

Damit ergibt sich der Wellenwiderstand des leistungsmäßig optimalen Kabels

$$Z_{L(P)} = \frac{30 \Omega}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (4.6/11)$$

in Abb. 4.6/3 ist die Funktion

$$f_P = 100 P \frac{240 \Omega}{(D E_{max})^2 \sqrt{\epsilon_r}} = 100 \frac{\ln \frac{D}{d}}{2 \left(\frac{D}{d}\right)^2} \quad (4.6/12)$$

über  $D/d$  aufgetragen.

Die in der Praxis üblichen Koaxialkabel haben Wellenwiderstände von 50  $\Omega$  oder 60  $\Omega$ . Wenn der Raum zwischen Innen- und Außenleiter vollständig mit Teflon ( $\epsilon_r = 2,1$ ) oder Polystyrol ( $\epsilon_r = 2,5$ ) ausgefüllt ist, beträgt  $Z_L \sqrt{\epsilon_r}$  bei einem 50  $\Omega$ -Kabel 72,5  $\Omega$  bzw. 79  $\Omega$ , d. h., ein solches Kabel ist hinsichtlich seiner Dämpfung nahezu optimal. Bei einem 60  $\Omega$ -Kabel ergeben sich für  $Z_L \sqrt{\epsilon_r}$  Werte in der Nähe von 70  $\Omega$ , wenn  $\epsilon_{r,eff} \approx 1,2$  ist, ein Wert, der für Scheiben- oder Wendelkabel mit erheblichem Luftanteil realisierbar ist.

### 4.7 Koaxiale Reusenleitung

Die koaxiale Reusenleitung stellt eine dem gewöhnlichen Koaxialkabel verwandte Leitungsform dar. Man kann sich die Reusenleitung dadurch aus einem Koaxial-

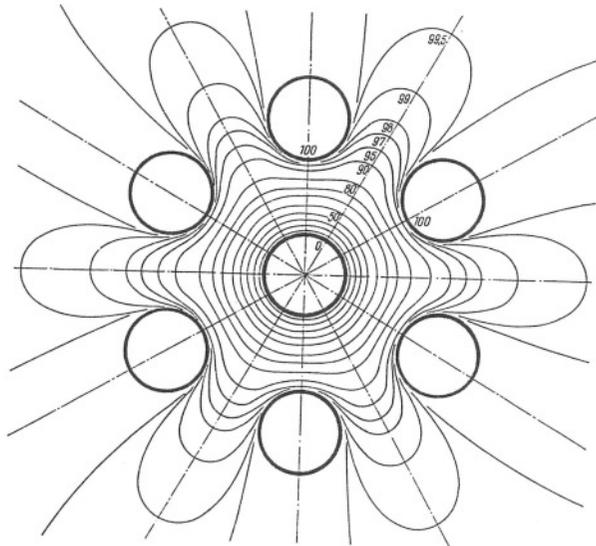


Abb. 4.7/1. Potentialverteilung in einer koaxialen Reusenleitung mit 6 Reusenleitern. Die Potentiallinien oberhalb 99,5% sind nicht exakt gezeichnet

kabel entstanden denken, daß man einen seiner zylindrischen Leiter — im allgemeinen den Außenleiter — durch eine aus einzelnen Drähten aufgebaute Reuse ersetzt. Solche Reusenleitungen werden manchmal statt koaxialer Leitungskabel zwischen Sender und Antenne angewandt. Hier ist der Vorteil der einfacheren Konstruktion ausschlaggebend. Ein Nachteil besteht darin, daß das Feld durch

die Reuse hindurchtritt. Die Abschirmung ist also nicht so vollkommen wie beim Koaxialkabel. Durch eine hohe Anzahl von Reusendrähten läßt sich jedoch dieser Effekt vermindern. Abb. 4.7/1 zeigt die in einem elektrolytischen Trog gemessene Potentialverteilung einer Reusenleitung mit 6 Reusenleitern. Dem inneren Leiter sei das Potential 0 zugeordnet. Die Stufung der Potentiallinien beträgt zwischen 0 und 90% des Reusenpotentials jeweils 10%, darüber ist sie feiner.

Die mathematische Behandlung der Reusenleitung ist bei Einführung geeigneter Näherungen möglich, der Aufwand jedoch recht groß [3].

### 4.8 Die Doppelleitung

#### 4.8.1 Das elektrostatische Feld der symmetrischen Doppelleitung

Das elektrostatische Feld der Doppeldrahtleitung läßt sich auf das zweier unendlich langer paralleler Linienladungen zurückführen, die die Ladungsbeläge  $+Q'$  und  $-Q'$  tragen. In einem Aufpunkt  $P$ , der von diesen Linienladungen die Abstände  $\rho_+$  und  $\rho_-$  hat (Abb. 4.8/1), beträgt das Potential

$$\Phi = \frac{Q'}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \ln \frac{\rho_-}{\rho_+} = \frac{Q'}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \eta \quad (4.8/1)$$

Eine einfache Herleitung dieser Beziehung findet man z. B. in [14]. Die Kurven gleichen Potentials (Potential- oder Niveaulinien) werden demnach durch  $\eta = \ln \frac{\rho_-}{\rho_+} = \text{const}$  beschrieben, d. h., die Punkte  $P$  einer solchen Kurve haben bezüglich der beiden festen Punkte  $A$  und  $B$  ein konstantes Abstandsverhältnis. Nach einem Lehrsatz aus der Geometrie sind die Kurven mit dieser Eigenschaft Apolloniuskreise. In [14] ist mit einfachen Mitteln gezeigt, daß auch die Feldlinien Kreise sind, und zwar solche mit dem konstanten Peripheriewinkel  $\xi$  (Peripheriewinkelkreise). Feld- und Potentiallinien schneiden sich rechtwinklig, wie es bei jedem Potentialfeld sein muß. Die beiden orthogonalen Kreisscharen bilden das bipolare Koordinatensystem.

Denkt man sich 2 Potentiallinien mit den Parametern  $\eta_1 > 0$  und  $\eta_2 = -\eta_1$  metallisiert, so kann man sie als die Konturen einer symmetrischen Doppeldrahtleitung auffassen. Das elektrostatische Feldbild (vgl. Abschn. 4.3.1) gewinnt man durch äquidistante Stufung von  $\eta$  im Bereich  $\eta_1 \geq \eta \geq \eta_2$ . Außerdem müssen je zwei benachbarte Feldlinien den gleichen Verschiebungsfluß einschließen. Da man in engster Umgebung der einen Linienladung das Feld der anderen vernachlässigen kann, herrscht dort praktisch das radialsymmetrische Feld einer einzigen Linienladung. Dort ist also der Fluß zwischen je 2 Nachbarfeldlinien gleich, wenn sie den gleichen Winkel einschließen.

Diese Überlegung läßt sich zu einer einfachen geometrischen Konstruktion der Feldlinien benutzen:

$A$  und  $B$  in Abb. 4.8/2 seien die Spurpunkte der beiden Linienladungen. Um den Mittelpunkt  $M$  ihrer Verbindungslinie  $g$  schlagen wir einen Kreis  $I$  mit dem Radius  $MA = MB$ . Dieser Kreis und die Gerade  $g$  teilen den zwischen  $A$  und  $B$  herrschenden Fluß in vier gleiche Anteile. Nochmalige Halbierung dieser Anteile erhält man durch zwei zusätzliche Kreise  $II$  und  $III$ , die die Gerade  $g$  in  $A$  und  $B$  unter  $45^\circ$  schneiden. Ihre Mittelpunkte sind die Schnittpunkte  $E$  und  $E'$  des Kreises  $I$  mit der

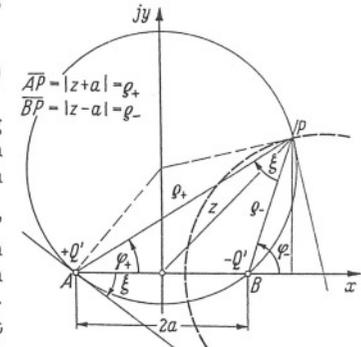


Abb. 4.8/1. Zur Berechnung des Potentials zweier Linienladungen

Mittelsenkrechten von  $\overline{AB}$ . Das Verfahren läßt sich beliebig fortsetzen: Die Kreise durch  $A$  und  $B$  mit den Mittelpunkten  $F, F', G$  und  $G'$  halbieren den Fluß abermals usw.

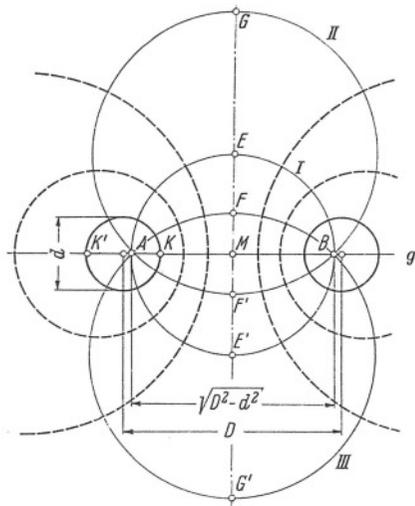


Abb. 4.8/2. Geometrie der symmetrischen Doppelleitung und Entwurf der Feldlinien. Die Gerade  $g$  verbindet die Punkte  $A$  und  $B$

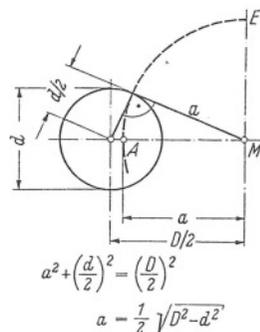


Abb. 4.8/2a. Zusammenhang zwischen Linienabstand  $2a$  und Leiterabmessungen

Da die Potentiallinien Kreise sind, die der Bedingung  $q_-/q_+ = \text{const}$  genügen müssen, lassen sie sich ebenfalls leicht zeichnen: Obige Bedingung bedeutet für die

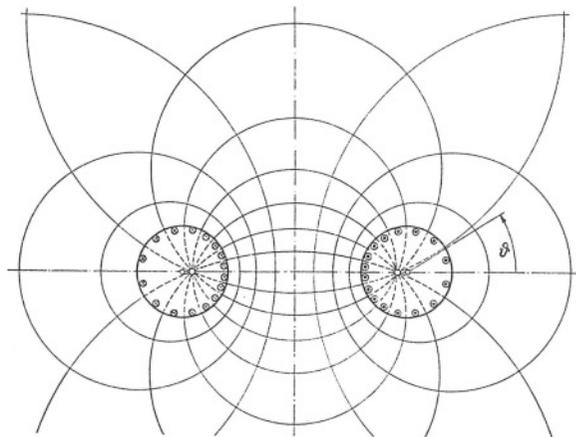


Abb. 4.8/3. Feldbild der symmetrischen Doppelleitung bei Hochfrequenz

Schnittpunkte  $K$  und  $K'$  einer Potentiallinie mit der Geraden  $g$

$$\frac{BK}{AK} = \frac{BK'}{AK'} \quad (4.8/2)$$

Man kann zeigen, daß diese Beziehung gleichbedeutend ist mit

$$\overline{MK} \cdot \overline{MK'} = \overline{MA}^2 \quad (4.8/3)$$

Ist beispielsweise außer dem Abstand  $\overline{AB} = 2\overline{MA}$  der Linienladungen noch der Punkt  $K$  vorgegeben, so kann man mit Gl. (4.8/3) Mittelpunkt und Radius des Kreises finden, der die durch  $K$  gehende Potentiallinie darstellt.

In dem praktisch interessanten Fall der Doppelleitung sind meistens die Querschnittsabmessungen gegeben, z. B. der Leiterdurchmesser  $d$  und der Achsabstand  $D$ . Die dadurch festgelegten Leiterkonturen stellen 2 Potentiallinien dar. Damit kann man den Ort der zugehörigen Linienladungen bestimmen. Er ist bekannt, wenn man eine Feldlinie kennt, z. B. den Kreis  $I$  in Abb. 4.8/2. Sein Mittelpunkt  $M$  ist wegen der Symmetrie der Leitung leicht zu finden, sein Radius ergibt sich aus der Orthogonalitätsbedingung, der Feld- und Potentiallinien genügen müssen. Aus Abb. 4.8/2a ersieht man den Zusammenhang zwischen dem Leitungsdurchmesser  $d$ , Achsabstand  $D$  und dem Abstand  $2a$  der Linienladungen:

$$2a = \sqrt{D^2 - d^2}$$

Das vollständige Feldbild einer symmetrischen Doppelleitung zeigt Abb. 4.8/3.

### 4.8.2 Wellenwiderstand der symmetrischen Doppelleitung

Der Wellenwiderstand  $Z_L$  einer Leitung läßt sich nach Gl. (4.3/5) aus ihrem Kapazitätsbelag

$$C' = \frac{Q'}{U} \quad (4.8/4)$$

bestimmen ( $Q'$  = Ladungsbelag,  $U$  = Spannung). Bei der symmetrischen Doppeldrahtleitung ist mit Gl. (4.8/1)

$$U = \Phi_1 - \Phi_2 = \frac{Q'}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r} (\eta_1 - \eta_2) = \frac{Q'}{\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \eta_1 \quad (4.8/5)$$

Bei der Berechnung von  $\eta_1 = \ln \frac{q_-}{q_+}$  beziehen wir uns auf den Punkt  $K$  in Abb. 4.8/2. Dann ist:

$$q_-^{(K)} = \frac{1}{2} \sqrt{D^2 - d^2} + \frac{D}{2} - \frac{d}{2}$$

$$q_+^{(K)} = \frac{d}{2} - \left( \frac{D}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{D^2 - d^2} \right)$$

und damit

$$\eta_1 = \ln \frac{q_-^{(K)}}{q_+^{(K)}} = \ln \frac{\sqrt{D^2 - d^2} + D - d}{\sqrt{D^2 - d^2} - (D - d)}$$

Durch Erweitern des Bruches mit  $1 + \sqrt{(D + d)/(D - d)}$  erhält man daraus

$$\eta_1 = \ln \left[ \frac{D}{d} + \sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)^2 - 1} \right] \quad (4.8/6)$$

Setzt man diese Beziehung unter Beachtung von Gl. (4.8/5) in Gl. (4.8/4) ein, so erhält man für den Kapazitätsbelag  $C'$  der symmetrischen Doppeldrahtleitung

$$C' = \frac{\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\ln \left[ \frac{D}{d} + \sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)^2 - 1} \right]} \quad (4.8/7)$$

Nach Gl. (4.3/5) folgt daraus für den Wellenwiderstand  $Z_L$ :

$$Z_L = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{1}{\pi \sqrt{\epsilon_r}} \ln \left[ \frac{D}{d} + \sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)^2 - 1} \right]$$

Mit Gl. (4.2/5) erhält man schließlich für den Wellenwiderstand der symmetrischen Doppeldrahtleitung die Beziehung:

$$Z_L = \frac{120 \Omega}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \left[ \frac{D}{d} + \sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)^2 - 1} \right] \quad (4.8/8)$$

Bei großem relativem Abstand  $D/d$  kann man für  $Z_L$  eine einfache Näherung angeben:

$$Z_L \approx \frac{120 \Omega}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \frac{2D}{d} \quad (4.8/9)$$

Dabei ergibt sich ein zu großer Wert. Der Fehler ist jedoch  $\leq 1\%$ , wenn  $D/d \geq 3,6$  bzw.  $Z_L \geq 235 \Omega/\sqrt{\epsilon_r}$  ist.

In Abb. 4.9/1 ist  $Z_L/\sqrt{\epsilon_r}$  in Abhängigkeit von  $D/d$  graphisch dargestellt.

#### 4.8.3 Widerstands- und Dämpfungsbelag der symmetrischen Doppeldrahtleitung

Mit dem elektrostatischen Potential kann man die elektrische Feldstärke und damit die Ladungsdichte  $q_F$  auf der Leiteroberfläche bestimmen:  $q_F = \epsilon_0 \epsilon_r E_{\text{Oberfläche}}$

Im Fall großer Stromverdrängung fallen die magnetischen Feldlinien mit den Potentiallinien des elektrostatischen Feldes zusammen (vgl. 4.3.1). Aus der Ladungsdichte  $q_F$  kann man dann auf die Stromdichte  $J$  schließen. Bei der Doppelleitung ist [4, 5]

$$q_F = \frac{Q'}{\pi d} \frac{\sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)^2 - 1}}{\frac{D}{d} + \cos \theta} \quad (4.8/10)$$

und dementsprechend

$$J = \frac{I}{\pi d \delta} \frac{\sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)^2 - 1}}{\frac{D}{d} + \cos \theta} \quad (4.8/11)$$

Unabhängig von dieser Beziehung kann man auch aus dem Feldbild Abb. 4.8/3 ersehen, wie die Stromdichte über der Leiteroberfläche verteilt ist. Jeder Sektor führt den gleichen Teilstrom. Vergleicht man die einzelnen Sektoren, so sieht man, daß auf die zugehörigen Ströme verschieden große Anteile der Leiteroberfläche entfallen. Der Strom drängt sich also nach der Innenseite der Doppelleitung zusammen, die Stromdichte ist dort größer als außen. Das Verhältnis der mittleren Stromdichte in den einzelnen Sektoren kann man unmittelbar aus Abb. 4.8/3 ablesen.

Bei einem einzelnen, zylindrischen Leiter bewirkt der Skineneffekt bei hohen Frequenzen eine Abhängigkeit der Stromdichte vom Radius und damit eine Widerstandserhöhung (s. Abschn. 1.1). Bei der Doppelleitung kommt durch die Nähe des zweiten Leiters ein weiterer Effekt hinzu, der eine zusätzliche Abhängigkeit der Stromdichte vom Winkel  $\theta$  (Abb. 4.8/3) und damit eine zusätzliche Widerstandserhöhung bewirkt. Man nennt ihn „Näheeffekt“ oder „Proximityeffekt“.

Aus der Stromverteilung kann man den Widerstandsbelag  $R'$  berechnen [4, 5]:

$$R' = 2 \frac{R_{\square}}{\pi d} \frac{D}{\sqrt{D^2 - d^2}} \quad (4.8/12)$$

Dabei ist  $R_{\square}$  der Flächenwiderstand bei großer Stromverdrängung, aber ohne Berücksichtigung des Näheeffektes:

$$R_{\square} = \frac{\rho}{\delta} = \sqrt{\pi \mu \rho f}.$$

$\frac{R_{\square}}{\pi d}$  ist der Widerstandsbelag eines einzelnen zylindrischen Leiters vom Durchmesser  $d$  bei hohen Frequenzen (Stromverdrängung). Der Faktor  $D/\sqrt{D^2 - d^2}$  berücksichtigt den Näheeffekt, den der im Achsabstand  $D$  befindliche Rückleiter gleichen Querschnitts bewirkt.

Für den Belag der Widerstandsdämpfung erhält man damit:

$$\alpha_R = \frac{R_{\square} \sqrt{\epsilon_r}}{Z_0 D} \frac{\left(\frac{D}{d}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)^2 - 1} \cdot \ln \left[ \frac{D}{d} + \sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)^2 - 1} \right]} \quad (4.8/13)$$

#### 4.8.4 Die Doppelbandleitung

Eine nach Abb. 4.8/4 aus zwei parallelen Bändern aufgebaute Doppelleitung läßt sich mit analytischen Methoden nur näherungsweise behandeln. Sehr einfach und übersichtlich werden die Verhältnisse, wenn  $b \gg a$  ist; dann kann man das inhomogene Randfeld ohne großen Fehler vernachlässigen und erhält für den Kapazitätsbelag

$$C' \approx \epsilon_0 \epsilon_r \frac{b}{a} \quad (4.8/14)$$

Auf Grund des Zusammenhangs  $v = \frac{1}{\sqrt{L' C'}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \mu_r \epsilon_r}}$  (vgl. Abschn. 4.3.2) beträgt dann der Induktivitätsbelag

$$L' = \mu_0 \mu_r \frac{a}{b} \quad (4.8/15)$$

Im allgemeinen ist  $\mu_r = 1$ . Dann ergibt sich daraus mit Gl. (4.2/5) der Wellenwiderstand

$$Z_L = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \frac{Z_0}{\sqrt{\epsilon_r}} \frac{a}{b} \quad (4.8/16)$$

Bei hohen Frequenzen (großer Stromverdrängung) hat die Bandleitung den Widerstandsbelag

$$R' = \frac{2R_{\square}}{b} \quad (4.8/17)$$

Der Belag der Widerstandsdämpfung beträgt dann

$$\alpha_R = \frac{R_{\square}}{Z_0} \sqrt{\epsilon_r} \frac{1}{a} \quad (4.8/18)$$

In [6] sind Verfahren angegeben, mit denen man  $C'$  unter Berücksichtigung des Randfeldes bestimmen kann. Genauere Formeln für  $Z_L$  mit Berücksichtigung der Streifenleitungstechnik sind in Abschn. 4.12 angegeben.

#### 4.8.5 Feldstärke in größerer Entfernung von der Doppelleitung

Jetzt betrachten wir die Frage, wie bei verschiedenen Leiteranordnungen das Feld nach außen abnimmt. Für einen einfachen stromdurchflossenen Draht ist nach dem Durchflutungsgesetz

$$H 2\pi r = I; \quad H = \frac{I}{2\pi r} \quad \text{und} \quad E = \frac{Z_f I}{2\pi r} \quad (4.8/19)$$

$E$  und  $H$  nehmen also mit  $1/r$  ab. Diese Gesetze gelten auch im Dielektrikum des koaxialen Kabels.

Ist bei der Doppelleitung  $D$  der Abstand der Leiterachsen und  $D^* = \sqrt{D^2 - d^2}$  der Abstand der zugehörigen Linienladungen, so gilt:

$$H = \frac{I}{2\pi} \left( \frac{1}{r - \frac{D^*}{2}} - \frac{1}{r + \frac{D^*}{2}} \right) = \frac{I}{2\pi} \frac{D^*}{r^2 - \left(\frac{D^*}{2}\right)^2} \quad (4.8/20)$$

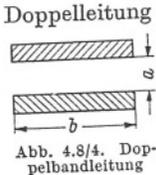


Abb. 4.8/4. Doppelbandleitung

In großer Entfernung  $r \gg \frac{D^*}{2}$  erfolgt hier die Abnahme des Außenfeldes mit  $1/r^2$ , also wesentlich schneller als beim einfachen stromdurchflossenen Draht. Das gleiche gilt auch für die Außenfelder von Drehstromleitungen, bei denen jeweils 2 Leiter als Rückleiter des Stromes im 3. Leiter angesehen werden können. Bei der Phantomleitung des aus 2 Doppelleitungen gebildeten Vierers (Abb. 4.8/5), bei dem also z. B. die waagerechte Doppelleitung die Hinleitung und die senkrechte Doppelleitung die Rückleitung des Stromes übernimmt, folgt  $H$  dem Gesetz (und entsprechend dann auch  $E = H Z_F$ ):

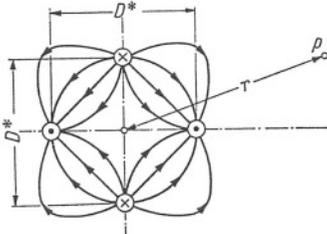


Abb. 4.8/5  
Sternvierer im Phantom-Betrieb

$$H = \frac{I}{2\pi} \frac{r \frac{D^{*2}}{2}}{r^4 - \left(\frac{D^*}{2}\right)^4} \approx \frac{\text{const}}{r^3} \quad \text{für } r \gg \frac{D^*}{2}$$

(gültig in den Ebenen - - - -) (4.8/21)

Hier nimmt also das Feld sogar mit  $1/r^3$  ab.

### 4.9 Offene Doppelleitungen mit optimalen Eigenschaften

Die in Abschn. 4.6 für das Koaxialkabel angestellten Optimalbetrachtungen hinsichtlich Dämpfung, Spannungsfestigkeit und Leistung kann man auch für die symmetrische Doppelleitung durchführen [7]. Dabei kann man prinzipiell so vorgehen wie in Abschn. 4.6, so daß die dort angeführten, grundsätzlichen Überlegungen auch hier gelten.

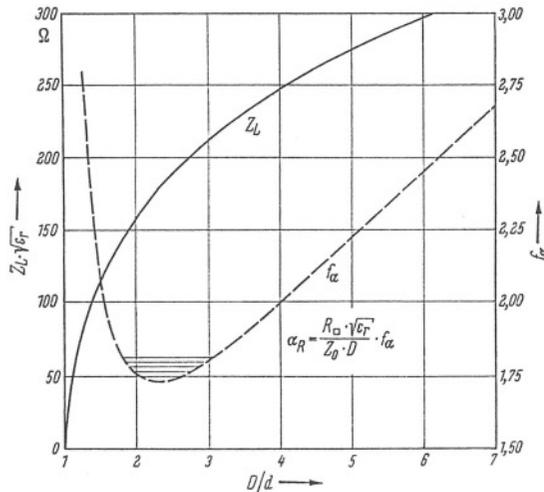


Abb. 4.9/1. Wellenwiderstand und Dämpfung  $\alpha_R$  einer symmetrischen Doppelleitung in Abhängigkeit vom relativen Achsabstand  $D/d$ . In dem eingezeichneten Toleranzfeld bedeutet eine Linie jeweils 1% Abweichung vom Optimum

dem Leiterdurchmesser  $d$  der Betrag der Widerstandsdämpfung

$$\alpha_R = \frac{R_{\square} \sqrt{\epsilon_r}}{Z_0 D} \frac{\left(\frac{D}{d}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)^2 - 1} \cdot \ln \left[ \frac{D}{d} + \sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)^2 - 1} \right]} \quad (4.8/13)$$

#### 4.9.1 Die Doppelleitung kleinster Dämpfung

In Abschn. 4.5 wurde gezeigt, daß  $\alpha_G$ , der Betrag der dielektrischen Dämpfung, von der Art der Leitung sowie von den Leiterabmessungen unabhängig ist [vgl. Gl. (4.5/10)]. Dagegen ist bei der Doppelleitung der Betrag der Widerstandsdämpfung in ähnlicher Weise von den Leiterabmessungen abhängig wie beim Koaxialkabel. Nach Gl. (4.8/13) ist bei einer Doppelleitung mit dem Achsabstand  $D$  und

Betrachtet man  $D$  als fest vorgegeben, so hängt  $\alpha_R$  nur von  $D/d$  ab und besitzt für einen bestimmten Wert  $(D/d)_{(\alpha)}$  ein Minimum. Die Bedingung hierfür erhält man durch Differenzieren nach  $D/d$  und anschließendes Nullsetzen der Ableitung. Sie lautet:

$$\ln \left[ \left(\frac{D}{d}\right)_{(\alpha)} + \sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)_{(\alpha)}^2 - 1} \right] = \frac{\left(\frac{D}{d}\right)_{(\alpha)} \sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)_{(\alpha)}^2 - 1}}{\left(\frac{D}{d}\right)_{(\alpha)}^2 - 2}$$

Auf numerischem Wege gewinnt man hieraus die Dimensionierungsvorschrift für die Doppelleitung kleinster Dämpfung:

$$\frac{D}{d_{(\alpha)}} = 2,276 \quad Z_L = 175,6 \Omega \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

In Abb. 4.9/1 ist die Funktion

$$f_{\alpha} = \alpha_R \frac{Z_0 D}{R_{\square} \sqrt{\epsilon_r}} = \frac{\left(\frac{D}{d}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)^2 - 1} \cdot \ln \left[ \frac{D}{d} + \sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)^2 + 1} \right]} \quad (4.9/1)$$

zusammen mit dem Wellenwiderstand  $Z_L$  der Doppelleitung in Abhängigkeit von  $D/d$  dargestellt. Läßt man eine Erhöhung der Dämpfung um 5% zu, so ergibt sich ein zulässiger Bereich von  $D/d = 1,8 \dots 3,1$  entsprechend  $Z_L \sqrt{\epsilon_r} = 140 \dots 215 \Omega$ .

#### 4.9.2 Die Doppelleitung größter Spannungsfestigkeit

Wir wollen nun untersuchen, wie bei vorgegebener Betriebsspannung  $U$  und festem Achsabstand  $D$  der Leiterdurchmesser  $d$  einer Doppelleitung gewählt werden muß, damit die elektrische Feldstärke an der höchstbeanspruchten Stelle des Dielektrikums möglichst klein wird. Diese kritische Stelle liegt — wie man aus Abb. 4.8/3 entnehmen kann — auf der dem Nachbarleiter zugewandten Seite der Leiteroberfläche ( $\vartheta = \pi$ ). Aus Gl. (4.8/10) läßt sich die Feldstärke  $E_{\vartheta}$  an der Leiteroberfläche berechnen. Da die Flächenladung  $q_F$  gleich der elektrischen Normalverschiebung  $\epsilon_0 \epsilon_r E_{\vartheta}$  sein muß, ist die elektrische Normalfeldstärke unter Beachtung von Gl. (4.8/10)

$$E_{\vartheta} = \frac{q_F}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{Q'}{\pi \epsilon_0 \epsilon_r D} \frac{D}{d} \frac{\sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)^2 - 1}}{\frac{D}{d} + \cos \vartheta} \quad (4.9/2)$$

Mit der Beziehung  $Q' = C' U$  kann man den Ladungsbelag  $Q'$  durch den Kapazitätsbelag  $C'$  und die an der Leitung liegende Spannung  $U$  ausdrücken. Mit

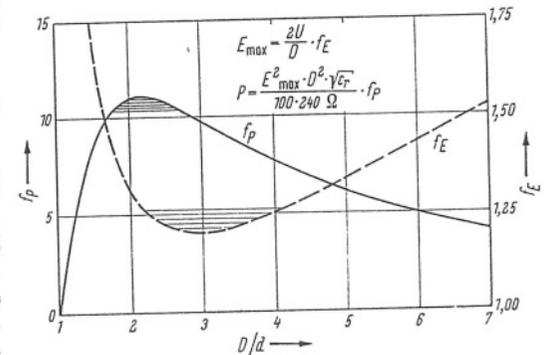


Abb. 4.9/2  
Maximale Feldstärke und übertragbare Leistung bei der symmetrischen Doppelleitung. In dem eingezeichneten Toleranzfeld bedeutet eine Linie jeweils 1% Abweichung vom Optimum

Gl. (4.8/7) erhält man dann

$$E_{\vartheta} = \frac{U}{D} \frac{\frac{D}{d} \sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)^2 - 1}}{\left(\frac{D}{d} + \cos \vartheta\right) \ln \left[ \frac{D}{d} + \sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)^2 - 1} \right]} \quad (4.9/3)$$

Man findet hier bestätigt, daß für  $\cos \vartheta = -1$ , d. h.  $\vartheta = \pi$ , die Feldstärke  $E_{\vartheta}$  ihren größten Wert  $E_{\vartheta \max}$  annimmt. Durch Differenzieren von  $E_{\vartheta \max}$  nach  $D/d$  und Nullsetzen der Ableitung erhält man für die Abmessungen der Doppelleitung größter Spannungsfestigkeit die Bedingung:

$$\ln \left[ \left(\frac{D}{d}\right)_{(E)} + \sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)_{(E)}^2 - 1} \right] = \frac{\left(\frac{D}{d}\right)_{(E)} \sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)_{(E)}^2 - 1}}{\left(\frac{D}{d}\right)_{(E)}^2 - \left(\frac{D}{d}\right)_{(E)} - 1}$$

Daraus ergeben sich als optimale Werte

$$\left(\frac{D}{d}\right)_{(E)} = 2,932, \quad Z_{L(E)} = 208,6 \Omega \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

Die Funktion

$$f_E = \frac{D}{2U} E_{\vartheta \max} = \frac{\frac{D}{d} \sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)^2 - 1}}{2 \left(\frac{D}{d} - 1\right) \ln \left[ \frac{D}{d} + \sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)^2 - 1} \right]} \quad (4.9/4)$$

ist in Abb. 4.9/2 dargestellt.

Der Optimalwert  $(D/d)_E$  ist wegen des breiten Minimums nicht kritisch, im Bereich  $D/d = 2,18 \dots 4,15$  entsprechend  $Z_L \sqrt{\epsilon_r} = 170 \dots 252 \Omega$  liegt  $E_{\vartheta}$  um höchstens 5% über dem Minimum.

### 4.9.3 Die Doppelleitung bester Leistungsübertragung

Eine Leitung kann unter den in Abschn. 4.6.4 angegebenen Bedingungen die Leistung  $P = U^2/2Z_L$  übertragen. Die Spitzenspannung  $U$  kann man nach Gl. (4.9/3) durch den Spitzenwert der Maximalfeldstärke  $E_{\vartheta \max} = E_{\vartheta}|_{\vartheta=\pi}$  und die Leitungsabmessungen  $D$  und  $d$  ausdrücken, für  $Z_L$  kann man den in Gl. (4.8/8) angegebenen Ausdruck einsetzen. Dann erhält man

$$P = \frac{(E_{\vartheta \max} D)^2 \sqrt{\epsilon_r}}{240 \Omega} \frac{\left(\frac{D}{d} - 1\right) \ln \left[ \frac{D}{d} + \sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)^2 - 1} \right]}{\left(\frac{D}{d}\right)^2 \left(\frac{D}{d} + 1\right)} \quad (4.9/5)$$

Betrachtet man  $D/d$  als einzige Variable, so findet man mit der Extremwertrechnung folgende Bedingung für das Maximum der übertragbaren Leistung:

$$\ln \left[ \left(\frac{D}{d}\right)_{(P)} + \sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)_{(P)}^2 - 1} \right] = \frac{\left(\frac{D}{d}\right)_{(P)} \sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)_{(P)}^2 - 1}}{2 \left[ \left(\frac{D}{d}\right)_{(P)}^2 - \left(\frac{D}{d}\right)_{(P)} - 1 \right]}$$

Eine numerische Rechnung liefert als optimale Werte

$$\left(\frac{D}{d}\right)_{(P)} = 2,146 \quad Z_{L(P)} = 167,7 \Omega \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

In Abb. 4.9/2 ist die Funktion

$$f_P = 100 P \frac{240 \Omega}{(E_{\vartheta \max} D)^2 \sqrt{\epsilon_r}} = 100 \frac{\left(\frac{D}{d} - 1\right) \ln \left[ \frac{D}{d} + \sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)^2 - 1} \right]}{\left(\frac{D}{d}\right)^2 \left(\frac{D}{d} + 1\right)} \quad (4.9/6)$$

in Abhängigkeit von  $D/d$  dargestellt. Man erkennt, daß  $D/d = 1,8 \dots 2,6$  entsprechend  $Z_L \sqrt{\epsilon_r} = 142 \dots 195 \Omega$  sein darf, wenn man zuläßt, daß das Leistungsoptimum um maximal 5% unterschritten wird.

Ein guter Kompromiß für die Erfüllung der 3 Forderungen von kleiner Dämpfung, guter Spannungsfestigkeit und hoher übertragbarer Leistung ist ein relativer Achsabstand  $D/d \approx 2,42$  bzw. ein Wellenwiderstand  $Z_L \approx 185 \Omega / \sqrt{\epsilon_r}$ . Dabei beträgt die Abweichung vom Optimalwert bei der Dämpfung weniger als 1%, bei der Spannungsfestigkeit und übertragbaren Leistung jeweils etwa 2%.

## 4.10 Geschirmte symmetrische Doppelleitungen mit optimalen Eigenschaften

### 4.10.1 Die elektrostatische Nachbildung der geschirmten Doppelleitung

Für die geschirmte Doppelleitung kann man kein Ersatzbild von wenigen Linienladungen angeben, das exakt ihr elektrostatisches Feld beschreibt. Man ist daher auf Näherungslösungen angewiesen. Von den bekannten Nachbildungen ist die

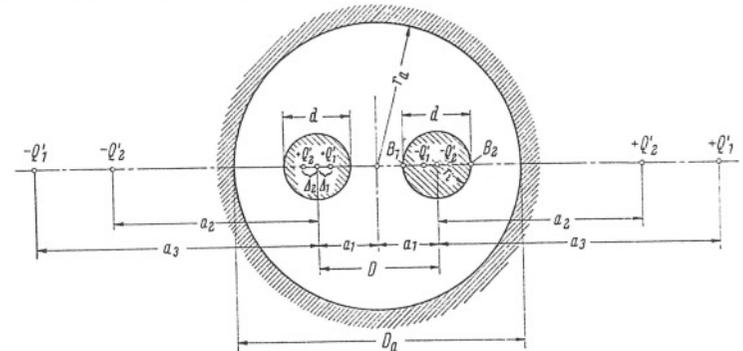


Abb. 4.10/1. Nachbildung des elektrostatischen Feldes einer geschirmten, symmetrischen Doppelleitung durch 8 Linienladungen

durch 8 Linienladungen, wie sie KIRSCHSTEIN [4] zuerst vorgeschlagen hat, die genaueste (s. Abb. 4.10/1). Hierbei liegt das erste Ladungspaar  $(+Q'_1, -Q'_1)$  an den gleichen Stellen wie bei der offenen Doppelleitung. Durch Spiegelung am Kabelmantel erhält man das zweite Ladungspaar  $(+Q'_1$  und  $-Q'_1)$  mit dem gegenseitigen Abstand  $2a_1 + 2a_2$ . Das dritte Paar  $(+Q'_2, -Q'_2)$  liegt so, daß in bezug auf sein Feld der Kabelmantel und die Oberfläche eines Leiters Niveaulinien sind. Das vierte Ladungspaar  $(-Q'_2, +Q'_2)$  erfüllt dieselbe Bedingung bezüglich des anderen Leiters. Diese Linienladungen haben von den Leiterachsen die folgenden, in Abb. 4.10/1 eingezeichneten Abstände:

$$\Delta_1 = a_1 - \sqrt{a_1^2 - r_i^2} \quad \Delta_2 = \frac{r_o^2 - a_1^2 - r_i^2}{2a_1} - \sqrt{\left(\frac{r_o^2 - a_1^2 - r_i^2}{2a_1}\right)^2 - r_i^2}$$

$$a_2 = \frac{r_i^2}{\Delta_2} \quad a_3 = \frac{r_o^2}{a_1 - \Delta_1} - a_1$$

Die Ladungsbeläge  $Q'_1$  und  $Q'_2$  der Linienquellen werden so groß gewählt, daß die Punkte  $B_1$  und  $B_2$  (s. Abb. 4.10/1) gleiches Potential erhalten. Dies führt zu der Bedingung

$$A = \frac{Q'_1}{Q'_2} = \frac{\ln \frac{(2a_1 + a_2 - r_i)(2a_1 + \Delta_2 + r_i)}{(2a_1 + a_2 + r_i)(2a_1 + \Delta_2 - r_i)}}{\ln \frac{(2a_1 + a_2 + r_i)(a_3 + r_i)}{(2a_1 + a_2 - r_i)(a_3 - r_i)}} \quad (4.10/1)$$

Aus diesen Angaben kann man Kapazitätsbelag und Wellenwiderstand der geschirmten Doppelleitung berechnen. Letzterer beträgt bei symmetrischem Betrieb (Gegentaktbetrieb) der Leitung

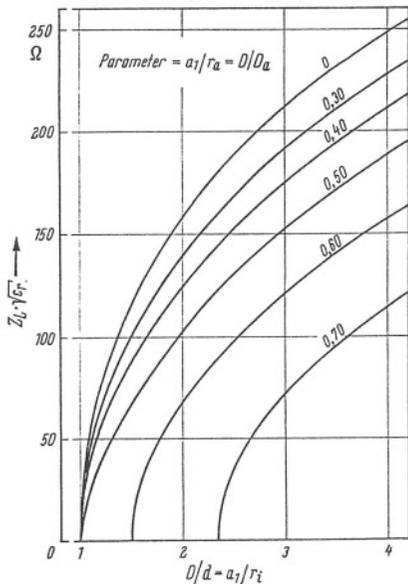


Abb. 4.10/2. Wellenwiderstand der geschirmten Doppelleitung als Funktion von  $a_1/r_i = D/d$  mit  $a_1/r_a = D/D_a$  als Parameter

$$Z_L = \frac{120 \Omega}{\sqrt{\epsilon_r}} \frac{A}{A+1} \left[ \ln \frac{(a_2 + r_i)(2a_1 - \Delta_1 - r_i)}{(r_i - \Delta_1)(2a_1 + a_2 - r_i)} + \frac{1}{A} \ln \frac{(a_2 + r_i)(2a_1 + \Delta_2 - r_i)}{(r_i + \Delta_2)(2a_1 + a_2 - r_i)} \right] \quad (4.10/2)$$

Abb. 4.10/2 zeigt für verschiedene Werte von  $a_1/r_a = D/D_a$  den Verlauf von  $Z_L$  in Abhängigkeit von  $a_1/r_i = D/d$ . Weitere Möglichkeiten, das elektrostatische Feld und die Kapazität der geschirmten Doppelleitung zu berechnen, hat z. B. F. SOMMER zusammengestellt [8].

### 4.10.2 Geschirmte Doppelleitung kleinster Dämpfung

Bei der geschirmten Doppelleitung wird der Widerstandsbelag  $R'_0 = \frac{R_{\square}}{\pi r_i}$  des einzelnen Leiters (vgl. Abschn. 4.5) durch die Annäherungsverluste und die Wirbelstromverluste im Kabelmantel vergrößert. Durch den Proximityeffekt nimmt der

Belag des Verlustwiderstandes nach [4] um

$$\Delta R'_1 = \frac{R_{\square}}{\pi r_a} \cdot 2 \frac{r_a}{r_i} \left( \frac{A}{A+1} \right)^2 \left[ \frac{\Delta_1^2}{r_i^2 - \Delta_1^2} - \frac{2\Delta_1\Delta_2}{A(r_i^2 + \Delta_1\Delta_2)} + \frac{\Delta_2^2}{A^2(r_i^2 - \Delta_2^2)} \right] \quad (4.10/3)$$

zu. Die Wirbelstromverluste im Kabelmantel erhöhen nach [4] den Widerstandsbelag um

$$\Delta R'_2 = \frac{R_{\square}}{\pi r_a} \cdot 4 \frac{\left(\frac{a_1}{r_a}\right)^2}{1 - \left(\frac{a_1}{r_a}\right)^2} \sqrt{\frac{\kappa_L}{\kappa_M}} \quad (4.10/4)$$

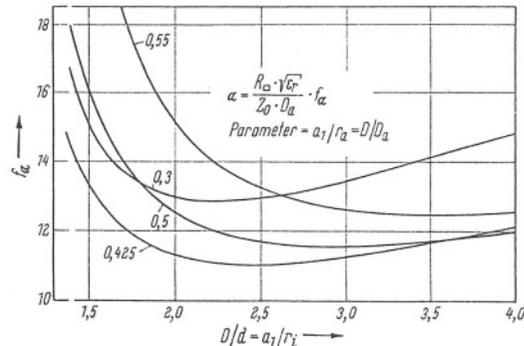


Abb. 4.10/3. Dämpfung der geschirmten, symmetrischen Doppelleitung als Funktion von  $a_1/r_i = D/d$  bei verschiedenen Werten von  $a_1/r_a = D/D_a$

wenn die Leitfähigkeit des Kabelmantels  $\kappa_M$  und die der Leiter  $\kappa_L$  beträgt. Der insgesamt wirksame Widerstandsbelag eines Leiters beträgt demnach

$$R' = R'_0 + \Delta R'_1 + \Delta R'_2 \quad (4.10/5)$$

Der Belag der gesamten Widerstandsämpfung läßt sich damit analog zu den Abschn. 4.6.2 und 4.9.1 in der Form schreiben

$$\alpha_R = \frac{R'}{2Z_L} \equiv \frac{R_{\square} \sqrt{\epsilon_r}}{2Z_0 D_a} f_{\alpha} \quad (4.10/6)$$

Dabei ist  $f_{\alpha}$  eine komplizierte Funktion der Größen  $a_1/r_i = D/d$  und  $a_1/r_a = D/D_a$ . Sie ist in Abb. 4.10/3 unter der Annahme  $\kappa_M = \kappa_L$  für einige Werte von  $a_1/r_a = D/D_a$

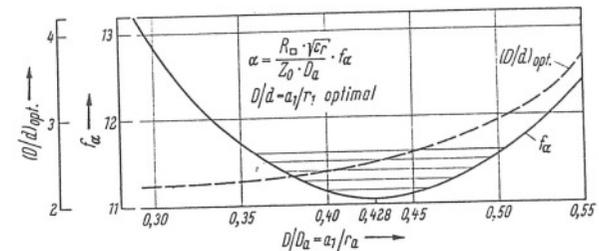


Abb. 4.10/4. Kleinste erreichbare Dämpfung bei der geschirmten Doppelleitung in Abhängigkeit von  $a_1/r_a = D/D_a$ . Die gestrichelte Kurve gibt den zugehörigen Zusammenhang zwischen  $D/D_a$  und  $D/d$  an. Die horizontalen Linien bedeuten jeweils 1% Abweichung vom Dämpfungsminimum

in Abhängigkeit von  $a_1/r_i = D/d$  graphisch dargestellt. Man erkennt, daß die gezeichneten Kurven alle ein Minimum durchlaufen. Trägt man diesen Minimalwert von  $f_{\alpha}$  über dem zugehörigen Parameter  $D/D_a$  auf, so ergibt sich der in Abb. 4.10/4 dargestellte Zusammenhang zwischen  $a_1/r_a = D/D_a$  und der dabei erzielbaren minimalen Dämpfung. Diese wird dann erreicht, wenn man dabei  $a_1/r_i = D/d$  nach der gleichfalls in Abb. 4.10/4 angegebenen Zuordnung wählt. Die Werte, die zu dem absoluten Dämpfungsminimum gehören, sind danach

$$\left(\frac{D}{D_a}\right)_{(\alpha)} = 0,428; \quad \left(\frac{D}{d}\right)_{(\alpha)} = 2,47; \quad \left(\frac{d}{D_a}\right)_{(\alpha)} = 0,173; \quad Z_{L(\alpha)} = \frac{147 \Omega}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

### 4.10.3 Geschirmte Doppelleitung größter Spannungsfestigkeit

Bei der geschirmten Doppelleitung kann die größte elektrische Feldstärke im Punkt  $B_1$  oder im Punkt  $B_2$  (s. Abb. 4.10/1) auftreten. Das Dielektrikum ist elektrisch offenbar am besten ausgenutzt, wenn man den Leitungsquerschnitt so bemißt, daß die Feldstärke  $E_1$  im Punkt  $B_1$  gleich der Feldstärke  $E_2$  im Punkt  $B_2$  ist. Man berechnet also zweckmäßigerweise die Feldstärken  $E_1$  und  $E_2$  in Abhängigkeit von den Querschnittsabmessungen der Leitung und sucht z. B. für vorgegebene Werte von  $d/D_a$  jene Werte von  $D/D_a$ , für die  $E_1 = E_2$  wird. Man findet dann den in Abb. 4.10/5 dargestellten Zusammenhang. Die Bedingung  $E_1 = E_2$  ist demnach nur erfüllbar, wenn  $D/D_a$  zwischen  $\approx 0,486$  und  $0,5$  gewählt wird.

Die in  $B_1$  und  $B_2$  gleichzeitig auftretende Maximalfeldstärke  $E_{\max}$  ist der in Abb. 4.10/5 über  $d/D_a$  aufgetragenen Funktion  $f_E$  proportional:

$$E_{\max} = \frac{2U}{D_a} f_E \quad (4.10/7)$$

Die Funktion  $f_E$  und damit die höchste am Leiterumfang auftretende Feldstärke haben bei den Werten

$$\left(\frac{d}{D_a}\right)_{(E)} = 0,182; \quad \left(\frac{D}{D_a}\right)_{(E)} = 0,48975 \approx 0,49 \quad \text{und} \quad \left(\frac{D}{d}\right)_{(E)} = 2,69$$

ein Minimum. Die so bemessene geschirmte Doppelleitung größter Spannungsfestigkeit hat den Wellenwiderstand  $Z_L = 142 \Omega \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}}$ .

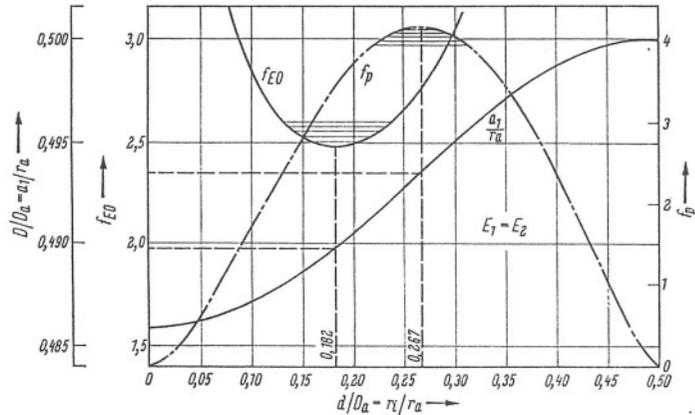


Abb. 4.10/5. Maximalfeldstärke und übertragbare Leistung für den Fall  $E_1 = E_2$  und der zugehörige Zusammenhang zwischen  $a_1/ra = D/D_a$  und  $d/D_a = r_1/ra$

#### 4.10.4 Geschirmte Doppelleitung bester Leistungsübertragung

Hier gelten im Prinzip die in Abschn. 4.6.4 angestellten Überlegungen. Die Leitung kann unter den dort angegebenen Bedingungen die Leistung  $P = U^2/2Z_L$  übertragen. Dabei ist nach Gl. (4.10/7)

$$U = \frac{D_a E_{\max}}{2 f_E}$$

Man erhält dann als übertragbare Leistung

$$P = \frac{(D_a E_{\max})^2}{2 Z_L} \frac{1}{4 f_E^2} = \frac{(D_a E_{\max})^2 \sqrt{\epsilon_r}}{240 \Omega} \frac{f_P}{100} \quad (4.10/8)$$

wobei die Leistungsfunktion

$$f_P = 100 P \frac{240 \Omega}{(D_a E_{\max})^2 \sqrt{\epsilon_r}}$$

analog zu Gl. (4.6/12) und (4.9/6) definiert ist [5]. Die Leistung wird durch die größte am Leiterumfang auftretende Feldstärke begrenzt. Das Maximum der übertragbaren Leistung wird dann erreicht, wenn die Begrenzung in den Punkten  $B_1$  und  $B_2$  (s. Abb. 4.10/1) gleichzeitig auftritt, d. h. wenn  $E_1 = E_2$  ist. In Abb. 4.10/5 ist die unter dieser Bedingung übertragbare Leistung in normierter Form über  $d/D_a$  aufgetragen. Aus dieser Darstellung erhält man für die geschirmte Doppelleitung bester Leistungsübertragung folgende Querschnittsabmessungen [7]:

$$\left(\frac{D}{D_a}\right)_{(P)} = 0,4935; \quad \left(\frac{D}{d}\right)_{(P)} = 1,85; \quad \left(\frac{d}{D_a}\right)_{(P)} = 0,267$$

Dazu gehört ein Wellenwiderstand von  $94,7 \Omega$ .

In Tab. 4.10/I sind die Abmessungen und Wellenwiderstände der dämpfungs-, spannungs- und leistungsmäßig optimalen Kabel und Leitungen zusammengestellt.

Tab. 4.10/I. Optimale Kabel und Leitungen

	Koaxialkabel		Doppelleitung offen		Doppelleitung geschirmt	
	$D/d$	$Z_L \sqrt{\epsilon_r} / \Omega$	$D/d$	$Z_L \sqrt{\epsilon_r} / \Omega$	$D/D_a$	$Z_L \sqrt{\epsilon_r} / \Omega$
kleinste Dämpfung	3,6	77	2,276	175,6	2,47	0,428
größte Spannungsfestigkeit	2,72	60	2,932	208,6	2,69	0,48975
größte Leistung	1,65	30	2,146	167,7	1,85	0,4935
Kompromiß-Werte			2,42	185	2,50	0,490

#### 4.11 Koaxiale Kabelübergänge

Wenn man an ein Koaxialkabel ein zweites mit anderen Abmessungen anschließen will, müssen im Hinblick auf unerwünschte Reflexionen besondere Vorkehrungen getroffen werden. Man muß die Übergangsstelle so bemessen, daß die Leitungswelle eine möglichst kleine Stoßstelle vorfindet. Wir wollen dazu geeignete Kabelübergänge betrachten, die zwei Koaxialkabel verschiedener Abmessungen, aber gleichen Wellenwiderstandes verbinden sollen. Ein idealer Kabelübergang müßte in diesem Fall einen konstanten Wellenwiderstand haben, der gleich dem der zu verbindenden Kabel ist. Exakt läßt sich dies nicht erreichen, weil bei jeder Querschnittsveränderung eine Verzerrung des Feldes entsteht. Dadurch ändert sich die Verteilung von Induktivität und Kapazität und somit auch der Wellenwiderstand. Einen idealen, reflexionsfreien Kabelübergang für ein breites Frequenzband gibt es daher nicht. Sinnvoll ist nur das Streben nach einem optimalen Kabelübergang. Er soll im allgemeinen in einem breiten Frequenzband bei möglichst kurzer Baulänge und einfach herzustellenden Konturen einen möglichst kleinen Reflexionsfaktor haben. In den meisten Fällen schließt man dabei die extrem hohen Frequenzen aus, bei denen bereits höhere Wellenformen auftreten können. Die benutzten Wellenlängen sollen groß gegen die Länge des Übergangs und die Querschnittsabmessungen der Kabel sein. Man kann dann nämlich ohne großen Fehler annehmen, daß das Wechselfeld mit dem statischen Feld übereinstimmt. Dadurch ist eine relativ einfache theoretische Untersuchung solcher Probleme möglich [9, 10].

##### 4.11.1 Der Sprungübergang

Er stellt den einfachsten Kabelübergang dar. Man erhält ihn, indem man in je einer Ebene die Innenleiter und die Außenleiter der zu verbindenden Kabel aneinanderstoßen läßt (Abb. 4.11/1). In der einen Ebene springt die lichte Weite des Außenleiters von  $D_1$  auf  $D_2$ , in der anderen der Durchmesser des Innenleiters von  $d_1$  auf  $d_2$ . Wenn beide Kabel gleiche Isolation und gleichen Wellenwiderstand haben, ist  $D_2/D_1 = d_2/d_1$ . Erfolgte der Durchmessersprung bei Innen- und Außenleiter in einer gemeinsamen Ebene, so käme an der Übergangsstelle der dickere Innenleiter zu dicht an den dünneren Außenleiter. Die Folge wäre wegen der erhöhten Kapazität ein zu kleiner Wellenwiderstand. Für  $d_2 \geq D_1$  ergäbe sich sogar Kurzschluß zwischen Innen- und Außenleiter. Man läßt daher den Innenleiter des dünneren Kabels um die Länge  $\Delta$  in den Mantel des dickeren Kabels hineinragen. Dadurch wird die Kapazität vermindert und die Induktivität erhöht, der Wellenwiderstand also