

Fourierreihen und Fouriertransformation

Peter Breinfeld

Störck-Gymnasium
Bad Saulgau

16. September 2002

Vorbemerkung

In diesem Skript werden Fourierreihen und Fouriertransformationen behandelt. Dabei wird mehr Wert auf die Technik als auf exakte mathematische Beweise gelegt.

Inhaltsverzeichnis

1	Fourierreihen	2
1.1	Trigonometrische Form	2
1.2	Exponentialform	2
1.3	Bestimmung der Koeffizienten	3
1.4	Die Deltafunktion	4
1.5	Eigenschaften der Fourierreihe	7
1.6	Beispiele	7
1.6.1	Eine Konstante	7
1.6.2	Dreiecksfunktion	7
1.6.3	Eine Stufe	8
1.7	Integraldarstellung der Partialsummen	9
2	Kontinuierliche Fouriertransformation	11
2.1	Übergang zur Fouriertransformation	12
2.2	Beispiele	14
2.3	Eigenschaften	15
2.4	Die Faltung	16
2.5	Fouriertransformation und Ableitung	17
3	Diskrete Fouriertransformation	18
3.1	Kronecker-Symbol	19
3.2	Definition der diskreten Fouriertransformation	19
3.3	Beispiele	20
3.4	Eigenschaften	21

1. Fourierreihen

Fourierreihen werden verwendet, um periodische Funktionen als Reihe von Sinus und Kosinusgliedern darzustellen.

1.1. Trigonometrische Form

Es sei $f(t)$ eine reelle Funktion mit der Periode T . Diese Funktion soll durch die folgende Summe approximiert werden:

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^n (A_k \cos k\omega t + B_k \sin k\omega t) \quad \text{mit} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad (1)$$

Die Aufgabe besteht nun darin, die A_k und B_k so zu bestimmen, dass $S_n(t)$ die Funktion $f(t)$ möglichst gut annähert. Die Frage ist hierbei, was man unter guter Annäherung verstehen will.

1.2. Exponentialform

Mit der EULERSchen Gleichung $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$ kann man die Reihe auf eine Exponentialform bringen. Denn es folgt ja aus dieser Gleichung

$$\cos k\omega t = \frac{1}{2}(e^{ik\omega t} + e^{-ik\omega t}) \quad \sin k\omega t = \frac{1}{2i}(e^{ik\omega t} - e^{-ik\omega t})$$

Setzt man das in die Gl. (1) ein, dann bekommt man

$$S_n(t) = A_0 + \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{2} e^{ik\omega t} (A_k - iB_k) + \frac{1}{2} e^{-ik\omega t} (A_k + iB_k) \right]$$

Setzt man nun für $k \geq 0$

$$C_0 = A_0 \quad C_k = \frac{1}{2}(A_k - iB_k) \quad C_{-k} = \frac{1}{2}(A_k + iB_k) \quad (2)$$

dann kann man die Reihe (1) in der folgenden Form schreiben:

$$S_n(t) = \sum_{k=-n}^n C_k e^{ik\omega t} \quad (3)$$

Man erkennt, dass die Koeffizienten C_k und C_{-k} konjugiert komplex sind. Die A_k und B_k lassen sich aus den C_k ebenso leicht wiedergewinnen:

$$A_k = C_k + C_{-k} \quad \text{und} \quad B_k = i(C_k - C_{-k})$$

Da man mit Exponentialfunktionen leichter rechnen kann als mit trigonometrischen, wird im Folgenden hauptsächlich die Exponentialform benützt.

1.3. Bestimmung der Koeffizienten

Zunächst ist zu klären, was man unter guter Approximation verstehen will. In der Theorie der Fourierreihen fordert man, dass das folgende Integral einen minimalen Wert annimmt:

$$\Delta = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t) - S_n(t)|^2 dt \quad (4)$$

Nun soll dieses Integral ausgewertet werden. Der Betrag bezieht sich hier auf einen komplexen Term z , sein Quadrat ist also $|z|^2 = zz^*$, wobei der „*“ für die konjugiert komplexe Zahl steht. Damit gilt nun:

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(\sum_k C_k^* e^{-ik\omega t} - f^*(t) \right) \left(\sum_m C_m e^{im\omega t} - f(t) \right) dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k,m} C_k^* C_m \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{i(m-k)\omega t} dt - \frac{1}{T} \sum_k C_k^* \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega t} dt \\ &\quad - \frac{1}{T} \sum_k C_k \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^*(t) e^{ik\omega t} dt + \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt \end{aligned} \quad (5)$$

In diesem Ergebnis ist das erste Integral

$$\delta_{km} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{i(m-k)\omega t} dt$$

Dieses ist 1 für $m = k$ und für $m \neq k$ ist es 0, denn

$$\delta_{km} = \frac{1}{T(i(m-k)\omega)} \left[e^{i(m-k)\omega \frac{T}{2}} - e^{-i(m-k)\omega \frac{T}{2}} \right] = 0$$

In der eckigen Klammer sind die Exponenten wegen $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ganze Vielfache von $i\pi$, und nach der EULERSchen Formel gilt dann $e^{i\pi n} = \cos(n\pi) = \cos(-n\pi) = e^{-i\pi n}$, denn $\sin(n\pi)$ ist immer Null.

Damit wird die Doppelsumme in Gl. (5) zu einer einfachen Summe über k und es gilt:

$$\Delta = \frac{1}{T} \sum_k \left[C_k C_k^* - C_k^* \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega t} dt - C_k \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^*(t) e^{ik\omega t} dt \right] + \dots$$

Der vierte Summand ist hier nur durch die Punkte angedeutet, denn er hängt nicht von den C_k ab, spielt also für die Minimierung keine Rolle.

Fasst man Δ als Funktion der Variablen C_k und C_k^* auf, dann ist die notwendige Bedingung für ein Minimum, dass die partiellen Ableitungen verschwinden, also:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial C_k} = \frac{1}{T} \sum_k \left[C_k^* - \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^*(t) e^{ik\omega t} dt \right] = 0$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial C_k^*} = \frac{1}{T} \sum_k \left[C_k - \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega t} dt \right] = 0$$

Die beiden Gleichungen sind nur konjugiert komplex zueinander, so dass als Bedingung für die C_k folgt:

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega t} dt \quad (6)$$

1.4. Die Deltafunktion

Noch nicht geklärt ist die Frage, unter welchen Bedingungen die Reihe (1) bzw. (3) im Grenzfall $n \rightarrow \infty$ mit der Funktion übereinstimmt. Wir setzen also nun für die Fourierreihe an:

$$\tilde{f}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega t} \quad (7)$$

Zwischen $S_n(t)$ und $f(t)$ besteht der folgende Zusammenhang, wenn man (6) in (3) einsetzt:

$$S_n(t) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(\sum_{k=-n}^n \frac{1}{T} e^{-ik\omega(\tau-t)} \right) f(\tau) d\tau \rightarrow \tilde{f}(t) \quad (8)$$

Soll Gleichheit zwischen $f(t)$ und $\tilde{f}(t)$ bestehen, so muss der Ausdruck in der großen Klammer, der nun als $\delta(\tau - t)$ bezeichnet wird, folgende Eigenschaft haben:

$$f(t) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(\tau - t) f(\tau) d\tau \quad (9)$$

Durch diese Beziehung ist die *Delta-Funktion* definiert. Sie ist eigentlich keine Funktion, sondern eine verallgemeinerte Funktion oder Distribution und hat die folgenden Eigenschaften:

Da zwischen $f(t)$ und $f(\tau)$ für $t \neq \tau$ kein Zusammenhang besteht, muss $\delta(\tau) = 0$ sein für jedes $\tau \neq 0$, andererseits muss das Integral der Delta-Funktion über \mathbb{R} 1 sein, man braucht nur in Gl. (9) $f(t) = 1$ zu wählen. Daraus erkennt man, dass $\delta(t)$ keine gewöhnliche Funktion sein kann. Man kann sie sich als Grenzfall einer Funktionenschar vorstellen, die eine immer spitzere

„Nadel“ erzeugt, die bei 0 unendlich hoch ist und sonst überall Null. Einige mögliche Scharen ($\varepsilon \rightarrow 0$) sind:

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon(t) &= \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & ; -\frac{\varepsilon}{2} \leq t \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 & ; \text{sonst} \end{cases} & \delta_\varepsilon(t) &= \frac{1}{2\varepsilon} e^{-|t|/\varepsilon} \\ \delta_\varepsilon(t) &= \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} e^{-(t/\varepsilon)^2} & \delta_\varepsilon(t) &= \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + t^2} \end{aligned} \quad (10)$$

Alle diese Funktionenscharen erfüllen die Bedingung, die Fläche 1 einzuschließen und im Grenzfall $\varepsilon \rightarrow 0$ werden sie 0 für alle $t \neq 0$.

Wir probieren mit $f(t) = t^2$ und der ersten der obigen Scharen die Gleichung (9) aus:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(\tau - t) \tau^2 d\tau &= \int_{t-\varepsilon/2}^{t+\varepsilon/2} \frac{1}{\varepsilon} \tau^2 d\tau = \frac{1}{3\varepsilon} \left[\left(t + \frac{\varepsilon}{2}\right)^3 - \left(t - \frac{\varepsilon}{2}\right)^3 \right] \\ &= \frac{1}{3\varepsilon} \left(3t^2\varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{4} \right) = t^2 + \frac{\varepsilon}{12} \rightarrow t^2 \end{aligned}$$

Wir kehren nun wieder zur Gleichung (8) zurück. Die Klammer hat die Form

$$\begin{aligned} G_n(t) &= \frac{1}{T} \sum_{k=-n}^n e^{-ik\omega t} \Rightarrow \\ \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} G_n(t) dt &= \sum_{k=-n}^n \frac{1}{T} \int e^{-ik\omega t} dt = \sum_{k=-n}^n \delta_{0k} = 1 \end{aligned}$$

Damit hat der „Kern“ G_n im Periodenintervall die Eigenschaft einer Deltafunktion. Betrachtet man die Summe als eine geometrische Reihe $\sum q^k$ mit $q = e^{i\omega t}$, dann bekommt man (Das Vorzeichen im Exponenten ist egal, weil man von $-n$ bis n summiert):

$$G_n(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-n}^n e^{ik\omega t} = \frac{1}{T} e^{in\omega t} \sum_{k=0}^{2n} e^{-ik\omega t} = \frac{1}{T} e^{in\omega t} \frac{1 - e^{-i\omega t(2n+1)}}{1 - e^{-i\omega t}}$$

Diesen Ausdruck kann Mathematica umformen zu:

$$G_n(t) = \frac{\sin[(2n+1)\pi t/T]}{T \sin(\pi t/T)} \quad (11)$$

Das Schaubild ist in Abb. 1 gezeichnet. Die erste positive Nullstelle liegt bei $t = T/(4n+2)$, der Abstand der beiden Nullstellen links und rechts von Null ist also $T/(2n+1) \approx T/(2n)$ für große n . Man erkennt, dass für $n \rightarrow \infty$ dieser Abstand immer kleiner wird, während die Fläche unter der Kurve immer 1 ist; mit der l’Hospitalschen Regel bekommt man für $G_n(0)$

$$G_n(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(2n+1)\pi/T \cos(2n+2)\pi t/T}{\pi \cos \pi t/T} = \frac{2n+1}{T}$$

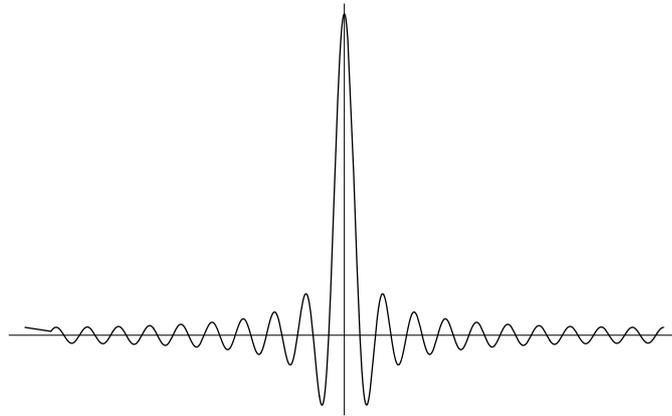


Abb.1 Schaubild des Kerns $G_n(t)$

d. h. mit wachsendem n wird die Spitze immer schärfer, genau das, was man von einer Deltafunktion erwartet.

Damit ist nun die Übereinstimmung der Fourierreihe (7) mit der Funktion gezeigt.

Aus den komplexen Koeffizienten kann man noch die Koeffizienten der trigonometrischen Reihe bestimmen:

$$A_0 = C_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt \quad (12a)$$

$$\begin{aligned} A_k &= C_k + C_{-k} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) (e^{-ik\omega t} + e^{ik\omega t}) dt \\ &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega t dt \end{aligned} \quad (12b)$$

$$\begin{aligned} B_k &= i(C_k - C_{-k}) = \frac{i}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) (e^{-ik\omega t} - e^{ik\omega t}) dt \\ &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega t dt \end{aligned} \quad (12c)$$

Man beachte, dass in dieser Darstellung A_0 eine „Extrawurst“ ist. Andererseits ist bemerkenswert, dass A_0 gerade der Mittelwert der Funktion f im Periodenintervall ist.

1.5. Eigenschaften der Fourierreihe

Ist eine Funktion gerade (symmetrisch zur y-Achse), dann treten in der trigonometrischen Reihe nur Kosinusglieder auf, denn dann ist $f(t) \sin k\omega t$ ungerade, somit ist das Integral in (12c) Null. Entsprechend hat die Reihe einer ungeraden Funktion nur Sinusglieder.

Die folgenden Zusammenhänge bestehen zwischen der Funktion und ihren Fourierkoeffizienten:

$$f(t - a) \leftrightarrow C_k e^{-ik\omega a} \quad (13)$$

$$f(t)e^{ia\omega t} \leftrightarrow C_{k-a} \quad (14)$$

$$f(at) \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_k \\ |a| \end{array}; \frac{\omega}{a} \right\} \quad (15)$$

Die Beweise sind billig, man muss nur substituieren.

1.6. Beispiele

1.6.1. Eine Konstante

Es sei $f(t) = 1$. Dann ist A_0 als Mittelwert ebenfalls 1, alle restlichen A_k und B_k sind 0. Das ist nichts besonderes.

1.6.2. Dreiecksfunktion

Nun sei $f(t) = 1 + 2t/T$ für $-T/2 \leq t \leq 0$ und $f(t) = 1 - 2t/T$ für $0 \leq t \leq T/2$. Um eine Fourierreihe bilden zu können, denkt man sich diese Funktion nach beiden Seiten periodisch fortgesetzt. Man bekommt dann eine „Zackenkurve“ (siehe Abb. 2) Die Funktion ist gerade, also gibt es nur Kosinusglieder. A_0 ist der Mittelwert also $A_0 = \frac{1}{2}$. Um die restlichen A_k zu berechnen muss man das Integral in Gl. (12b) in zwei Teile (für > 0 und < 0) aufspalten und dann mittels Produktintegration integrieren. Ich zeige nur die rechte Hälfte:

$$\begin{aligned} \int_0^{T/2} \left(1 - \frac{2t}{T}\right) \cos \frac{2\pi kt}{T} dt &= 0 - \frac{2}{T} \int t \cos \frac{2\pi kt}{T} dt \\ &= -\frac{1}{k\pi} \left[t \sin \frac{2\pi kt}{T} \right]_0^{T/2} + \frac{1}{k\pi} \int \sin \frac{2\pi kt}{T} dt \\ &= \frac{T}{2k^2\pi^2} \left[-\cos \frac{2\pi kt}{T} \right]_0^{T/2} = \frac{T(1 - \cos k\pi)}{k^2\pi^2} \end{aligned}$$

Wegen der Symmetrie von f gibt die linke Hälfte dasselbe, so dass man erhält:

$$A_k = \frac{2}{T} \frac{T(1 - \cos k\pi)}{k^2\pi^2} = \frac{2(1 - \cos k\pi)}{k^2\pi^2}$$

Für gerade $k \neq 0$ ist $A_k = 0$, für ungerade k bekommt man $A_k = \frac{4}{k^2\pi^2}$. Die Reihe lautet also:

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \left(\cos \omega t + \frac{1}{9} \cos 3\omega t + \frac{1}{25} \cos 5\omega t + \dots \right)$$

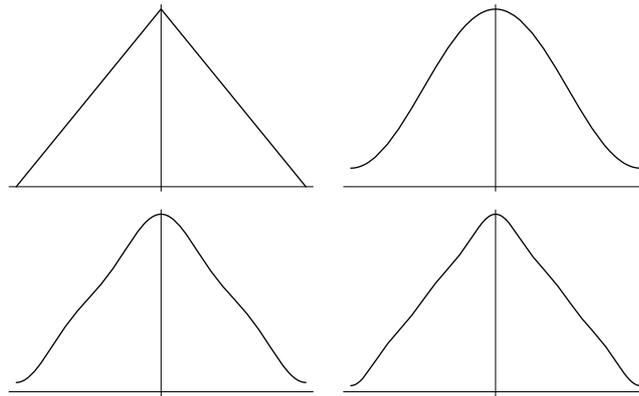


Abb.2 Die Dreiecksfunktion und ihre Fourierreihen mit 2, 3 und 4 Kosinusgliedern

In Abb. 2 sieht man, dass die Näherungen schnell die gewünschte Gestalt annehmen.

Diese Reihe ist auch sonst noch nett: Setzt man $t = 0$ ein, dann bekommt man

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots \right) \Rightarrow 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$$

Viele Reihensummen kommen auf diese Art zustande. So ist z. B.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Das kann man nachweisen, wenn man den Parabelbogen $f(t) = t^2$ im Bereich $-\pi \leq t \leq \pi$ in seine Fourierreihe entwickelt. Die Reihe hat wieder nur Kosinusglieder, weil t^2 gerade ist und lautet:

$$t^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4 \cos kt}{k^2}$$

Für $t = \pi$ ist $\cos k\pi = (-1)^k$, damit wird dies zu

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

1.6.3. Eine Stufe

Es sei $f(t) = -\frac{1}{2}$ in $-T/2 \leq t \leq 0$ und $f(t) = +\frac{1}{2}$ in $0 \leq t \leq T/2$. Die Funktion ist ungerade, hat also nur Sinusglieder. Man bekommt für die B_k :

$$\begin{aligned} B_k &= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \frac{1}{2} \sin k\omega t \, dt + \frac{2}{T} \int_{-T/2}^0 -\frac{1}{2} \sin k\omega t \, dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \sin k\omega t \, dt \\ &= -\frac{2}{k\omega T} [\cos k\omega t]_0^{T/2} = -\frac{2}{k\omega T} (\cos k\pi - 1) = \frac{1 - \cos k\pi}{k\pi} \end{aligned}$$

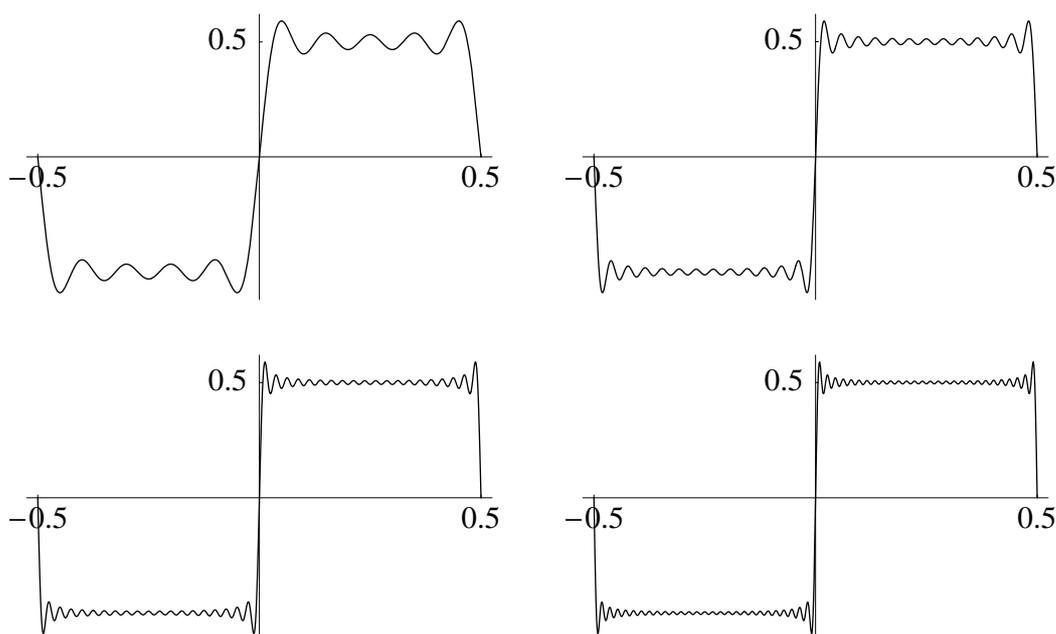


Abb.3 Annäherung der Stufenfunktion mit $n = 5$, $n = 25$, $n = 40$ und $n = 55$ Reihengliedern

Für gerade k sind die B_k alle Null, für ungerade k wird der Zähler 2, so dass die folgende Reihe für $T = 1$ entsteht (hier ist $k\omega = 2k\pi$):

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin 2\pi t}{1} + \frac{\sin 6\pi t}{3} + \frac{\sin 10\pi t}{5} + \dots \right)$$

Betrachtet man die entstehenden Näherungen in Abb. 3, dann stellt man fest, dass zwar die horizontalen Teile immer weniger „wellig“ werden, aber an den Abbruchstellen gibt es Überschwinger, die auch durch Steigerung der Anzahl der verwendeten Reihenglieder nicht weggebracht werden können. Dies ist eine typische Erscheinung der Fourierreihen. Sie mögen keine Sprünge.

Man kann zeigen, dass im Grenzfall $n \rightarrow \infty$ der Überschwinger die Höhe von ca 0,0895 hat. Darauf soll im folgenden Abschnitt näher eingegangen werden.

1.7. Integraldarstellung der Partialsummen

Wir betrachten mal wieder den Kern von Gleichung (11). Dieser Kern hat die Periode T , weil

$$TG_n(t+T) = \frac{\sin[(2n+1)\pi t/T + (2n+1)\pi]}{\sin(\pi t/T + \pi)} = \frac{\sin[(2n+1)\pi t/T + \pi]}{\sin(\pi t/T + \pi)}$$

Das ist wieder $TG_n(t)$, denn $\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha$. Damit ist nun gemäß Gl. (8)

$$S_n(t) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)G_n(x-t)dx$$

Setzt man $u = x - t$, dann ergibt sich:

$$S_n(t) = \int_{-T/2-t}^{T/2-t} f(u+t)G_n(u)du$$

Da sowohl f als auch G_n periodisch mit der Periode T sind, kann man das Integrationsintervall verschieben, ohne den Wert des Integrals zu ändern, also verschieben wir es um t und spalten das Integral in zwei Teile auf:

$$\begin{aligned} S_n(t) &= \int_{-T/2}^0 f(u+t)G_n(u)du + \int_0^{+T/2} f(u+t)G_n(u)du \\ &= \int_0^{+T/2} [f(t-u) + f(t+u)] G_n(u)du \end{aligned} \quad (16)$$

Dabei haben wir benützt, dass $G_n(t)$ eine gerade Funktion ist und im ersten Integral u durch $-u$ ersetzt.

Nun wird ja für $n \rightarrow \infty$ aus $G_n(u)$ die Deltafunktion $\delta(u)$, damit wird

$$S(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(t) = \frac{1}{2}[f(t+0) + f(t-0)] \quad (17)$$

wobei $t+0$ bzw. $t-0$ für den rechtseitigen bzw. linksseitigen Grenzwert stehen. Das bedeutet, dass an einer Sprungstelle die Fourierreihe den Funktionswert „in der Mitte der Stufe“ liefert. Ist ja ganz vernünftig. Bei stetigen Funktionen ist der Reihenwert gleich dem Funktionswert.

Wir betrachten nun wieder die Stufe von Abschnitt 1.6.3 und einen kleinen positiven t -Wert ($t < T/4$); Dort sitzen ja die „Überschwinger“. Dann wird (beachte, dass wir uns die Stufen periodisch fortgesetzt denken!)

$$f(t-u) + f(t+u) = \begin{cases} 1 & ; 0 \leq u < t \\ 0 & ; t \leq u < T/2 - t \\ -1 & ; T/2 - t < u \leq T/2 \end{cases}$$

Setzt man das in Gl. (16) ein, dann ergibt sich:

$$S_n(t) = \int_0^t G_n(u)du + 0 - \int_{T/2-t}^{T/2} G_n(u)du$$

Für große n kann man in Gl. (11) die 1 gegen $2n$ locker vernachlässigen, dann wird für kleine t wegen $\sin t \approx t$:

$$G_n(t) = \frac{\sin(2\pi nt/T)}{T \sin \pi t/T} \Rightarrow G_n(z) = \frac{\sin nz}{T \sin z/2} \approx \frac{2 \sin nz}{T z} \quad \text{mit } z = \frac{2\pi t}{T}$$

Weiter erkennt man aus Abb. 1, dass $G_n(u)$ nur in der Nähe von $u = 0$ deutlich von Null verschieden ist, also kann man für kleine t das Integral zwischen $T/2 - t$ und $T/2$ vernachlässigen. Für große n und kleine t geht also $S_n(t)$ über in:

$$\frac{2}{T} \int_0^t \frac{\sin \frac{2\pi nu}{T}}{\frac{2\pi u}{T}} du = \frac{2}{T} \int_0^{2\pi nt/T} \frac{\sin x}{x/n} \frac{T}{2\pi n} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi nt/T} \frac{\sin x}{x} dx$$

Hier wurde $x = 2\pi nt/T$ substituiert. Das Ergebnis enthält den *Integralsinus*

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin u}{u} du$$

eine höhere Funktion, die nicht als Term elementarer Funktionen dargestellt werden kann. Die Extrema werden durch Ableiten nach der oberen Integralgrenze bestimmt:

$$S'_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{2\pi n \sin x}{T x} = 0$$

Damit liegen die Extrema bei $x = m\pi$. Das erste Extremum bei $t_1 = T/(2n)$ ist ein Maximum, das zweite bei $t_2 = T/n$ ein Minimum, wie man am Vorzeichenwechsel erkennen kann. Der Wert des Maximums ist

$$S_n(t_1) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{\pi} \text{Si}(\pi) = \frac{1}{2} + 0,0895$$

Entsprechend liegt das Minimum bei $\text{Si}(2\pi)/\pi = \frac{1}{2} - 0,048$. (Die Werte berechnete Mathematica). Diese Werte sind von n unabhängig, d. h. diesen Überschwinger an der Kante wird man immer haben. Jetzt sieht man auch, weshalb man als möglichst gute Approximation die Integralbedingung von Gl. (4) gewählt hat. Obwohl es immer die Abweichung von 0,0895 gibt, konvergiert die Fläche gegen die der Stufe, weil die „Wellen“ immer schmaler (und mehr) werden, aber die Differenz $|f(t) - S_n(t)|$ geht nicht an allen Stellen gegen Null.

2. Kontinuierliche Fouriertransformation

Die Zerlegung einer Funktion in ihre periodischen Komponenten mittels einer Fourierreihe kommt in der Physik häufig vor. Jeder harmonische Oszillator hat die Eigenschaft unter dem Einfluss erzwungener Schwingungen durch die Kraft $F(t)$ mit den Fourierkoeffizienten F_n diejenigen verstärkt herauszusieben, deren Frequenzen $k\omega$ in der Nähe seiner Resonanzfrequenz liegen.

Eine beliebige Schwingung (= periodische Funktion) wird also aus einer ggf. unendlichen Zahl von Grund- und Oberschwingungen aufgebaut.

Betrachtet man nun nichtperiodische, auf ganz \mathbb{R} definierte Funktionen, so wird man eine überabzählbare Menge von Frequenzen benötigen, also anstelle der C_k eine Funktion $C(k)$ wählen und die Summe durch ein Integral ersetzen.

2.1. Übergang zur Fouriertransformation

Die Fourierreihe der Funktion f war definiert durch:

$$f(t) = \sum_k C_k e^{i\omega_k t} \quad \text{mit} \quad C_k = \frac{1}{T} \int_T f(t) e^{-i\omega_k t} dt \quad \text{und} \quad \omega_k = \frac{2\pi k}{T}$$

Setzen wir nun $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$, dann bekommt man, wenn man die Gleichung für die C_k in die Reihe einsetzt:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\omega_k t} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i\omega_k t} dt \right) \Delta\omega$$

Für $T \rightarrow \infty$ wird $\Delta\omega \rightarrow 0$, also zu $d\omega$ und die Summe geht in ein Integral über. Wir nennen den Ausdruck in der großen Klammer nun $F(\omega)$, woraus sich das sog. *Fouriersche Integraltheorem* ergibt:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Damit haben wir nun die Definition der Fouriertransformation gefunden (man beachte die Vorzeichen im Exponenten und die Vorfaktoren vor den Integralen!)

$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$	Hintransformation	(18)
$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{+i\omega t} d\omega$	Rücktransformation	(19)

Für die Wahl der Vorzeichen im Exponenten und die Vorfaktoren gibt es verschiedenste Konventionen, das Vorzeichen ist ja ziemlich gleichgültig, weil man über ganz \mathbb{R} integriert; oft findet man auch vor beiden Integralen den Vorfaktor $1/\sqrt{2\pi}$, damit es „symmetrischer“ aussieht, dann hat man aber die hübsche Eigenschaft verloren, dass $F(0)$ der Mittelwert von $f(t)$ ist; auch ein Ansatz mit Frequenzen $\nu = 1/T$ statt Kreisfrequenzen $\omega = 2\pi/T$ ist möglich und erhält die Mittelwerteigenschaft, dann schreibt man:

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i \nu t} dt \quad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu$$

Es ist aber alles ziemlich gleichgültig, egal wie man es anstellt, immer tauchen Faktoren 2π an anderer Stelle auf, wenn man sie an einer Stelle entfernt hat. Benützt man ein CAD-Programm, dann sollte man immer feststellen, welche Konvention es benützt!

Bedingungen: Diese Integrale können nur dann einen endlichen Wert haben, wenn die Funktion $|f(t)|$ über \mathbb{R} integrierbar ist, insbesondere muss also $f(t) \rightarrow 0$ für $|t| \rightarrow \infty$ gelten. Dieses Kriterium ist nur notwendig.

Betrachtet man nicht nur Funktionen, sondern auch sogenannte *verallgemeinerte Funktionen*, dann gilt, dass jede verallgemeinerte Funktion eine Fouriertransformierte besitzt.

Dabei kann man sich eine verallgemeinerte Funktion Φ als Grenzwert einer „regulären“ Folge von Grundfunktionen vorstellen. Ein Grundfunktion ist dabei eine auf \mathbb{R} definierte, beliebig oft differenzierbare Funktion $\phi(x)$, die ebenso wie alle ihre Ableitungen für $|x| \rightarrow \infty$ schneller verschwindet als jede Potenz von x ; Beispiele sind $\phi(x) = e^{-x^2}$ oder Funktionen, die außerhalb eines endlichen Intervalls Null sind.

Regulär heißt eine Folge von Grundfunktionen ϕ_n dann, wenn für jede Grundfunktion ψ der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(x) \psi(x) dx$$

existiert. Eine nette Darstellung dieses Zugangs findet man in [2]. Alle δ_ε von Gl. (10) sind Grundfunktionen, für $\varepsilon = 1/n$ bilden sie eine reguläre Folge, die gegen die Delta-Funktion konvergiert.

Ausblick: Die Fouriertransformation erzeugt aus einer Funktion eine neue Funktion, ihre „Bildfunktion“. Solche Transformationen gibt es viele, sehr bekannt ist die *Laplace-Transformation*, die folgendermaßen definiert ist:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad \text{wo} \quad t \geq 0; \quad p \in \mathbb{C}$$

Sie ist sehr verwandt mit der Fouriertransformation. Auch für Folgen gibt es Transformationen, z. B. die *Z-Transformation*, die aus einer Zahlenfolge (a_n) die Funktion

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} \quad \text{mit} \quad z \in \mathbb{C}$$

macht.

Deltafunktion: Setzen wir für den Kern $G_n(t)$ aus Abschnitt 1.4 $T = 2\pi$ und beachten die Gl. (11), in der wir $n = 1/\varepsilon$ gesetzt haben,

$$\delta_\varepsilon(t) = G_n(t) = G_{1/\varepsilon}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} e^{i\omega_k t} \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} e^{i\omega t} d\omega = \frac{\sin(t/\varepsilon)}{\pi t}$$

dann haben wir für $\varepsilon \rightarrow 0$ eine Darstellung der Deltafunktion gefunden:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega \quad (20)$$

Dass dies eine Deltafunktion ist, kann man auch einsehen, wenn man den Ausdruck

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t - \varepsilon|\omega|} d\omega = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + t^2}$$

betrachtet, das ergibt gerade wieder eine der möglichen Scharen für die Deltafunktion von Gl. (10), und für $\varepsilon \rightarrow 0$ bekommt man das Integral von Gl. (20).

Nun ist die Fouriertransformierte der Deltafunktion 1 und umgekehrt die Fouriertransformierte der Konstanten 1 gerade $2\pi \delta(\omega)$. Die 1 lässt sich also mit einer einzigen Frequenz darstellen, nämlich mit $\omega = 0$. Da man über ganz \mathbb{R} integriert kommt bei $\omega = 0$ natürlich auch unendliche Intensität heraus. Man sieht wie es geht: nur langsam variierende Funktionen haben eine hohe spektrale Dichte bei kleinen Frequenzen, also eine „spitze“ Fouriertransformierte, stark variierende Funktionen haben viele über die Zahlengerade verteilte Frequenzen, also eine „breite“ Fouriertransformierte.

Jetzt zeigen wir noch, dass Rücktransformation wieder zur Ausgangsgleichung führt:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} e^{i\omega t} d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau f(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-\tau)} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t-\tau) d\tau = f(t) \end{aligned}$$

2.2. Beispiele

Beispiel 2.1 Wir betrachten die Stufe $f(t) = 1$ in $-T/2 \leq t \leq T/2$ und $f(t) = 0$ sonst. Die Fouriertransformierte ist dann:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 2 \int_0^{T/2} \cos \omega t dt = T \cdot \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}$$

Das Schaubild dieser Fouriertransformierten sieht aus wie Abb. 1, allerdings ist diese Funktion nicht mehr periodisch, wie es der Kern G_n war, der ja die Periode T hat.

Die Fouriertransformierte hat keinen Imaginärteil, weil f gerade ist. Für $T \rightarrow 0$ hat man wieder eine Darstellung der Deltafunktion, sofern man als Stufenhöhe nicht 1 sondern $1/T$ wählt. Dann ist die Fläche immer 1.

Beispiel 2.2 Es sei $f(t) = e^{-|t|/\tau}$ die gerade beidseitige Exponentialfunktion. Dann ist

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|/\tau - i\omega t} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-t/\tau} \cos \omega t dt = \frac{2\tau}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

Wieder ist der Imaginärteil der Fouriertransformierten Null, weil f gerade ist.

Beispiel 2.3 Gaußsche Glockenkurve:

$$f(t) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

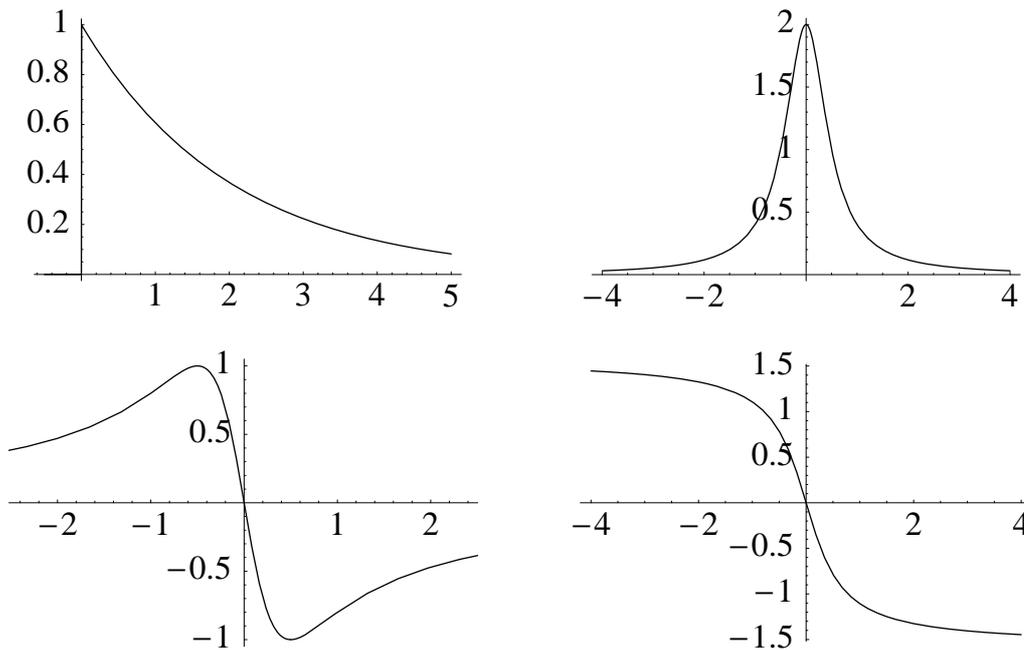


Abb.4 Die einseitige Exponentialfunktion Realteil, Imaginärteil und Phase der Fouriertransformierten

$$F(\omega) = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \cos \omega t \, dt = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\omega^2}$$

Die Fouriertransformierte einer Gaußfunktion ist wieder eine Gaußfunktion.

Beispiel 2.4 Sei für $\lambda > 0$ gegeben: $f(t) = e^{-\lambda t}$ für $t \geq 0$ und 0 sonst. Das ist die „rechte Hälfte“ einer fallenden Exponentialfunktion. Sie ist nun nicht mehr symmetrisch, also wird die Fouriertransformierte einen Imaginärteil haben. Schaubilder von f , dem Realteil von F , dem Imaginärteil von F und der Phase (dem „Stellwinkel“) sind in Abb. 4 für $\lambda = 0,5$ gezeichnet.

$$F[\omega] = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t - i\omega t} \, dt = \left[\frac{e^{-(\lambda + i\omega)t}}{-(\lambda + i\omega)} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda + i\omega}$$

2.3. Eigenschaften

Die Fouriertransformation hat folgende Eigenschaften:

$$af(t) + bg(t) \leftrightarrow aF(\omega) + bG(\omega) \quad (21)$$

$$f(t - a) \leftrightarrow F(\omega)e^{-i\omega a} \quad (22)$$

$$f(t)e^{-i\omega_0 t} \leftrightarrow F(\omega - \omega_0) \quad (23)$$

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (24)$$

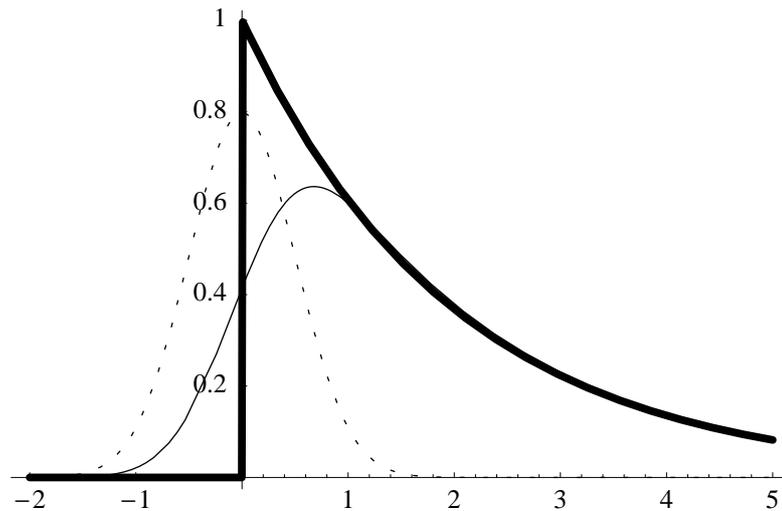


Abb.5 Gaußfunktion mit $\sigma = \frac{1}{2}$ (gepunktet), einseitige Exponentialfunktion mit $\lambda = \frac{1}{2}$ (dick) und die Faltung dieser beiden Funktionen (normal).

Beispiel 2.5 Wir wenden Gleichung (22) auf die Stufe aus Beispiel 2.1 an. Verschieben wir diese Stufe um $a = T/2$ nach rechts, dann liegt sie ganz im positiven Bereich. Ihre Fouriertransformierte ist nach Gl. (22) dann gegeben durch

$$G(\omega) = F(\omega)e^{-i\omega T/2} = T \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} (\cos \omega T/2 - i \sin \omega T/2)$$

sie hat nun also einen Imaginärteil bekommen. Was allerdings unverändert geblieben ist, ist der Betrag $|G(\omega)| = |F(\omega)|$.

2.4. Die Faltung

Die Faltung der Funktion $f(t)$ mit der Funktion $g(t)$ ist definiert als:

$$f * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)dx \quad (25)$$

Man kann sich die Faltung¹ vorstellen als Gewichtung der Funktion f durch die Funktion g in der Umgebung von t .

Eigenschaften: Die Faltung ist kommutativ, assoziativ und distributiv. Es gilt also:

$$f * g = g * f \quad f * (g * h) = (f * g) * h \quad f * (g + h) = f * g + f * h \quad (26)$$

¹ Der Name erklärt sich so: Zeichnet man die Schaubilder von f und g in ein gemeinsames Achsenkreuz und faltet dann das Schaubild an der Gerade $x = t/2$, dann fallen die Punkte x und $t-x$ aufeinander

Beispiel 2.6 Wir nehmen die einseitige Exponentialfunktion $f(t)$ aus Beispiel 2.4 und falten sie mit einer Gaußfunktion $g(t)$ aus Beispiel 2.3. Die Gaußfunktion gewichtet nun die Funktion f so, dass die Werte um 0 herum (dort ist g am größten) verstärkt, weit außen liegende Werte aber unverändert bleiben.

Wäre g die Deltafunktion, dann wäre die Faltung gleich der Funktion. Nun ist aber g „breiter“, d. h. f wird „verschmiert“. Stellt man sich f als ein Signal vor und g als die Auflösung des Messgeräts, die nie ganz scharf ist, so wird die Spitze der Exponentialfunktion verschmiert.

$$\begin{aligned}
 f * g(t) &= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\lambda x - \frac{(t-x)^2}{2\sigma^2}} dx \\
 &= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \int_0^{\infty} \exp \left[-x\lambda + \frac{tx}{\sigma^2} - \frac{x^2}{2\sigma^2} \right] dx \\
 &= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} e^{\frac{t^2}{2\sigma^2}} e^{-t\lambda} e^{\frac{\sigma^2 \lambda^2}{2}} \int_0^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} (x - (t - \sigma^2 \lambda))^2 \right] dx \\
 &= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-t\lambda} e^{\frac{\sigma^2 \lambda^2}{2}} \sigma \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \right) \int_{-\frac{(t-\sigma^2 \lambda)}{\sigma \sqrt{2}}}^{\infty} e^{-u^2} du \\
 &= \frac{1}{2} e^{-\lambda t + \frac{\sigma^2 \lambda^2}{2}} \operatorname{erfc} \left(\frac{\sigma \lambda}{\sqrt{2}} - \frac{t}{\sigma \sqrt{2}} \right)
 \end{aligned}$$

In der zweiten Zeile wurde der Exponent ausmultipliziert, in der dritten der Exponent unter dem Integral quadratisch ergänzt, in der vierten $u = (x - (t - \lambda \sigma^2))/(\sigma \sqrt{2})$ substituiert, so dass man die bekannte Funktion $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$ verwenden kann, wobei

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{erf}(x) = 1$$

ist. Die große Klammer wurde eingemogelt, damit erf entsteht. Ein Schaubild der beteiligten Funktionen findet man in Abb. 5.

Die Faltung der Fouriertransformierte hat die **Eigenschaften**:

$$f(t) * g(t) \leftrightarrow F(\omega) \cdot G(\omega) \tag{27}$$

$$f(t) \cdot g(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F(\omega) * G(\omega) \tag{28}$$

2.5. Fouriertransformation und Ableitung

Betrachtet man die Fouriertransformierte der Ableitung $f'(t)$ einer Funktion, so erhält man durch Produktintegration

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-i\omega t} dt = [f(t) e^{-i\omega t}]_{-\infty}^{\infty} - (-i\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = i\omega F(\omega)$$

Der erste Term fällt weg, weil $f(t)$ für $|t| \rightarrow \infty$ gegen Null gehen muss. Damit haben die weiteren Eigenschaften

$$f'(t) \leftrightarrow i\omega F(\omega) \quad (29)$$

$$t^n f(t) \leftrightarrow i^n F^{(n)}(\omega) \quad (30)$$

Beispiel 2.7 Lösung einer Differentialgleichung. Betrachtet man die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

so kann man sie durch Fouriertransformation bezüglich einer Variablen in eine gewöhnliche Differentialgleichung umwandeln. Dazu setzt man

$$U(\xi, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i\xi x} dx$$

Bildet man nun auf beiden Seiten der Wellengleichung die Fouriertransformierte, dann bekommt man:

$$\frac{d^2 U(\xi, t)}{dt^2} = c^2 (i\xi)^2 U(\xi, t) = -c^2 \xi^2 U(\xi, t)$$

Dies hat die Form der gewöhnlichen Schwingungsgleichung. ξ ist nun nur ein Parameter geworden. Die bekannte Lösung der Schwingungsgleichung $s''(x) + k^2 s(x) = 0$ lautet ja $s = A \cos kx$. Hier hängt nun A noch vom Parameter ξ ab, so dass die Lösung die Form bekommt:

$$U(\xi, t) = A(\xi) \cos(c\xi t)$$

Nun kommt die Rücktransformation:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\xi) \cos(c\xi t) e^{i\xi x} d\xi \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\xi) [e^{i\xi(x+ct)} + e^{i\xi(x-ct)}] d\xi \\ &= \frac{1}{2} a(x+ct) + \frac{1}{2} a(x-ct) \end{aligned}$$

Dabei ist $A(\xi)$ die Fouriertransformierte der „Anfangsform“ $a(x)$ der Welle, also $a(x) = u(x, 0)$. Diese Lösung hat uns zwei voneinander wegstrebende Wellenberge der Form $a(x)$ geliefert.

3. Diskrete Fouriertransformation

Häufig sind in Anwendungen nur Messwerte der Funktion f vorhanden, die Funktion selbst aber gar nicht bekannt. Man kennt also aus Messwerten nur die Funktionswerte zu den Zeiten $t_k = k \Delta t$ mit $k = 0; 1; \dots; n-1$.

3.1. Kronecker-Symbol

Aus dem Faktor $e^{i\omega t}$ wird bei diskreten Zeiten t_k mit $T = n \Delta t$:

$$e^{i\omega t} = e^{\frac{2\pi i t}{T}} = e^{\frac{2\pi i k \Delta t}{n \Delta t}} = e^{\frac{2\pi i k}{n}} \equiv W_n^k$$

Deshalb werden nun die folgenden Bezeichnungen eingeführt:

$$W_n = e^{\frac{2\pi i}{n}} \quad \text{und} \quad \omega_j = \frac{2\pi i j}{n \Delta t} \quad (31)$$

Der „Kern“ W_n ist periodisch, es gilt nämlich $W_n^{kn} = e^{2\pi i k} = 1$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. W_n^k ist ein komplexer Zeiger der Länge 1. Die Potenzen von W_n geben alle möglichen Lösungen der Kreisteilungsgleichung $z^n = 1$. So hat etwa W_3^k drei mögliche Werte, nämlich $W_3^0 = 1$, $W_3^1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$ und $W_3^2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}$. Dies sind genau die drei möglichen komplexen Lösungen von $z^3 = 1$. Die aufeinanderfolgenden Zeiger W_n^k und W_n^{k+1} schließen immer den Winkel $2\pi/n$ ein.

Projiziert man den Zeiger W_n^k auf die x-Achse (reelle Achse), dann bekommt man $\cos \frac{2\pi k}{n}$. Summiert man die Zeiger in der folgenden Weise auf, dann entsteht:

$$\sum_{j=0}^{n-1} W_n^{(k-m)j} = \sum_{j=0}^{n-1} (e^{2\pi i (k-m)/n})^j = \frac{1 - e^{2\pi i (k-m)}}{1 - e^{2\pi i (k-m)/n}} = n \delta_{km} \quad (32)$$

dabei hat man die Summenformel für die geometrische Reihe benützt. Für $k \neq m$ wird der Zähler und damit der ganze Ausdruck Null, für $k = m$ entstünde $0/0$, man muss diesen Fall also gesondert betrachten, in diesem Fall sind aber alle Summanden 1, so dass die Summe n entsteht. δ_{km} ist also das Kronecker-Symbol, das 0 ist für $m \neq k$ und 1 für $m = k$.

3.2. Definition der diskreten Fouriertransformation

Wir gehen wieder von der Fourierreihe aus und führen das Integral der C_k in eine Summe über:

$$\begin{aligned} C_j &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-2\pi i j t / T} dt \\ &\rightarrow \frac{1}{n \Delta t} \sum_k f_k \exp \left[-\frac{2\pi i j k \Delta t}{n \Delta t} \right] \Delta t = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{-2\pi i j k / n} \end{aligned}$$

Dabei hat man $t = k \Delta t$, $T = n \Delta t$ und $dt = \Delta t$ gesetzt. Die Summe endet bei $n - 1$ weil dann die Intervallgrenze erreicht ist (man fing bei 0 zu zählen an).

Damit hat man nun die Definition der diskreten Fouriertransformation und ihrer Rücktransformation:

$$F_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_k W_n^{-kj} \quad \text{Hintransformation} \quad (33)$$

$$f_k = \sum_{j=0}^{n-1} F_j W_n^{+kj} \quad \text{Rücktransformation} \quad (34)$$

Man beachte den fehlenden Faktor $1/n$ bei der Rücktransformation! Auch hier gibt es wieder verschiedene Konventionen für die Vorzeichen der Exponenten von W_n und den Faktor vor der Summe.

3.3. Beispiele

Beispiel 3.1 Wir betrachten die konstante Folge $f_k = 1$ für $k = 0, \dots, 3$, also $n = 4$. Die kontinuierliche Fouriertransformation liefert für die Konstante eine Deltafunktion, so dass man hier nur $F_0 \neq 0$ erwartet. Nun ist

$$F_j = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 W_4^{-kj} = \frac{1}{4} \cdot 4\delta_{0j}$$

wie aus Gl. (32) sofort folgt. Also ist $F_0 = 1$, alle anderen $F_j = 0$.

Beispiel 3.2 Wir nehmen die Folge $(1; 0; -1; 0)$, was $\cos(k\pi/2)$ entspricht. Wegen $n = 4$ sind die Zeiger W_4^x der Reihe nach $1; -i; -1; i$. Sie werden bei der Hintransformation im Uhrzeigersinn durchlaufen.

$F_0 = 0$ Das ist wieder der Mittelwert, wie sonst immer!

$$F_1 = \frac{1}{4}(1 + (-1)W_4^{-2}) = \frac{1}{4}(1 + (-1) \leftarrow) = \frac{1}{4}(1 + (-1)(-1)) = \frac{1}{2}$$

$$F_2 = \frac{1}{4}(1 + (-1)W_4^{-4}) = \frac{1}{4}(1 + (-1) \rightarrow) = \frac{1}{4}(1 + (-1)1) = 0$$

$$F_3 = \frac{1}{4}(1 + (-1)W_4^{-6}) = \frac{1}{4}(1 + (-1) \leftarrow) = \frac{1}{4}(1 + (-1)(-1)) = 1/2$$

Zur Erhöhung der Klarheit (ist das so?) wurden die Zeiger W_4^x durch Pfeile dargestellt.

Beispiel 3.3 Nun noch eine Folge, die dem $\sin(k\pi/2)$ entspricht, also $(0; 1; 0; -1)$. Das geht fast wie im vorigen Beispiel:

$$F_0 = 0$$

$$F_1 = \frac{1}{4}(1 \downarrow + (-1) \uparrow) = \frac{1}{4}(-i + (-1)i) = -\frac{i}{2}$$

$$F_2 = \frac{1}{4}(1 \leftarrow + (-1) \leftarrow) = \frac{1}{4}(1(-1) + (-1)(-1)) = 0$$

$$F_3 = \frac{1}{4}(1 \uparrow + (-1) \downarrow) = \frac{1}{4}(1i + (-1)(-i)) = \frac{i}{2}$$

Hier gibt es auch komplexe Werte. Das hat wieder was mit gerade und ungerade zu tun.

Fortsetzung der Folgen: Eine Folge nennt man gerade bzw. ungerade, wenn

$$f_{-k} = f_k \quad \text{bzw.} \quad f_{-k} = -f_k \quad \text{mit} \quad f_{-k} = f_{n-k}$$

gilt. Nun fragt man sich wohl, was soll denn z. B. f_{-2} sein? Dazu denkt man sich die Folge an der 0 gemäß der letzten Vorschrift oben „umgeklappt“. Man beachte, dass f_0 nicht umgeklappt wird. Des Weiteren denkt man sich die Folgen periodisch fortgesetzt, also $f_{k+n} = f_k$. Damit hat man aus den n -Sampling-Werten eine nach links und rechts unendliche periodische Folge erzeugt.

3.4. Eigenschaften

Zum Schluss sollen die Eigenschaften der Fouriertransformation auf den diskreten Fall übertragen werden:

$$f_k * g_k = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} f_m g_{k-m} \quad (\text{Def. der Faltung}) \quad (35)$$

$$af_k + bg_k \leftrightarrow aF_j + bF_j \quad (36)$$

$$f_{k-m} \leftrightarrow F_j W_n^{-jm} \quad (37)$$

$$f_k W_n^{mj} \leftrightarrow F_{j-m} \quad (38)$$

$$f_k * g_k \leftrightarrow F_j G_j \quad (39)$$

$$f_k \cdot g_k \leftrightarrow F_j * G_j \quad (40)$$

Bei der Definition der Faltung muss man ggf. die Folge wieder ins Negative umklappen. Schreibt man hier die beiden $(f_1, \dots, f_k)(g_1, \dots, g_k)$ hintereinander auf einen Papierstreifen und faltet diesen dann in der Mitte, so fallen die Folgenglieder f_m und g_{k-m} aufeinander

Literatur

- [1] Tilman Butz: *Fouriertransformation für Fußgänger*; B. G. Teubner, Stuttgart; 2. Aufl.; 2000; Schöne elementare Darstellung mit vielen Beispielen. ISBN: 3-519-10202-1.
- [2] M. J. Lighthill: *Einführung in die Theorie der Fourieranalysis und der verallgemeinerten Funktionen*; Nr. 139 in BI Hochschultaschenbücher; Bibliographisches Institut; 1966; Darstellung der Fouriertransformation von verallgemeinerten Funktionen. Diese werden hier über Funktionenfolgen definiert.