+n-1)!(2n-2-(k+n-1))!} \quad (5.4.86)$$

$$= \frac{2n(2n-1)}{n^2-k^2} \binom{2n-2}{k+n-1} \quad (5.4.87)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \tilde{s}(\varphi) = & -a \frac{693}{131072} e^{10} \frac{\sin(10\varphi)}{10} + \\ & + a \sum_{k=1}^4 (-1)^k \frac{\sin(2k\varphi)}{2k} \left\{ \frac{e^{2k}}{2^{2k-1}} \left( \prod_{i=0}^{k-1} \frac{2i+3}{2i+2} \right) + \right. \\ & \left. \sum_{n=k+1}^5 \left( \frac{e^{2n}}{2^{2n-3}} \left( \prod_{i=0}^{n-2} \frac{2i+3}{2i+2} \right) \binom{2n-2}{k+n-1} \left( \frac{2n+1}{4 \cdot 2n} \cdot \frac{2n(2n-1)}{n^2-k^2} - 1 \right) \right) \right\}, \end{aligned} \quad (5.4.88)$$

woraus mit

$$\frac{2n+1}{4 \cdot 2n} \cdot \frac{2n(2n-1)}{n^2-k^2} - 1 = \frac{4n^2-1}{4(n^2-k^2)} - \frac{4n^2-4k^2}{4(n^2-k^2)} = \frac{4k^2-1}{4n^2-4k^2} \quad (5.4.89)$$

folgt, daß

$$\begin{aligned} \tilde{s}(\varphi) = & -a \frac{693}{131072} e^{10} \frac{\sin(10\varphi)}{10} + a \sum_{k=1}^4 (-1)^k \frac{\sin(2k\varphi)}{2k} \times \\ & \left\{ \frac{e^{2k}}{2^{2k-1}} \left( \prod_{i=0}^{k-1} \frac{2i+3}{2i+2} \right) + \sum_{n=k+1}^5 \left( \frac{e^{2n}}{2^{2n-3}} \left( \prod_{i=0}^{n-2} \frac{2i+3}{2i+2} \right) \binom{2n-2}{k+n-1} \frac{4k^2-1}{4n^2-4k^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (5.4.90)$$

Wir führen nun zur besseren Übersicht die Abkürzungen  $m$ ,  $n$ ,  $o$ ,  $p$  und  $r$  ein, wobei  $m$  bis  $p$  dem Wert der geschweiften Klammer für  $k = 1$  bis  $k = 4$  entsprechen und  $r$  der bereits berechnete Wert  $\frac{693}{131072} e^{10}$  ist. Man verwechsle dabei die Abkürzung  $n$  nicht mit dem Laufindex  $n$  der Summe auf der rechten Seite. Damit ist also

$$\begin{aligned} m = & \frac{e^2}{2} \frac{3}{2} + \left( \frac{e^4}{2} \frac{3}{2} \frac{3}{12} \right) + \left( \frac{e^6}{2^3} \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot 4 \cdot \frac{3}{32} \right) + \\ & + \left( \frac{e^8}{2^5} \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{60} \right) + \left( \frac{e^{10}}{2^7} \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{3}{96} \right) \end{aligned} \quad (5.4.91)$$

$$m = \frac{3}{4} e^2 + \frac{3}{16} e^4 + \frac{45}{512} e^6 + \frac{105}{2048} e^8 + \frac{2205}{65536} e^{10} \quad (5.4.92)$$

$$\begin{aligned} n = & \frac{e^4}{2^3} \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} + \left( \frac{e^6}{2^3} \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{15}{4 \cdot 5} \right) + \\ & + \left( \frac{e^8}{2^5} \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot 6 \cdot \frac{15}{4 \cdot 12} \right) + \left( \frac{e^{10}}{2^7} \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{15}{4 \cdot 21} \right) \end{aligned} \quad (5.4.93)$$

$$n = \frac{15}{64} e^4 + \frac{45}{256} e^6 + \frac{525}{4096} e^8 + \frac{1575}{16384} e^{10} \quad (5.4.94)$$

$$o = \frac{e^6}{2^5} \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} + \left( \frac{e^8}{2^5} \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{35}{4 \cdot 7} \right) + \left( \frac{e^{10}}{2^7} \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{9}{8} \cdot 8 \cdot \frac{35}{4 \cdot 16} \right) \quad (5.4.95)$$

$$o = \frac{35}{512} e^6 + \frac{175}{2048} e^8 + \frac{11025}{131072} e^{10} \quad (5.4.96)$$

$$p = \frac{e^8}{2^7} \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{9}{8} + \left( \frac{e^{10}}{2^7} \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{63}{4 \cdot 9} \right) \quad (5.4.97)$$

$$p = \frac{315}{16384} e^8 + \frac{2205}{65536} e^{10} \quad (5.4.98)$$

### Zusammenfassung

Wir haben nun alle notwendigen Berechnungen durchgeführt, um die Länge eines Meridianbogens angeben zu können. Unter Verwendung von Gleichungen (5.4.65), (5.4.73), (5.4.90), (5.4.92), (5.4.94), (5.4.96) und (5.4.98) können wir zusammenfassen

$$l = 1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{64}e^4 - \frac{5}{256}e^6 - \frac{175}{16384}e^8 - \frac{441}{65536}e^{10} \quad (5.4.99)$$

$$m = \frac{3}{4}e^2 + \frac{3}{16}e^4 + \frac{45}{512}e^6 + \frac{105}{2048}e^8 + \frac{2205}{65536}e^{10} \quad (5.4.100)$$

$$n = \frac{15}{64}e^4 + \frac{45}{256}e^6 + \frac{525}{4096}e^8 + \frac{1575}{16384}e^{10} \quad (5.4.101)$$

$$o = \frac{35}{512}e^6 + \frac{175}{2048}e^8 + \frac{11025}{131072}e^{10} \quad (5.4.102)$$

$$p = \frac{315}{16384}e^8 + \frac{2205}{65536}e^{10} \quad (5.4.103)$$

$$r = \frac{693}{131072}e^{10} \quad (5.4.104)$$

und

$$s(\varphi) = a \left[ l\varphi - m \frac{\sin(2\varphi)}{2} + n \frac{\sin(4\varphi)}{4} - o \frac{\sin(6\varphi)}{6} + p \frac{\sin(8\varphi)}{8} - r \frac{\sin(10\varphi)}{10} \right] + R(10). \quad (5.4.105)$$

### 5.4.2 Berechnung der Ableitungen der Funktion g

Es fehlen uns nun noch die in Gleichungen (5.4.13) und (5.4.14) benötigten Ableitungen der Funktion  $g$ . Wegen Gleichung (5.4.18) gilt

$$s'(\varphi) = R_M(\varphi). \quad (5.4.106)$$

Setzen wir dies in Gleichung (5.4.10) ein, erhalten wir

$$g'(q(\varphi)) = \frac{R_N(\varphi) \cos \varphi}{R_M(\varphi)} R_M(\varphi), \quad (5.4.107)$$

also

$$\boxed{g'(q(\varphi)) = R_N(\varphi) \cos \varphi.} \quad (5.4.108)$$

Wir werden nun Gleichung (5.4.12) verwenden, um die Ableitungen höherer Ordnung bis zur Ordnung 8 iterativ zu bestimmen. Dabei ergeben sich sehr lange Ausdrücke. Diese lassen sich in ihrer Länge deutlich reduzieren, wenn man einige vorbereitende Betrachtungen durchführt. Es erschließt sich einem nicht unbedingt unmittelbar, aus

welchem Grunde ausgerechnet diese Substitutionen und Ansätze ausgewählt wurden. Es ist vielleicht hilfreich, hier meine eigenen Erfahrungen bei der Berechnung der Ableitungen kurz zu schildern. Ich hatte zunächst versucht, die Ableitungen auf direktem Wege ohne irgendwelche zusätzlichen Ansätze zu berechnen. Dabei wurden die Ausdrücke allerdings derart lang, daß zahlreiche Wiederholungen der Berechnung notwendig wurden, bis das Resultat fehlerfrei feststand. Höhere Ableitungen werden auf diese Weise kaum noch handhabbar. Bei den Berechnungen sind mir nun bestimmte Gemeinsamkeiten der Ableitungen aufgefallen, die den folgenden Ansätzen zugrunde liegen. Durch deren Verwendung vereinfacht sich die Berechnung höherer Ableitungen beträchtlich.

Führen wir zunächst die Variable  $\delta$  ein mit

$$\delta = \frac{e^2 \cos^2 \varphi}{1 - e^2} . \quad (5.4.109)$$

Bei den folgenden Berechnungen wird uns dieser Term, dessen Potenzen und deren Ableitungen häufig begegnen. Wir wollen daher die Ableitung von  $\delta^n$  berechnen:

$$\frac{d}{d\varphi} \delta^n = n\delta^{n-1} \frac{d}{d\varphi} \frac{e^2 \cos^2 \varphi}{1 - e^2} \quad (5.4.110)$$

$$= n\delta^{n-1} \frac{e^2 2 \cos \varphi (-\sin \varphi)}{1 - e^2} \quad (5.4.111)$$

$$= -n\delta^{n-1} \frac{e^2 2 \cos^2 \varphi (\tan \varphi)}{1 - e^2} , \quad (5.4.112)$$

also

$$\frac{d}{d\varphi} \delta^n = -2n\delta^n \tan \varphi . \quad (5.4.113)$$

Außerdem ist

$$\frac{d}{d\varphi} \tan \varphi = \frac{d}{d\varphi} \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} = 1 + \tan^2 \varphi \quad (5.4.114)$$

und somit

$$\frac{d}{d\varphi} \tan^n \varphi = n \tan^{n-1}(\varphi) (1 + \tan^2(\varphi)) . \quad (5.4.115)$$

Uns interessiert nun noch die Ableitung von  $R_N(\varphi)$ :

$$\frac{d}{d\varphi} R_N(\varphi) = \frac{d}{d\varphi} \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (5.4.116)$$

$$= a \left( -\frac{1}{2} \right) \frac{1}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} (-2e^2 \sin \varphi \cos \varphi) \quad (5.4.117)$$

$$= \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \frac{e^2 \cos^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \tan \varphi , \quad (5.4.118)$$

#### 5.4 Herleitung der zweiten Teilabbildung zum Erreichen der Längentreue auf dem Nullmeridian

also

$$\frac{d}{d\varphi} R_N(\varphi) = R_N(\varphi) \frac{e^2 \cos^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \tan \varphi. \quad (5.4.119)$$

Nehmen wir nun an, daß die  $n$ -te Ableitung von  $g$  in der Form

$$g^{(n)}(q(\varphi)) = R_N(\varphi) \cos^n(\varphi) f_n(\varphi) \quad (5.4.120)$$

dargestellt werden kann. Dabei ist  $f_n(\varphi)$  der Restterm, den man nach Abspaltung des Faktors  $R_N(\varphi) \cos^n(\varphi)$  erhält. Dann ist unter Verwendung von Gleichung (5.4.12)

$$\begin{aligned} g^{(n+1)}(q(\varphi)) &= \frac{R_N(\varphi) \cos \varphi}{R_M(\varphi)} \frac{d}{d\varphi} \left[ R_N(\varphi) \cos^n(\varphi) f_n(\varphi) \right] \\ &= \frac{R_N(\varphi) \cos \varphi}{R_M(\varphi)} \left[ \frac{dR_N(\varphi)}{d\varphi} \cos^n(\varphi) f_n(\varphi) \right. \\ &\quad \left. - R_N(\varphi) n \cos^{n-1}(\varphi) \sin \varphi f_n(\varphi) + R_N(\varphi) \cos^n(\varphi) f_n'(\varphi) \right], \end{aligned} \quad (5.4.121)$$

woraus sich unter Verwendung von Gleichung (5.4.119) ergibt, daß

$$g^{(n+1)}(q(\varphi)) = \frac{R_N^2(\varphi) \cos^{n+1}(\varphi)}{R_M(\varphi)} \left[ \left( \frac{e^2 \cos^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} - n \right) \tan \varphi f_n(\varphi) + f_n'(\varphi) \right]. \quad (5.4.122)$$

Ersetzen wir nun einen der beiden Faktoren von  $R_N^2(\varphi)$  sowie  $R_M(\varphi)$  durch deren Definitionen aus Gleichungen (5.3.25) und (5.3.24), erhalten wir

$$\begin{aligned} g^{(n+1)}(q(\varphi)) &= R_N(\varphi) \cos^{n+1}(\varphi) \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} \frac{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}{a(1 - e^2)} \times \\ &\quad \times \left[ \left( \frac{e^2 \cos^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} - n \right) \tan \varphi f_n(\varphi) + f_n'(\varphi) \right] \\ &= R_N(\varphi) \cos^{n+1}(\varphi) \left[ \left( \frac{e^2 \cos^2 \varphi}{1 - e^2} - n \frac{1 - e^2 \sin^2 \varphi}{1 - e^2} \right) \tan \varphi f_n(\varphi) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 - e^2 \sin^2 \varphi}{1 - e^2} f_n'(\varphi) \right]. \end{aligned} \quad (5.4.123)$$

Nun ist

$$\frac{1 - e^2 \sin^2 \varphi}{1 - e^2} = \frac{1 - e^2 + e^2 \cos^2 \varphi}{1 - e^2} = 1 + \delta. \quad (5.4.124)$$

Damit erhalten wir

$$g^{(n+1)}(q(\varphi)) = R_N(\varphi) \cos^{n+1}(\varphi) \left[ (\delta - n(1 + \delta)) \tan \varphi f_n(\varphi) + (1 + \delta) f_n'(\varphi) \right], \quad (5.4.125)$$

also letztendlich

$$g^{(n+1)}(q(\varphi)) = R_N(\varphi) \cos^{n+1}(\varphi) \left[ (1 + \delta) f_n'(\varphi) - (n + (n - 1)\delta) \tan \varphi f_n(\varphi) \right]. \quad (5.4.126)$$

Wir sehen also, daß sich auch  $g^{(n+1)}$  wieder in der durch Gleichung (5.4.120) gegebenen Form darstellen läßt, wenn dies schon für  $g^{(n)}$  möglich ist. Für  $n = 1$  finden wir nun unter Verwendung von Gleichung (5.4.108), daß sich die erste Ableitung in der Tat in dieser Form darstellen läßt mit  $f_1(\varphi) = 1$ . Folglich läßt sich jede beliebige Ableitung von  $g$  in der Form aus Gleichung (5.4.108) darstellen.

Wir haben nun das nötige Rüstzeug beisammen, um die eigentliche Berechnung der Ableitungen anzugehen. Der besseren Übersicht halber seien die vier wichtigsten dafür verwendeten Gleichungen hier nochmals wiederholt:

$$\frac{d}{d\varphi} \delta^n = -2n\delta^n \tan \varphi \quad (5.4.127)$$

$$\frac{d}{d\varphi} \tan^n(\varphi) = n \tan^{n-1}(\varphi) (1 + \tan^2(\varphi)) \quad (5.4.128)$$

$$g^{(n)}(q(\varphi)) = R_N(\varphi) \cos^n(\varphi) f_n(\varphi) \quad (5.4.129)$$

$$g^{(n+1)}(q(\varphi)) = R_N(\varphi) \cos^{n+1}(\varphi) \left[ (1 + \delta) f_n'(\varphi) - (n + (n - 1)\delta) \tan \varphi f_n(\varphi) \right]. \quad (5.4.130)$$

### Berechnung der zweiten Ableitung von $g$

Wir hatten bereits festgestellt, daß für die erste Ableitung  $f_1(\varphi) = 1$  und damit  $f_1'(\varphi) = 0$  sind. Es ergibt sich also aus Gleichung (5.4.130):

$$g^{(2)}(q(\varphi)) = R_N(\varphi) \cos^2(\varphi) (-\tan \varphi) \quad (5.4.131)$$

oder auch

$$\boxed{g^{(2)}(q(\varphi)) = -R_N(\varphi) \sin(\varphi) \cos(\varphi)}. \quad (5.4.132)$$

### Berechnung der dritten Ableitung von $g$

Für  $n = 2$  finden wir

$$f_2(\varphi) = -\tan(\varphi), \quad (5.4.133)$$

also unter Verwendung von Gleichung (5.4.128)

$$f_2'(\varphi) = -(1 + \tan^2(\varphi)). \quad (5.4.134)$$

#### 5.4 Herleitung der zweiten Teilabbildung zum Erreichen der Längentreue auf dem Nullmeridian

Setzen wir dies wieder in Gleichung (5.4.130) ein, erhalten wir

$$g^{(3)}(q(\varphi)) = R_N(\varphi) \cos^3(\varphi) \left[ - (1 + \delta)(1 + \tan^2(\varphi)) + (2 + \delta) \tan^2 \varphi \right] \quad (5.4.135)$$

oder auch

$$\boxed{g^{(3)}(q(\varphi)) = -R_N(\varphi) \cos^3(\varphi) \left[ 1 + \delta - \tan^2 \varphi \right] .} \quad (5.4.136)$$

#### Berechnung der vierten Ableitung von g

Für  $n = 3$  ist

$$f_3(\varphi) = -1 - \delta + \tan^2 \varphi , \quad (5.4.137)$$

woraus wir unter Verwendung von Gleichungen (5.4.127) und (5.4.128) erhalten, daß

$$f_3'(\varphi) = 2\delta \tan \varphi + 2 \tan \varphi (1 + \tan^2(\varphi)) . \quad (5.4.138)$$

Wie oben setzen wir dies nun wieder Gleichung (5.4.130) ein:

$$g^{(4)}(q(\varphi)) = R_N(\varphi) \cos^4(\varphi) \left[ (1 + \delta) \left( 2\delta \tan \varphi + 2 \tan \varphi (1 + \tan^2(\varphi)) \right) + (3 + 2\delta) \tan \varphi (1 + \delta - \tan^2 \varphi) \right] \quad (5.4.139)$$

$$= R_N(\varphi) \cos^4(\varphi) \tan \varphi \left[ (1 + \delta) \left( 2\delta + 2 + 2 \tan^2(\varphi) \right) + (3 + 2\delta)(1 + \delta - \tan^2 \varphi) \right] \quad (5.4.140)$$

$$= R_N(\varphi) \cos^4(\varphi) \tan \varphi \left[ 2\delta + 2 + 2\delta^2 + 2\delta + 3 + 3\delta + 2\delta + 2\delta^2 + \tan^2(\varphi) \left( 2 + 2\delta - 3 - 2\delta \right) \right] , \quad (5.4.141)$$

also letztendlich

$$g^{(4)}(q(\varphi)) = R_N(\varphi) \cos^4(\varphi) \tan \varphi \left[ 5 + 9\delta + 4\delta^2 - \tan^2(\varphi) \right] \quad (5.4.142)$$

oder auch

$$\boxed{g^{(4)}(q(\varphi)) = R_N(\varphi) \sin(\varphi) \cos^3(\varphi) \left[ 5 + 9\delta + 4\delta^2 - \tan^2(\varphi) \right] .} \quad (5.4.143)$$

**Berechnung der fünften Ableitung von g**

Für  $n = 4$  ist

$$f_4(\varphi) = \tan \varphi \left[ 5 + 9\delta + 4\delta^2 - \tan^2(\varphi) \right] \quad (5.4.144)$$

und damit

$$f_4'(\varphi) = (1 + \tan^2(\varphi)) \left[ 5 + 9\delta + 4\delta^2 - \tan^2(\varphi) \right] + \tan \varphi \left[ -18\delta \tan \varphi - 16\delta^2 \tan \varphi - 2 \tan \varphi (1 + \tan^2(\varphi)) \right] \quad (5.4.145)$$

$$= (1 + \tan^2(\varphi)) \left[ 5 + 9\delta + 4\delta^2 - \tan^2(\varphi) \right] + \tan^2(\varphi) \left[ -18\delta - 16\delta^2 - 2 - 2 \tan^2(\varphi) \right] \quad (5.4.146)$$

$$= 5 + 9\delta + 4\delta^2 + \tan^2(\varphi) \left[ 5 + 9\delta + 4\delta^2 - 1 - 18\delta - 16\delta^2 - 2 \right] + \tan^4(\varphi) \left[ -1 - 2 \right], \quad (5.4.147)$$

also letztendlich

$$f_4'(\varphi) = 5 + 9\delta + 4\delta^2 + \tan^2(\varphi) \left[ 2 - 9\delta - 12\delta^2 \right] - 3 \tan^4(\varphi). \quad (5.4.148)$$

Einsetzen in Gleichung (5.4.130) ergibt

$$g^{(5)}(q(\varphi)) = R_N(\varphi) \cos^5(\varphi) \left[ (1 + \delta) \left( 5 + 9\delta + 4\delta^2 \right) + \tan^2(\varphi) (1 + \delta) \left( 2 - 9\delta - 12\delta^2 \right) - 3 \tan^4(\varphi) (1 + \delta) - (4 + 3\delta) \tan^2(\varphi) \left( 5 + 9\delta + 4\delta^2 - \tan^2(\varphi) \right) \right] \quad (5.4.149)$$

$$= R_N(\varphi) \cos^5(\varphi) \left[ \left( 5 + 9\delta + 4\delta^2 + 5\delta + 9\delta^2 + 4\delta^3 \right) + \tan^2(\varphi) \left( 2 - 9\delta - 12\delta^2 + 2\delta - 9\delta^2 - 12\delta^3 - 20 - 36\delta - 16\delta^2 - 15\delta - 27\delta^2 - 12\delta^3 \right) + \tan^4(\varphi) \left( -3 - 3\delta + 4 + 3\delta \right) \right], \quad (5.4.150)$$

also letztendlich

$$g^{(5)}(q(\varphi)) = R_N(\varphi) \cos^5(\varphi) \left[ \left( 5 + 14\delta + 13\delta^2 + 4\delta^3 \right) - \tan^2(\varphi) \left( 18 + 58\delta + 64\delta^2 + 24\delta^3 \right) + \tan^4(\varphi) \right]. \quad (5.4.151)$$



### Berechnung der sechsten Ableitung von $g$

Für  $n = 5$  ist

$$f_5(\varphi) = 5 + 14\delta + 13\delta^2 + 4\delta^3 - \tan^2(\varphi)(18 + 58\delta + 64\delta^2 + 24\delta^3) + \tan^4(\varphi) \quad (5.4.152)$$

und damit

$$\begin{aligned} f_5'(\varphi) &= -\tan \varphi (28\delta + 52\delta^2 + 24\delta^3) \\ &\quad - 2 \tan \varphi (1 + \tan^2(\varphi)) (18 + 58\delta + 64\delta^2 + 24\delta^3) \\ &\quad + \tan^3(\varphi) (116\delta + 256\delta^2 + 144\delta^3) + 4 \tan^3(\varphi) (1 + \tan^2(\varphi)) \\ &= -\tan \varphi \left[ 28\delta + 52\delta^2 + 24\delta^3 + 36 + 116\delta + 128\delta^2 + 48\delta^3 \right. \\ &\quad \left. + \tan^2(\varphi) (36 + 116\delta + 128\delta^2 + 48\delta^3 - 116\delta - 256\delta^2 - 144\delta^3 - 4) \right. \\ &\quad \left. - 4 \tan^4(\varphi) \right] \end{aligned} \quad (5.4.154)$$

also letztendlich

$$\begin{aligned} f_5'(\varphi) &= -\tan \varphi \left( 36 + 144\delta + 180\delta^2 + 72\delta^3 \right. \\ &\quad \left. + \tan^2(\varphi) (32 - 128\delta^2 - 96\delta^3) - 4 \tan^4(\varphi) \right). \end{aligned} \quad (5.4.155)$$

Einsetzen in Gleichung (5.4.130) ergibt

$$\begin{aligned} g^{(6)}(q(\varphi)) &= -R_N(\varphi) \cos^6(\varphi) \tan \varphi \left[ (1 + \delta) (36 + 144\delta + 180\delta^2 + 72\delta^3) \right. \\ &\quad \left. + \tan^2(\varphi) (1 + \delta) (32 - 128\delta^2 - 96\delta^3) - 4(1 + \delta) \tan^4(\varphi) \right. \\ &\quad \left. + (5 + 4\delta) (5 + 14\delta + 13\delta^2 + 4\delta^3) \right. \\ &\quad \left. - (5 + 4\delta) (18 + 58\delta + 64\delta^2 + 24\delta^3) \tan^2(\varphi) + (5 + 4\delta) \tan^4(\varphi) \right] \end{aligned} \quad (5.4.156)$$

$$\begin{aligned}
 &= -R_N(\varphi) \cos^6(\varphi) \tan \varphi \left[ \begin{array}{cccccc} 36 & +144\delta & +180\delta^2 & +72\delta^3 & +36\delta & +144\delta^2 & +180\delta^3 & +72\delta^4 \\ +25 & +70\delta & +65\delta^2 & +20\delta^3 & +20\delta & +56\delta^2 & +52\delta^3 & +16\delta^4 \end{array} \right. \\
 &+ \tan^2(\varphi) \left( \begin{array}{cccc} 32 & & -128\delta^2 & -96\delta^3 \\ & +32\delta & & -128\delta^3 & -96\delta^4 \\ -90 & -290\delta & -320\delta^2 & -120\delta^3 \\ & -72\delta & -232\delta^2 & -256\delta^3 & -96\delta^4 \end{array} \right) \\
 &\left. + \tan^4(\varphi) \right] \tag{5.4.157}
 \end{aligned}$$

also letztendlich

$$\begin{aligned}
 g^{(6)}(q(\varphi)) = -R_N(\varphi) \cos^6(\varphi) \tan(\varphi) &\left[ 61 + 270\delta + 445\delta^2 + 324\delta^3 + 88\delta^4 \right. \\
 &\left. - \tan^2(\varphi) \left( 58 + 330\delta + 680\delta^2 + 600\delta^3 + 192\delta^4 \right) + \tan^4(\varphi) \right] \tag{5.4.158}
 \end{aligned}$$

oder auch

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 g^{(6)}(q(\varphi)) = -R_N(\varphi) \sin(\varphi) \cos^5(\varphi) &\left[ 61 + 270\delta + 445\delta^2 + 324\delta^3 + 88\delta^4 \right. \\
 &\left. - \tan^2(\varphi) \left( 58 + 330\delta + 680\delta^2 + 600\delta^3 + 192\delta^4 \right) + \tan^4(\varphi) \right]. \tag{5.4.159}
 \end{aligned}
 }$$

### Berechnung der siebenten Ableitung von g

Für  $n = 6$  ist

$$\begin{aligned}
 f_6(\varphi) = -(61 + 270\delta + 445\delta^2 + 324\delta^3 + 88\delta^4) \tan \varphi \\
 + (58 + 330\delta + 680\delta^2 + 600\delta^3 + 192\delta^4) \tan^3(\varphi) \\
 - \tan^5(\varphi) \tag{5.4.160}
 \end{aligned}$$

5.4 Herleitung der zweiten Teilabbildung zum Erreichen der Längentreue auf dem Nullmeridian

---

und damit

$$\begin{aligned}
 f_6'(\varphi) = & -\begin{pmatrix} 61 & +270\delta & +445\delta^2 & +324\delta^3 & +88\delta^4 \\ 540\delta & +1780\delta^2 & +1944\delta^3 & +704\delta^4 \\ 58 & +330\delta & +680\delta^2 & +600\delta^3 & +192\delta^4 \\ 660\delta & +2720\delta^2 & +3600\delta^3 & +1536\delta^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1 + \tan^2(\varphi)) \\ \tan^2(\varphi) \\ (1 + \tan^2(\varphi))3 \tan^2(\varphi) \\ \tan^4(\varphi) \end{pmatrix} \\
 & - (1 + \tan^2(\varphi))5 \tan^4(\varphi)
 \end{aligned} \tag{5.4.161}$$

$$\begin{aligned}
 = & \begin{pmatrix} -61 & -270\delta & -445\delta^2 & -324\delta^3 & -88\delta^4 \\ -61 & -270\delta & -445\delta^2 & -324\delta^3 & -88\delta^4 \\ & +540\delta & +1780\delta^2 & +1944\delta^3 & +704\delta^4 \\ +174 & +990\delta & +2040\delta^2 & +1800\delta^3 & +576\delta^4 \\ 174 & +990\delta & +2040\delta^2 & +1800\delta^3 & +576\delta^4 \\ & -660\delta & -2730\delta^2 & -3600\delta^3 & -1536\delta^4 \\ & -5 & & & \end{pmatrix} \\
 & + \tan^2(\varphi) \begin{pmatrix} -61 & -270\delta & -445\delta^2 & -324\delta^3 & -88\delta^4 \\ & +540\delta & +1780\delta^2 & +1944\delta^3 & +704\delta^4 \\ +174 & +990\delta & +2040\delta^2 & +1800\delta^3 & +576\delta^4 \\ & -660\delta & -2730\delta^2 & -3600\delta^3 & -1536\delta^4 \\ & -5 & & & \end{pmatrix} \\
 & + \tan^4(\varphi) \begin{pmatrix} 174 & +990\delta & +2040\delta^2 & +1800\delta^3 & +576\delta^4 \\ & -660\delta & -2730\delta^2 & -3600\delta^3 & -1536\delta^4 \\ & -5 & & & \end{pmatrix} \\
 & - 5 \tan^4(\varphi) ,
 \end{aligned} \tag{5.4.162}$$

also letztendlich

$$\begin{aligned}
 f_6'(\varphi) = & -61 - 270\delta - 445\delta^2 - 324\delta^3 - 88\delta^4 \\
 & + \tan^2(\varphi)(113 + 1260\delta + 3375\delta^2 + 3420\delta^3 + 1192\delta^4) \\
 & + \tan^4(\varphi)(169 + 330\delta - 680\delta^2 - 1800\delta^3 - 960\delta^4) \\
 & - 5 \tan^6(\varphi) .
 \end{aligned} \tag{5.4.163}$$

Einsetzen in Gleichung (5.4.130) ergibt

$$\begin{aligned}
 g^{(7)}(q(\varphi)) = & R_N(\varphi) \cos^7(\varphi) \left[ - (1 + \delta)(61 + 270\delta + 445\delta^2 + 324\delta^3 + 88\delta^4) \right. \\
 & + \tan^2(\varphi)(1 + \delta)(113 + 1260\delta + 3375\delta^2 + 3420\delta^3 + 1192\delta^4) \\
 & + \tan^4(\varphi)(1 + \delta)(169 + 330\delta - 680\delta^2 - 1800\delta^3 - 960\delta^4) \\
 & - \tan^6(\varphi)(1 + \delta) \cdot 5 \\
 & + \tan^2(\varphi)(6 + 5\delta)(61 + 270\delta + 445\delta^2 + 324\delta^3 + 88\delta^4) \\
 & - \tan^4(\varphi)(6 + 5\delta)(58 + 330\delta + 680\delta^2 + 600\delta^3 + 192\delta^4) \\
 & \left. + \tan^6(\varphi)(6 + 5\delta) \right]
 \end{aligned} \tag{5.4.164}$$

$$\begin{aligned}
 g^{(7)}(q(\varphi)) = R_N(\varphi) \cos^7(\varphi) & \left[ \begin{aligned}
 & - \left( \begin{array}{cccccc}
 61 & +270\delta & +445\delta^2 & +324\delta^3 & +88\delta^4 & \\
 & +61\delta & +270\delta^2 & +445\delta^3 & +324\delta^4 & +88\delta^5
 \end{array} \right) \\
 + \tan^2(\varphi) & \left( \begin{array}{cccccc}
 113 & +1260\delta & +3375\delta^2 & +3420\delta^3 & +1192\delta^4 & \\
 & +113\delta & +1260\delta^2 & +3375\delta^3 & +3420\delta^4 & +1192\delta^5 \\
 366 & +1620\delta & +2670\delta^2 & +1944\delta^3 & +528\delta^4 & \\
 & +305\delta & +1350\delta^2 & +2225\delta^3 & +1620\delta^4 & +440\delta^5
 \end{array} \right) \\
 + \tan^4(\varphi) & \left( \begin{array}{cccccc}
 348 & +1980\delta & +4080\delta^2 & +3600\delta^3 & +1152\delta^4 & \\
 & +290\delta & +1650\delta^2 & +3400\delta^3 & +3000\delta^4 & +960\delta^5 \\
 -169 & -330\delta & +680\delta^2 & +1800\delta^3 & +960\delta^4 & \\
 & -169\delta & -330\delta^2 & +680\delta^3 & +1800\delta^4 & +960\delta^5
 \end{array} \right) \\
 + \tan^6(\varphi) & \left[ \begin{array}{cccccc}
 & & & & & \\
 & & & & & \\
 & & & & & \\
 & & & & & \\
 & & & & & \\
 & & & & & 
 \end{array} \right]
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}
 \tag{5.4.165}$$

also letztendlich

$$\begin{aligned}
 g^{(7)}(q(\varphi)) = R_N(\varphi) \cos^7(\varphi) & \left[ \begin{aligned}
 & 61 + 331\delta + 715\delta^2 + 769\delta^3 + 412\delta^4 + 88\delta^5 \\
 & - \tan^2(\varphi) \left( 479 + 3298\delta + 8655\delta^2 + 10964\delta^3 + 6760\delta^4 + 1632\delta^5 \right) \\
 & + \tan^4(\varphi) \left( 179 + 1771\delta + 6080\delta^2 + 9480\delta^3 + 6912\delta^4 + 1920\delta^5 \right) \\
 & - \tan^6(\varphi) \left[ \begin{array}{cccccc}
 & & & & & \\
 & & & & & \\
 & & & & & \\
 & & & & & \\
 & & & & & \\
 & & & & & 
 \end{array} \right] .
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

(5.4.166)

### Berechnung der achten Ableitung von g

Für  $n = 7$  ist

$$\begin{aligned}
 f_7(\varphi) = & - (61 + 331\delta + 715\delta^2 + 769\delta^3 + 412\delta^4 + 88\delta^5) \\
 & + (479 + 3298\delta + 8655\delta^2 + 10964\delta^3 + 6760\delta^4 + 1632\delta^5) \tan^2(\varphi) \\
 & - (179 + 1771\delta + 6080\delta^2 + 9480\delta^3 + 6912\delta^4 + 1920\delta^5) \tan^4(\varphi) \\
 & + \tan^6(\varphi)
 \end{aligned}
 \tag{5.4.167}$$

5.4 Herleitung der zweiten Teilabbildung zum Erreichen der Längentreue auf dem Nullmeridian

---

und damit

$$\begin{aligned}
 f_7'(\varphi) = & \left( \begin{array}{cccccc} 662\delta & +2860\delta^2 & +4614\delta^3 & +3296\delta^4 & +880\delta^5 \\ 479 & +3298\delta & +8655\delta^2 & +10964\delta^3 & +6760\delta^4 & +1632\delta^5 \end{array} \right) \tan \varphi \\
 & + \left( \begin{array}{cccccc} 6596\delta & +34620\delta^2 & +65784\delta^3 & +54080\delta^4 & +16320\delta^5 \\ 179 & +1771\delta & +6080\delta^2 & +9480\delta^3 & +6912\delta^4 & +1920\delta^5 \end{array} \right) \tan^3(\varphi) \\
 & + \left( \begin{array}{cccccc} 3542\delta & +24320\delta^2 & +56880\delta^3 & +55296\delta^4 & +19200\delta^5 \\ 6 & +3542\delta & +24320\delta^2 & +56880\delta^3 & +55296\delta^4 & +19200\delta^5 \end{array} \right) \tan^5(\varphi) \\
 & + 6 \tan^5(\varphi)(1 + \tan^2(\varphi))
 \end{aligned} \tag{5.4.168}$$

$$\begin{aligned}
 f_7'(\varphi) = & \tan \varphi \left[ \left( \begin{array}{cccccc} 662\delta & +2860\delta^2 & +4614\delta^3 & +3296\delta^4 & +880\delta^5 \\ 958 & +6596\delta & +17310\delta^2 & +21928\delta^3 & +13520\delta^4 & +3264\delta^5 \end{array} \right) \right. \\
 & + \tan^2(\varphi) \left( \begin{array}{cccccc} 958 & +6596\delta & +17310\delta^2 & +21928\delta^3 & +13520\delta^4 & +3264\delta^5 \\ -6596\delta & -34620\delta^2 & -65784\delta^3 & -54080\delta^4 & -16320\delta^5 \\ -716 & -7084\delta & -24320\delta^2 & -37920\delta^3 & -27648\delta^4 & -7680\delta^5 \end{array} \right) \\
 & + \tan^4(\varphi) \left( \begin{array}{cccccc} -716 & -7084\delta & -24320\delta^2 & -37920\delta^3 & -27648\delta^4 & -7680\delta^5 \\ 6 & +3542\delta & +24320\delta^2 & +56880\delta^3 & +55296\delta^4 & +19200\delta^5 \end{array} \right) \\
 & \left. + 6 \tan^6(\varphi) \right]
 \end{aligned} \tag{5.4.169}$$

also letztendlich

$$\begin{aligned}
 f_7'(\varphi) = & \tan \varphi \left[ 958 + 7258\delta + 20170\delta^2 + 26542\delta^3 + 16816\delta^4 + 4144\delta^5 \right. \\
 & + \tan^2(\varphi) (242 - 7084\delta - 41630\delta^2 - 81776\delta^3 - 68208\delta^4 - 20736\delta^5) \\
 & - \tan^4(\varphi) (710 + 3542\delta - 18960\delta^3 - 27648\delta^4 - 11520\delta^5) \\
 & \left. + 6 \tan^6(\varphi) \right].
 \end{aligned} \tag{5.4.170}$$



#### 5.4 Herleitung der zweiten Teilabbildung zum Erreichen der Längentreue auf dem Nullmeridian

---

$$g^{(8)}(q(\varphi)) = R_N(\varphi) \sin(\varphi) \cos^7(\varphi) \left[ \begin{aligned} &1385 + 10899\delta + 34419\delta^2 + 56385\delta^3 + 50856\delta^4 + 24048\delta^5 + 4672\delta^6 \\ &- \tan^2(\varphi) \left( 3111 + 32802\delta + 129087\delta^2 + 252084\delta^3 + 263088\delta^4 + 140928\delta^5 + 30528\delta^6 \right) \\ &+ \tan^4(\varphi) \left( 543 + 9219\delta + 49644\delta^2 + 121800\delta^3 + 151872\delta^4 + 94080\delta^5 + 23040\delta^6 \right) \\ &- \tan^6(\varphi) \end{aligned} \right].$$

(5.4.173)

Hiermit haben wir nun alle für näherungsweise Berechnung der Abbildung  $g$  benötigten Ableitungen bestimmt.

## **A Beweis der Winkeltreue stetig differenzierbarer komplexwertiger Funktionen**



## **B Meridiankrümmungsradius und Querkrümmungsradius**

## **C Definition der Funktion $\operatorname{artanh}$**

# D Die Newtonsche binomische Reihe

Wir erinnern uns, daß es für die Konstruktion der Gauß-Krüger-Abbildung notwendig war, die Länge eines Teiles eines Meridianbogens zu bestimmen. Bei der Berechnung der Länge eines Teilabschnittes eines Meridians ist ein Term der Art

$$f(x) = (1 - x)^\alpha$$

aufgetreten. Man kann diese Funktion darstellen durch

$$(1 - x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\alpha}{n} x^n \quad (\text{D.0.1})$$

mit

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1)}{n!} \quad \text{für alle } n \geq 1 \text{ und} \quad (\text{D.0.2})$$

$$\binom{\alpha}{n} := 1 \quad \text{für } n = 0. \quad (\text{D.0.3})$$

Dies gilt für  $|x| < 1$  und jedes beliebige  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Im folgenden wollen wir die Gültigkeit von Gleichung (D.0.1) beweisen. Dazu müssen wir etwas weiter ausholen und zunächst an die Taylor-Entwicklung von Funktionen erinnern. Dieser Abschnitt ist zum Verständnis der Herleitung der Gauß-Krüger-Abbildung nicht unbedingt erforderlich. Wer sich aber auch für die bei dieser Herleitung verwendeten Hilfssätze interessiert, dem sei die Lektüre dieses Abschnitts empfohlen.

## D.1 Die Taylorsche Formel und die Taylorsche Reihe

### D.1.1 Die Taylorsche Formel

Sei  $f$  eine beliebige  $n + 1$  mal stetig differenzierbare Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x \mapsto f(x)$ . Wir definieren außerdem ein Polynom  $n$ -ten Grades in  $x$ :

$$p(x) := \sum_{k=0}^n c_k(x_0)(x - x_0)^k \quad (\text{D.1.1})$$

mit noch zu bestimmenden Konstanten  $c_k(x_0)$  und einem frei wählbaren aber festen  $x_0$ . Wir wollen diese Konstanten  $c_k(x_0)$  nun so konstruieren, daß das Polynom  $p$  an der Stelle

$x_0$  den gleichen Wert wie die Funktion  $f$  hat, und zwar sowohl für die Funktion selbst als auch für jede der ersten  $n$  Ableitungen. Man bezeichnet dies auch als eine Entwicklung von  $f$  um  $x_0$ . Schauen wir uns nun die Ableitungen von  $p$  an:

$$p'(x) = \sum_{k=1}^n c_k(x_0)k(x-x_0)^{k-1} \quad (\text{D.1.2})$$

$$p''(x) = \sum_{k=2}^n c_k(x_0)k(k-1)(x-x_0)^{k-2} \quad (\text{D.1.3})$$

$$p^{(3)}(x) = \sum_{k=3}^n c_k(x_0)k(k-1)(k-2)(x-x_0)^{k-3} \quad (\text{D.1.4})$$

⋮

$$p^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^n c_k(x_0)k(k-1)(k-2)\cdots(k-j+1)(x-x_0)^{k-j} \quad (\text{D.1.5})$$

für alle  $j$  mit  $0 \leq j \leq n$ . Setzen wir nun  $x = x_0$ , so reduzieren sich die Summen für  $p$  und die Ableitungen von  $p$  jeweils auf das erste Glied. Aus der oben geforderten Gleichheit von Funktion und Ableitungen von  $p$  und  $f$  an der Stelle  $x_0$  ergibt sich damit:

$$f(x_0) = c_0(x_0) \quad (\text{D.1.6})$$

$$f'(x_0) = c_1(x_0) \cdot 1 \quad (\text{D.1.7})$$

$$f''(x_0) = c_2(x_0) \cdot 2 \cdot 1 \quad (\text{D.1.8})$$

$$f^{(3)}(x_0) = c_3(x_0) \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \quad (\text{D.1.9})$$

⋮

$$f^{(j)}(x_0) = c_j(x_0) j!. \quad (\text{D.1.10})$$

Daraus folgt, daß

$$c_k(x_0) = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad (\text{D.1.11})$$

für alle  $k$  mit  $0 \leq k \leq n$ .

Wir haben nun also ein Polynom konstruiert, daß an der Stelle  $x_0$  mit der Funktion  $f$  bis zur  $n$ -ten Ableitung identisch ist. Dies heißt natürlich nicht, daß  $p$  und  $f$  auch an anderen Stellen übereinstimmen. Im allgemeinen werden sich diese um ein Restglied  $R_n(x)$  unterscheiden, d.h.

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + R_n(x). \quad (\text{D.1.12})$$

Wir hatten oben gefordert, daß  $f$   $n + 1$  mal differenzierbar sein soll. Da das Polynom  $p$  ebenfalls  $n + 1$  mal differenzierbar ist (sogar unendlich oft), ist auch das Restglied  $R_n(x)$  mindestens  $n + 1$  mal differenzierbar. Bilden wir nun die Ableitungen der Identität (D.1.12), so ergibt sich

$$f'(x) = \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!} (x-x_0)^{k-1} + R'_n(x) \quad (\text{D.1.13})$$

$$f''(x) = \sum_{k=2}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-2)!} (x-x_0)^{k-2} + R''_n(x) \quad (\text{D.1.14})$$

⋮

$$f^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-j)!} (x-x_0)^{k-j} + R_n^{(j)}(x) \quad (\text{D.1.15})$$

⋮

$$f^{(n)}(x) = f^{(n)}(x_0) + R_n^{(n)}(x). \quad (\text{D.1.16})$$

Konstruktionsgemäß ist  $R_n^{(j)}(x_0) = 0$  für  $0 \leq j \leq n$ , wie sich auch durch Einsetzen von  $x = x_0$  in Gleichungen (D.1.13) bis (D.1.16) bestätigt. Wenn man nun Gleichung (D.1.16) ein weiteres mal differenziert, erhält man

$$R_n^{(n+1)} = f^{(n+1)}(x). \quad (\text{D.1.17})$$

Dies gibt uns nun die Möglichkeit, die Größe des Restgliedes zu bestimmen:

$$R_n(x) - R_n(x_0) = \int_{x_0}^x R'_n(t) dt. \quad (\text{D.1.18})$$

Durch partielle Integration und unter Berücksichtigung von  $R_n(x_0) = 0$  erhält man damit

$$R_n(x) = R'_n(t)(t-x) \Big|_{x_0}^x - \int_{x_0}^x R''_n(t)(t-x) dt. \quad (\text{D.1.19})$$

Der erste Term der rechten Seite verschwindet, da für die obere Grenze mit  $t = x$  der Faktor  $(t - x)$  gleich 0 ist und für die untere Grenze  $R'_n(x_0) = 0$  gilt. Dies läßt sich nun

fortsetzen:

$$R_n(x) = -R_n''(t) \frac{(t-x)^2}{2!} \Big|_{x_0}^x + \int_{x_0}^x R_n^{(3)}(t) \frac{(t-x)^2}{2!} dt \quad (\text{D.1.20})$$

$$= R_n^{(3)}(t) \frac{(t-x)^3}{3!} \Big|_{x_0}^x - \int_{x_0}^x R_n^{(4)}(t) \frac{(t-x)^3}{3!} dt \quad (\text{D.1.21})$$

⋮

$$= -(-1)^n R_n^{(n)}(t) \frac{(t-x)^n}{n!} \Big|_{x_0}^x + (-1)^n \int_{x_0}^x R_n^{(n+1)}(t) \frac{(t-x)^n}{n!} dt, \quad (\text{D.1.22})$$

also letztendlich

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x R_n^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt \quad (\text{D.1.23})$$

und wegen Gleichung (D.1.17)

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt. \quad (\text{D.1.24})$$

Aus den Gleichungen (D.1.12) und (D.1.24) ergibt sich somit folgender Satz: Jede Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x \mapsto f(x)$ , die in einer Umgebung  $U(x_0) \subseteq \mathbb{R}$  um einen Punkt  $x_0$  mindestens  $n+1$  mal stetig differenzierbar ist, läßt sich für alle Werte  $x \in U(x_0)$  darstellen durch die sogenannte *Taylor'sche Formel*

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f_n^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt. \quad (\text{D.1.25})$$

Häufig wird das Restglied  $R_n(x)$  auch unter Verwendung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung umgeformt. Das Vorzeichen von  $(x-t)$  ändert sich im Intervall  $[x_0, x]$  nicht. Demzufolge kann man schreiben

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n dt \quad (\text{D.1.26})$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \left( -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \right) \Big|_{x_0}^x \quad (\text{D.1.27})$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \quad (\text{D.1.28})$$

für ein  $\xi$ , das zwischen  $x_0$  und  $x$  liegt. Diese Form des Restgliedes nennt man auch die *Langrangesche Form*. Die Taylor'sche Formel mit dem Restglied von Lagrange lautet dann

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \quad (\text{D.1.29})$$

mit einem zwischen  $x_0$  und  $x$  liegenden  $\xi$ .

### D.1.2 Die Taylorsche Reihe

Wenn die Funktion  $f$  nun nicht nur  $n+1$  mal sondern unendlich oft stetig differenzierbar ist, dann kann man die Taylorsche Formel für beliebiges  $n$  anwenden. Für  $n \rightarrow \infty$  geht die Taylorsche Formel dann in eine unendliche Reihe über. Gilt außerdem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0, \tag{D.1.30}$$

dann konvergiert die unendliche Reihe und ist identisch mit  $f(x)$ , d.h.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k. \tag{D.1.31}$$

## D.2 Anwendung der Taylorschen Reihe zur Entwicklung der Newtonschen binomischen Reihe

### D.2.1 Berechnung der Reihenentwicklung von $(1+x)^\alpha$

Wir können nun daran gehen, die Funktion

$$f(x) = (1+x)^\alpha \tag{D.2.1}$$

in eine Taylorreihe zu entwickeln. Dazu sind zunächst einmal die Ableitungen von  $f$  zu bestimmen:

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \tag{D.2.2}$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \tag{D.2.3}$$

⋮

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}. \tag{D.2.4}$$

Bei einer Entwicklung um  $x_0 = 0$  ergibt sich dann unter Verwendung von Gleichung (D.1.12)

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdots (\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_n(x). \tag{D.2.5}$$

### D.2.2 Beweis der Konvergenz für $|x| < 1$

Nehmen wir zunächst an, daß  $|x| < 1$  sei. Damit überhaupt  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$  gelten kann, muß die Reihe

$$1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + \dots \quad (\text{D.2.6})$$

zumindestens erst einmal konvergieren. Bezeichnen wir die einzelnen Summanden der Reihe mit  $u_k$ , so ist

$$u_k(x) := \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}x^k \quad (\text{D.2.7})$$

und in unserem speziellen Fall

$$u_0(x) = 1 \quad (\text{D.2.8})$$

$$u_k(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}x^k \quad \text{für alle } k \geq 1. \quad (\text{D.2.9})$$

Der Absolutwert des Quotienten zweier aufeinanderfolgender Summanden ist dann

$$\left| \frac{u_{k+1}(x)}{u_k(x)} \right| = \frac{|\alpha-k|}{k+1}|x|. \quad (\text{D.2.10})$$

Wegen  $|x| < 1$  gibt es ein  $q$  mit  $|x| < q < 1$ . Es läßt sich nun stets ein  $k_0 > \alpha$  finden, so daß für alle  $k \geq k_0$  gilt:

$$k \geq k_0 > -\frac{q + \alpha|x|}{q - |x|}. \quad (\text{D.2.11})$$

Dies läßt sich wegen  $q - |x| > 0$  und  $k - \alpha > 0$  umformen zu

$$k(q - |x|) > -q - \alpha|x| \quad (\text{D.2.12})$$

$$(k+1)q > (k-\alpha)|x| \quad (\text{D.2.13})$$

$$(k+1)q > |k-\alpha||x| \quad (\text{D.2.14})$$

$$\frac{|\alpha-k|}{k+1}|x| < q. \quad (\text{D.2.15})$$

In Verbindung mit Gleichung (D.2.10) bedeutet dies, daß sich für  $|x| < 1$  stets ein  $k_0$  finden läßt, so daß für alle  $k \geq k_0$  der Betrag der Summanden  $u_k(x)$  mit wachsendem  $k$  abnimmt, d.h. es gilt

$$|u_k(x)| \leq |u_{k_0}(x)|q^{k-k_0} \quad (\text{D.2.16})$$



für alle  $k \geq k_0$ . Nun gilt unter Berücksichtigung von  $|q| < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |u_k(x)| \leq \sum_{k=0}^{k_0-1} |u_k(x)| + |u_{k_0}(x)| \sum_{k=k_0}^{\infty} q^{k-k_0} \quad (\text{D.2.17})$$

$$= \sum_{k=0}^{k_0-1} |u_k(x)| + |u_{k_0}(x)| \sum_{j=0}^{\infty} q^j \quad (\text{D.2.18})$$

$$= \sum_{k=0}^{k_0-1} |u_k(x)| + |u_{k_0}(x)| \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n q^j \quad (\text{D.2.19})$$

$$= \sum_{k=0}^{k_0-1} |u_k(x)| + |u_{k_0}(x)| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (\text{D.2.20})$$

$$= \sum_{k=0}^{k_0-1} |u_k(x)| + |u_{k_0}(x)| \frac{1}{1 - q}. \quad (\text{D.2.21})$$

Wir haben also gezeigt, daß

$$\sum_{k=0}^n |u_k(x)| \quad (\text{D.2.22})$$

für  $n \rightarrow \infty$  nach oben begrenzt ist. Da die Folge außerdem monoton wachsend ist, ist damit die absolute Konvergenz der Reihe für  $n \rightarrow \infty$  bewiesen. Nun ist eine absolut konvergente Reihe (d.h. die Summe der Absolutbeträge der Summanden konvergiert) auch selbst konvergent, wie im folgenden Abschnitt bewiesen wird. Damit haben wir nachgewiesen, daß die Reihenentwicklung für  $(1+x)^\alpha$  für  $|x| < 1$  konvergiert. Dies bedeutet allerdings noch nicht, daß bereits nachgewiesen wäre, daß der Grenzwert der Reihe identisch mit  $(1+x)^\alpha$  ist. Dazu bleibt noch zu zeigen, daß das Restglied  $R_n(x)$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen 0 konvergiert. Zunächst einmal wollen wir jedoch zeigen, daß jede absolut konvergente Reihe auch direkt konvergent ist.

### D.2.3 Beweis der Konvergenz von absolut konvergenten Reihen

Um dies zu beweisen, definieren wir zunächst

$$v_k(x) := \frac{1}{2}(|u_k(x)| + u_k(x)), \quad w_k(x) := \frac{1}{2}(|u_k(x)| - u_k(x)). \quad (\text{D.2.23})$$

Sowohl  $v_k(x)$  als auch  $w_k(x)$  sind niemals negativ, denn

$$v_k(x) = \begin{cases} u_k(x) & \text{für } u_k(x) \geq 0, \\ 0 & \text{für } u_k(x) \leq 0, \end{cases} \quad \text{und} \quad w_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } u_k(x) \geq 0, \\ |u_k(x)| & \text{für } u_k(x) \leq 0. \end{cases}$$

(D.2.24)

Somit gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} v_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} |v_k(x)|, \quad (\text{D.2.25})$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} w_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} |w_k(x)|. \quad (\text{D.2.26})$$

Da außerdem  $|v_k(x)| \leq |u_k(x)|$  und  $|v_k(x)| \leq |u_k(x)|$  gilt und die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} |u_k(x)|$$

konvergiert, konvergieren auch die Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} |v_k(x)|$$

und

$$\sum_{k=0}^{\infty} |w_k(x)|.$$

Damit konvergieren unter Verwendung von Gleichungen (D.2.25) und (D.2.26)

$$\sum_{k=0}^{\infty} v_k(x)$$

und

$$\sum_{k=0}^{\infty} w_k(x)$$

Wegen  $u_k(x) = v_k(x) - w_k(x)$  bedeutet dies, daß auch die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$$

konvergiert.

### D.2.4 Beweis des Verschwindens des Restgliedes für $|x| < 1$

Es bleibt nun noch zu zeigen, daß das Restglied  $R_n(x)$  für  $n \rightarrow \infty$  verschwindet. Nach Gleichung (D.1.24) läßt sich das Restglied darstellen als

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt. \quad (\text{D.2.27})$$

Die Ableitung  $f^{(n+1)}(x)$  ist in diesem Falle gegeben durch

$$f^{(n+1)}(x) = \alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n-1} \quad (\text{D.2.28})$$

und somit

$$R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n)}{n!} \int_0^x (1+t)^{\alpha-n-1}(x-t)^n dt. \quad (\text{D.2.29})$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es einen Wert  $\xi$  mit  $0 < \xi < x$ , so daß

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n)}{n!} (1+\xi x)^{\alpha-n-1} (x-\xi x)^n \int_0^x dt \\ &= \frac{(\alpha-1) \cdots (\alpha-n)}{n!} x^n \left( \frac{1-\xi}{1+\xi x} \right)^n (1+\xi x)^{\alpha-1} \alpha x. \end{aligned} \quad (\text{D.2.30})$$

Der Faktor

$$\frac{(\alpha-1)(\alpha-2) \cdots (\alpha-n)}{n!} x^n$$

ist identisch mit dem  $n$ -ten Summanden der konvergenten Reihe aus Gleichung (D.2.6), wenn man  $\alpha$  durch  $\alpha-1$  ersetzt (was erlaubt ist, da die Reihe, wie oben gezeigt, für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$  konvergiert, somit also auch für  $\alpha-1$ ). Aus der Konvergenz der Reihe folgt, daß die Summanden für  $n \rightarrow \infty$  gegen 0 konvergieren, d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\alpha-1)(\alpha-2) \cdots (\alpha-n)}{n!} x^n = 0. \quad (\text{D.2.31})$$

Untersuchen wir nun den Faktor

$$\left( \frac{1-\xi}{1+\xi x} \right)^n$$

etwas näher. Aus  $x > -1$  folgt mit  $0 < \xi$ , daß  $\xi x > -\xi$  und damit  $1+\xi x > 1-\xi$ . Andererseits ist  $\xi < x < 1$ , d.h.  $1-\xi > 0$ . Demzufolge gilt also  $0 < 1-\xi < 1+\xi x$ , d.h.

$$0 < \frac{1-\xi}{1+\xi x} < 1 \quad (\text{D.2.32})$$

und damit

$$0 < \left( \frac{1 - \xi}{1 + \xi x} \right)^n < 1. \quad (\text{D.2.33})$$

Der dritte Faktor

$$(1 + \xi x)^{\alpha-1} \alpha x$$

hängt nicht von  $n$  ab. Wegen  $0 < \xi < x$  liegt dieser Wert folglich zwischen den von  $n$  unabhängigen Grenzen  $\alpha x$  und  $(1 + x)^{\alpha-1} \alpha x$ .

Damit läßt sich also das Restglied  $R_n(x)$  aus Gleichung (D.2.30) als Produkt dreier Faktoren darstellen, von denen einer für  $n \rightarrow \infty$  gegen 0 konvergiert und die anderen beiden beschränkt bleiben. Folglich konvergiert das gesamte Produkt, also  $R_n(x)$ , gegen 0, d.h.  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ . Somit ist die für  $|x| < 1$  und beliebiges  $\alpha \in \mathbb{R}$  gültige Identität

$$(1 + x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad (\text{D.2.34})$$

bewiesen. Ersetzt man nun  $x$  durch  $-x$ , erhält man

$$(1 - x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\alpha}{n} x^n, \quad (\text{D.2.35})$$

also die bei der Berechnung der Meridianbogenlänge verwendete Gleichung (D.0.1).

### D.2.5 Beweis der Divergenz für $|x| > 1$

Nehmen wir nun an, daß  $|x| > 1$ . Es läßt sich stets ein  $k_0 > \alpha$  finden, so daß für alle  $k \geq k_0$  gilt:

$$k \geq k_0 > -\frac{1 + \alpha|x|}{1 - |x|}. \quad (\text{D.2.36})$$

Dies läßt sich wegen  $1 - |x| < 0$  und  $k - \alpha > 0$  umformen zu

$$k(1 - |x|) < -1 - \alpha|x| \quad (\text{D.2.37})$$

$$k + 1 < (k - \alpha)|x| \quad (\text{D.2.38})$$

$$k + 1 < |k - \alpha||x| \quad (\text{D.2.39})$$

$$\frac{|\alpha - k|}{k + 1} |x| > 1. \quad (\text{D.2.40})$$

In Verbindung mit Gleichung (D.2.10) ergibt sich, daß sich für  $|x| > 1$  stets ein  $k_0$  finden läßt, so daß für alle  $k \geq k_0$  der Betrag der Summanden  $u_k(x)$  mit wachsendem  $k$  zunimmt. Demzufolge kann die Reihe nicht konvergieren. Mithin kann die Funktion  $(1 + x)^\alpha$  für  $|x| > 1$  nicht nach Gleichung (D.2.5) für  $n \rightarrow \infty$  in eine konvergente Reihe entwickelt werden.

## E Die Formel von Moivre

Bei der Berechnung der Länge von Meridianbögen trat der Term  $\sin^{2n}(\tau)$  auf. Dieser soll durch einfache nichtpotenzierte Winkelfunktionen ausgedrückt werden. Dazu wird  $\sin(\tau)$  zunächst durch dessen Darstellung mittels komplexer Zahlen ersetzt:

$$\sin(\tau) = \Im [e^{i\tau}] = \frac{e^{i\tau} - e^{-i\tau}}{2i} . \quad (\text{E.0.1})$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \sin^{2n}(\tau) &= \frac{1}{(2i)^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-e^{-i\tau})^k (e^{i\tau})^{2n-k} \\ &= \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} e^{i(2n-2k)\tau} . \end{aligned} \quad (\text{E.0.2})$$

Da  $\sin^{2n}(\tau)$  eine reelle Zahl ist, gilt

$$\begin{aligned} \sin^{2n}(\tau) &= \Re [\sin^{2n}(\tau)] \\ &= \Re \left[ \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} e^{i(2n-2k)\tau} \right] \\ &= \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} \Re [e^{i(2n-2k)\tau}] . \end{aligned} \quad (\text{E.0.3})$$

Mit  $\Re [e^{ix}] = \cos(x)$  ergibt sich also

$$\sin^{2n}(\tau) = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} \cos((2n-2k)\tau) . \quad (\text{E.0.4})$$

Diese Gleichung wird auch *Formel von Moivre* genannt.