

Schaltungen mit Operationsverstärkern



Abbildung 1a,b: Schaltbild eines Operationsverstärkers

Ein Operationsverstärker (OP, Opamp) ist ein Verstärker, der die Differenzspannung zwischen seinen beiden Eingängen v_+ und v_- verstärkt:

$$u_{out} = v_0 \cdot u_{12}$$

Abbildung 1a zeigt das Schaltbild eines Operationsverstärkers. Neben den Eingängen v_+ , v_- und dem Ausgang v_{out} benötigt der Operationsverstärker noch eine positive und negative Versorgungsspannung (hier als V_{cc} und V_{ee} gekennzeichnet). Früher war eine Versorgungsspannung von ± 15 Volt üblich. Diese recht hohe Spannung wird heutzutage nicht mehr oft angewendet. Übliche Spannungen liegen heute im Bereich ± 5 Volt und kleiner. In einem Schaltbild werden die Versorgungsspannung des OPs der Übersicht wegen oft nicht gezeichnet. Das übliche Schaltbild des OPs ist in Abbildung 1b dargestellt. Abbildung 2 zeigt das Ersatzschaltbild eines Operationsverstärkers.

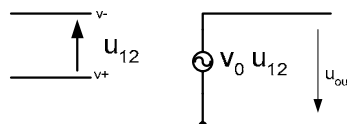


Abbildung 2: Ersatzschaltbild des idealen Operationsverstärkers

Für einen idealen Operationsverstärker ist die Verstärkung v_0 unendlich. Die Differenzspannung u_{12} wird unendlich hoch verstärkt. Das bedeutet, dass bei einem unbeschalteten Operationsverstärker (d.h. keine Rückkopplung des Ausgangssignals u_{out} auf das Eingangssignal u_{12}) bei einer auch noch so kleinen Differenzspannung u_{12} an den Eingängen, die Ausgangsspannung v_{out} unendlich groß wird. Das Vorzeichen dieser Spannung hängt dabei vom Vorzeichen der Differenzspannung ab. Die Ausgangsspannung eines realen OPs kann nicht größer als die positive Versorgungsspannung und nicht negativer als die negative Versorgungsspannung werden. Die Ausgangsspannung eines realen Operationsverstärkers wird folglich bei kleinster Differenzspannung am Eingang sofort entweder die positive oder negative Versorgungsspannung aufweisen.

Es ist damit sofort ersichtlich, dass ein Operationsverstärker ohne Rückkopplung zum Verstärken von Signalen nicht besonders sinnvoll ist. In Normalfall wird der Operationsverstärker deshalb so in eine Schaltung eingebaut, dass ein Teil der Ausgangsspannung auf den Eingang (v_+ oder v_-) zurückwirkt. Die äußere Beschaltung des Operationsverstärkers muss dabei so wirken, dass die Ausgangsspannung ihrer Ursache entgegenwirkt (sogenannte Gegenkopplung). Vergrößert zum Beispiel das Eingangssignal die Differenzspannung u_{12} , so muss die Rückkopplung des Ausgangssignals dafür sorgen, dass sich die Eingangsspannungsdifferenz u_{12} wieder verkleinert. Das System ist dann im Gleichgewicht, wenn sich eine Eingangsspannungsdifferenz u_{12} von null ergibt. Der Ausgang wird also solange nachgesteuert, bis die Spannung u_{12} null wird. Durch die geschickte Wahl des externen Netzwerks kann die Verstärkung der Gesamtschaltung damit eingestellt werden. Es ist die Aufgabe des Schaltungsdesigners dafür zu sorgen, dass die äußere Beschaltung des Operationsverstärkers tatsächlich eine Rückkopplung ergibt. Das Gegenteil wäre eine Mitkopplung. Eine Vergrößerung der Differenzspannung durch das

Eingangssignal hätte dann eine zusätzlich Vergrößerung dieser Differenzspannung durch die Ausgangsspannung zur Folge. Da diese Differenz ja praktisch unendlich verstärkt wird, würde die Ausgangsspannung immer gegen die positive oder negative Versorgungsspannung stoßen. Die Schaltung wäre im Sinne eines Verstärkers nicht funktionsfähig.

Rechnen mit idealen Operationsverstärker

Für ideale Operationsverstärker gilt folgendes:

1. Die Eingangsströme in den Operationsverstärkereingängen sind null (unendlich hoher Eingangswiderstand).
2. Die Verstärkung des Operationsverstärkers v_0 ist unendlich.
3. Daraus folgt, dass bei funktionierender Operationsverstärkerschaltung die Spannung u_{12} auch null sein muss (sonst würde der Ausgang ja eine unendlich hohe Spannung aufweisen müssen).

Schaltungen mit idealen Operationsverstärkern werden am besten mittels des Knotenpotentialverfahrens gelöst. Dies scheint auf den ersten Blick etwas kontrovers zu sein, da das Ersatzschaltbild eines Opamps eine gesteuerte Spannungsquelle enthält, gesteuerte Spannungsquellen aber nicht unmittelbar über das Knotenpotentialverfahren gelöst werden können.

Da bei einem idealen Operationsverstärker die Spannung u_{12} null annimmt, ist folglich das Potential am v_+ Eingang gleich mit dem Potential am v_- Eingang. Dieses Wissen kann bei der Berechnung von Schaltungen mit idealen Operationsverstärkern ausgenutzt werden. Die Anzahl der unbekannten Knotenpotentiale kann damit um eins reduziert werden. Aber Vorsicht! Dass die beiden Potentiale v_+ und v_- identisch sind, bedeutet nicht, dass in einer Ersatzschaltung die beiden Knoten verbunden werden dürfen!! Es gibt keine elektrisch leitende Verbindung – auch nicht in einem Ersatzschaltbild – zwischen den beiden Potential v_+ und v_- .

Die Berechnung einer Schaltung mit idealen Operationsverstärkern kann in vier Schritten erfolgen:

1. Aufstellen des Ersatzschaltbildes.
2. Aufstellen der Knotengleichungen. Alle Knoten müssen einbezogen werden (auch die Ausgangsknoten der OPs), die Knotengleichungen der Ausgänge der OPs werden allerdings nicht aufgestellt. Man erhält ein unsymmetrisches Gleichungssystem.
3. Eliminieren eines Knotenpotentials. Dies ist möglich, da das Potential am v_+ Eingang identisch ist mit dem Potential am v_- Eingang (u_{12} ist beim idealen OP ja null).
4. Lösen des entstandenen Gleichungssystem nach dem gesuchten Potential.

Beispiel 1:

Die Übertragungsfunktion U_2/U_1 der Schaltung aus Abbildung 3 soll berechnet werden.

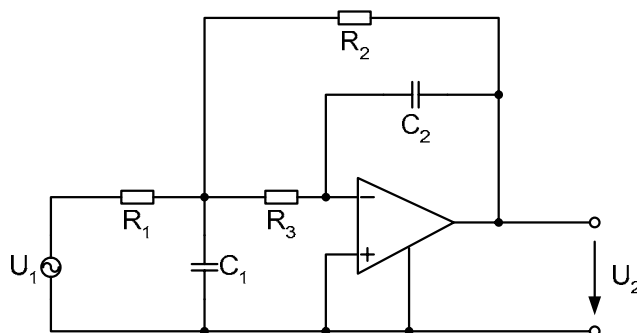


Abbildung 3 Schaltung mit Operationsverstärker

1. Aufstellen des Ersatzschaltbildes.

Das Knotenpotentialverfahren kann nicht direkt bei Schaltungen mit Spannungsquellen angewendet werden. Auftretende Spannungsquellen sollten möglichst in Stromquellen umgewandelt werden. Einzige Ausnahme ist die gesteuerte Spannungsquelle des OPs. Diese bleibt erhalten. Damit ergibt sich das folgende Ersatzschaltbild.

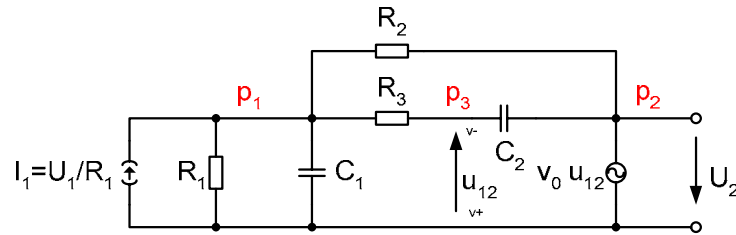


Abbildung 4 Ersatzschaltbild der Operationsverstärkerschaltung

2. Aufstellen der Knotengleichungen.

Im nächsten Schritt werden nun alle Knoten durchnummeriert und die Knotengleichungen aufgestellt. Jetzt kommt bei der Berechnung von Schaltungen mit idealen Operationsverstärkern eine Besonderheit: Die Knotengleichung für den Ausgang des OPs (also dort wo die gesteuerte Spannungsquelle liegt) wird nicht aufgestellt (Knoten p_2). Man erhält nun eine unsymmetrische Matrix.

$$\begin{array}{lcl} \text{Gleichung Knoten } p_1 \rightarrow & \begin{array}{ccc} p_1 & p_2 & p_3 \\ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + j\omega C_1 & -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_3} \end{array} & \begin{array}{c} = \\ \frac{U_1}{R_1} \end{array} \\ \text{Gleichung Knoten } p_3 \rightarrow & \begin{array}{ccc} -\frac{1}{R_3} & -j\omega C_2 & \frac{1}{R_3} + j\omega C_2 \end{array} & \begin{array}{c} = \\ 0 \end{array} \end{array}$$

3. Eliminieren eines Potentials.

Die Spannung u_{12} ist ja bekannt (u_{12} ist null). Dies muss nun in die Gleichungsmatrix eingearbeitet werden. Für die Schaltung hier bedeutet dies: Das Potential p_3 ist null, da der positive Eingang des OPs fest auf Masse liegt. Damit kann die Spalte mit p_3 gestrichen werden.

$$\begin{array}{lcl} \begin{array}{cc} p_1 & p_2 \\ \frac{1}{R_{\text{ges}}} + j\omega C_1 & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_3} & -j\omega C_2 \end{array} & \begin{array}{c} = \\ \frac{U_1}{R_1} \\ 0 \end{array} & \text{mit } \frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \end{array}$$

4. Berechnen der Übertragungsfunktion

Die Übertragungsfunktion kann nun klassisch berechnet werden. Dazu wird zuerst die Gesamtdeterminante bestimmt:

$$\det \Delta = \left(\frac{1}{R_{\text{ges}}} + j\omega C_1 \right) (-j\omega C_2) - \frac{1}{R_2 R_3} = -\frac{j\omega C_2}{R_{\text{ges}}} - (j\omega)^2 C_1 C_2 - \frac{1}{R_2 R_3}$$

Danach wird die Determinante von p_2 bestimmt:

$$\det p_2 = U_1 \cdot \frac{1}{R_3 R_1}$$

Die gesuchte Ausgangsspannung ergibt sich damit zu:

$$U_2 = \frac{\det p_2}{\det \Delta} = \frac{1}{R_3 R_1} \cdot \frac{U_1}{-j\omega C_2 \frac{1}{R_{\text{ges}}} - (j\omega)^2 C_1 C_2 - \frac{1}{R_2 R_3}}$$

Teilen durch U_1 und weiters auflösen führt zu:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{R_3 R_1 C_1 C_2} \cdot \frac{1}{\omega^2 - j\omega \frac{1}{C_1 R_{\text{ges}}} - \frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2}}$$

Das Ergebnis kann dadurch überprüft werden, dass ω zu Null gesetzt wird. Für $\omega=0$ sind die Kapazitäten Leerläufe. Es ergibt sich nun ein einfacher invertierender Verstärker.

$$\left. \frac{U_2}{U_1} \right|_{\omega=0} = -\frac{R_2 R_3 C_1 C_2}{R_3 R_1 C_1 C_2} = -\frac{R_2}{R_1}$$

Dies ist tatsächlich die Übertragungsfunktion des invertierenden Verstärkers.

Merke: Die Überprüfung der Ergebnisse auf Plausibilität ist sehr wichtig. Bei längeren Rechnungen schleichen sich oft Fehler ein. Meist sind dies Vorzeichenfehler, falsche Indizes etc.

Eine Überprüfung der Einheiten sollte immer gemacht werden. Zusätzlich sollte das Ergebnis an einfachen Überlegungen überprüft werden, z.B. an dem Verhalten für $\omega=0$ und $\omega \rightarrow \infty$.

Viele Fehler in Prüfungen können damit vermieden werden.

Beispiel 1a:

Im vorangehenden Beispiel wurde die Spannungsquelle zusammen mit dem in Serie liegenden Widerstand R_1 in eine Stromquelle und einen parallel geschalteten Widerstand R_1 umgerechnet. Diese Umwandlung ist eigentlich nicht notwendig, sondern ergibt sich aus der Knotenpotentialanalyse von selbst.

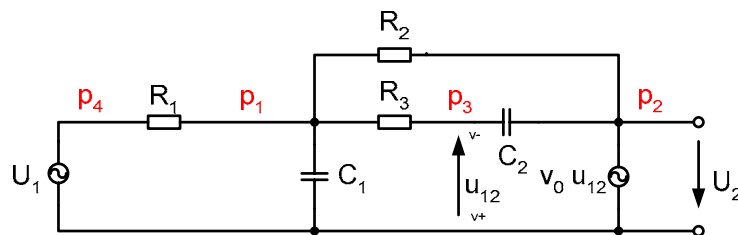


Abbildung 5 Ersatzschaltbild der Operationsverstärkerschaltung

Abbildung 5 zeigt nochmals das Ersatzschaltbild der Operationsverstärkerschaltung aus Abbildung 3, diesmal allerdings ohne die Umwandlung von der Spannungsquelle in eine Stromquelle. Wiederum werden nun die Knotengleichungen aufgestellt, allerdings - wie schon im Beispiel 1 - nicht für die Knoten, an denen eine Spannungsquelle liegt. Es ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

	p_1	p_2	p_3	p_4	$=$
Gleichung Knoten $p_1 \rightarrow$	$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + j\omega C_1$	$-\frac{1}{R_2}$	$-\frac{1}{R_3}$	$-\frac{1}{R_1}$	0
Gleichung Knoten $p_3 \rightarrow$	$-\frac{1}{R_3}$	$-j\omega C_2$	$\frac{1}{R_3} + j\omega C_2$	0	0

Gleichung Knoten 1 nicht aufstellen, da bekannt ($p_2 = v_0 u_{12}$).

Gleichung Knoten 4 nicht aufstellen, da bekannt ($p_4 = U_1$).

Nun werden die bekannten Knoten auf die rechte Seite des Gleichungssystems gebracht und abhängige Knoten, soweit möglich, eliminiert:

Der Knoten p_4 ist bekannt, dieser entspricht ja der Spannung U_1 . Bekannte Knoten stehen aber auf der rechten Seite des Gleichungssystems. Es ergibt sich nun

p_1	p_2	p_3	$=$
$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + j\omega C_1$	$-\frac{1}{R_2}$	$-\frac{1}{R_3}$	$\frac{U_1}{R_1}$
$-\frac{1}{R_3}$	$-j\omega C_2$	$\frac{1}{R_3} + j\omega C_2$	0

Dies entspricht wieder dem Gleichungssystem von Beispiel 1. Im nächsten Schritt werden nun die abhängigen Knoten eliminiert (siehe Beispiel 1).

Wichtig:

Das formale Vorgehen von diesem Beispiel ist vor allem dann wichtig, wenn die Spannungsquelle nicht so einfach in eine Stromquelle umgewandelt werden kann, z.B. wenn mehrere Schaltelemente an der Spannungsquelle angeschlossen sind.

Beispiel 2:

Die Übertragungsfunktion U_2/I_1 von folgender Schaltung soll berechnet werden:

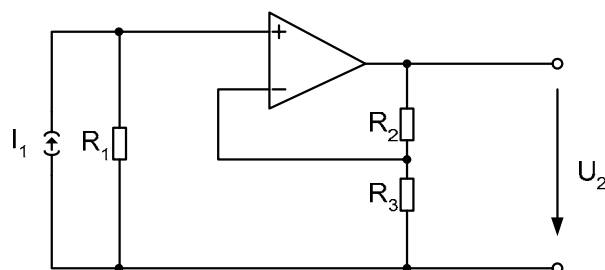


Abbildung 6 Einfache Operationsverstärkerschaltung

Abbildung 7 zeigt das Ersatzschaltbild der Schaltung.

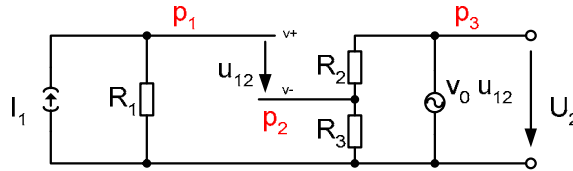


Abbildung 7 Ersatzschaltbild der Operationsverstärkerschaltung

Damit wird die Matrix der Knotenpotentialanalyse aufgestellt. Dabei wird wieder die Potentialgleichung für den Ausgangsknoten des OPs (Knoten p_3) nicht aufgestellt.

	p_1	p_2	p_3	=
Gleichung Knoten $p_1 \rightarrow$	$\frac{1}{R_1}$	0	0	I_1
Gleichung Knoten $p_2 \rightarrow$	0	$\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$	$-\frac{1}{R_2}$	0

Im nächsten Schritt wird eine Spalte eliminiert, da u_{12} null sein muss. Da u_{12} null ist, muss gelten:

$$p_1 = p_2$$

Die Spalte p_1 und p_2 können also zu einer Spalte zusammengefasst werden:

p_1	p_3	=
$\frac{1}{R_1} + 0$	0	I_1
$0 + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$	$-\frac{1}{R_2}$	0

Statt p_1 in der ersten Spalte kann genauso gut p_2 geschrieben werden, da die beiden Potentiale ja gleich sind. Um die Ausgangsspannung U_2 zu berechnen, muss das Potential p_3 berechnet werden. Dies geschieht wieder klassisch durch Bestimmen der Gesamtdeterminante und der Determinante von p_3 .

Für die Gesamtdeterminante ergibt sich:

$$\det \Delta = -\frac{1}{R_1 R_2}$$

Die Determinante von p_3 bestimmt sich zu:

$$\det p_3 = -I_1 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$$

Damit ergibt sich für die Ausgangsspannung U_2 :

$$U_2 = \frac{\det p_3}{\det \Delta} = I_1 \frac{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}{\frac{1}{R_1 R_2}} = I_1 R_1 \left(1 + \frac{R_2}{R_3} \right)$$

Damit ergibt sich für die Übertragungsfunktion U_2/I_1 :

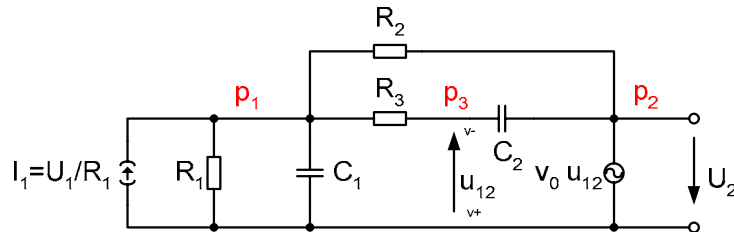
$$\frac{U_2}{I_1} = R_1 \left(1 + \frac{R_2}{R_3} \right)$$

Rechnen mit nichtidealem Operationsverstärker

Bei einem nichtidealen Operationsverstärker ist die Verstärkung v_o endlich. Auch bei der Berechnung mit nichtidealen OPs benutzt man am besten die Knotenpotentialanalyse.

Am Beispiel 1 soll exemplarisch die Berechnung der Übertragungsfunktion mit nichtidealem OP durchgeführt werden.

Wiederum wird zuerst die Knotengleichung aufgestellt. Die Knotengleichung für den Ausgangsknoten wird nicht aufgestellt, da dieser Knoten abhängig ist von anderen Knotenpotentialen im Netzwerk.



$$\begin{array}{l} \text{Gleichung Knoten } p_1 \rightarrow \\ \text{Gleichung Knoten } p_3 \rightarrow \end{array} \begin{array}{ccc|c} p_1 & p_2 & p_3 & \\ \hline \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + j\omega C_1 & -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_3} & \frac{U_1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_3} & -j\omega C_2 & \frac{1}{R_3} + j\omega C_2 & 0 \end{array}$$

Nun muss in die Matrix eingearbeitet werden, dass der Ausgang des OPs den Wert $v_o u_{12}$ annimmt. Aus dem Ersatzschaltbild ist ersichtlich, dass die Spannung u_{12} dem Potential $-p_3$ entspricht. Damit ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen dem Potential p_2 und dem Potential p_3 :

$$p_2 = -v_o \cdot p_3 \text{ bzw. } p_3 = -\frac{p_2}{v_o}$$

Damit nimmt die Matrix folgende Form an:

$$\begin{array}{ccc|c} p_1 & p_2 & p_2 & \\ \hline \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + j\omega C_1 & -\frac{1}{R_2} & +\frac{1}{R_3} \cdot \frac{1}{v_o} & \frac{U_1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_3} & -j\omega C_2 & -\left(\frac{1}{R_3} + j\omega C_2\right) \cdot \frac{1}{v_o} & 0 \end{array}$$

Die beiden Spalten mit dem Potential p_3 können nun zusammengefasst werden:

$$\begin{array}{cc|c} p_1 & p_2 & \\ \hline \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + j\omega C_1 & -\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \cdot \frac{1}{v_o} & \frac{U_1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_3} & -j\omega C_2 - \left(\frac{1}{R_3} + j\omega C_2\right) \cdot \frac{1}{v_o} & 0 \end{array}$$

Weiters Zusammenfassen führt auf die Matrix:



$$\begin{array}{cc|c}
 \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & = \\
 \hline
 \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + j\omega C_1 & -\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \cdot \frac{1}{v_0} & \frac{U_1}{R_1} \\
 -\frac{1}{R_3} & -j\omega C_2 \cdot \left(1 + \frac{1}{v_0}\right) - \frac{1}{R_3 \cdot v_0} & 0
 \end{array}$$

Nun kann das Gleichungssystem gelöst werden:

$$U_2 = \frac{\det \mathbf{p}_2}{\det \Delta}$$

Die Gesamtdeterminante ergibt sich zu:

$$\begin{aligned}
 \det \Delta &= \left(\frac{1}{R_{ges}} + j\omega C_1 \right) \left(-\frac{1}{R_3 v_0} - j\omega C_2 \cdot \left(1 + \frac{1}{v_0} \right) \right) + \frac{1}{R_3} \cdot \left(\frac{1}{R_3 \cdot v_0} - \frac{1}{R_2} \right) \\
 &= -\frac{1}{R_{ges} R_3 v_0} - \frac{1}{R_{ges}} \cdot j\omega C_2 \cdot \left(1 + \frac{1}{v_0} \right) - \frac{j\omega C_1}{R_3 v_0} - (j\omega)^2 C_1 C_2 \cdot \left(1 + \frac{1}{v_0} \right) + \frac{1}{R_3^2} \cdot \frac{1}{v_0} - \frac{1}{R_3 R_2}
 \end{aligned}$$

Die Determinante von $\mathbf{p}_3$ ergibt sich zu:

$$\det \mathbf{p}_3 = U_1 \cdot \frac{1}{R_3 R_1}$$

Damit ergibt sich die Übertragungsfunktion

$$F(j\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{1}{R_3 R_1}}{-\frac{1}{R_{ges} R_3 v_0} - \frac{1}{R_{ges}} \cdot j\omega C_2 \cdot \left(1 + \frac{1}{v_0} \right) - \frac{j\omega C_1}{R_3 v_0} - (j\omega)^2 C_1 C_2 \cdot \left(1 + \frac{1}{v_0} \right) + \frac{1}{R_3^2} \cdot \frac{1}{v_0} - \frac{1}{R_3 R_2}}$$

Zur Kontrolle lässt man nun $v_0 \rightarrow \infty$ gehen. Es ergibt das gleiche Ergebnis wie aus Beispiel 1:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{R_3 R_1 C_1 C_2} \cdot \frac{1}{\omega^2 - j\omega \frac{1}{C_1 R_{ges}} - \frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2}}$$



Berechnung von Netzwerken mit Spannungs- und Stromquellen

Es stehen prinzipiell zwei formale Methoden zur Berechnung von Strömen und Spannungen in linearen Netzwerken zur Verfügung: Die Maschenstrom- und die Knotenpotentialanalyse. Oft findet man Hinweise, die Knotenpotentialanalyse könne nicht mit Spannungsquellen verwendet werden bzw. Maschenstromanalyse nicht mit Stromquellen. Diese Aussage ist so allerdings nicht korrekt.

Schwierigkeiten macht die Knotenpotentialanalyse erst, wenn die Schaltung stromgesteuerte Elemente enthält. Da die Knotenpotentialanalyse allerdings Knotenspannungen berechnet, ist es schwierig diese Abhängigkeit in die Knotenpotentialmatrix einzubauen (obwohl es mit etwas Aufwand funktioniert).

Im Gegensatz zur Knotenpotentialanalyse ist es bei der Maschenstromanalyse schwierig, die Abhängigkeit von spannungsgesteuerten Elementen in die Matrix einzubauen.

Prinzipiell kann man also folgende Aussage treffen:

Enthält das Netzwerk spannungsgesteuerte Elemente, so ist in den meisten Fällen die Knotenpotentialanalyse der einfachste Weg.

Enthält das Netzwerk stromgesteuerte Elemente, so ist in den meisten Fällen die Maschenstromanalyse einfacher.

Es gilt natürlich dabei noch zu beachten, wie viele Maschen bzw. Knoten das Netzwerk hat.