1

Schätzung der Übertragungsfunktion

Gegeben: Messdaten. Gesucht: Modell

$$G(s) = \frac{\tilde{b}_0 + \tilde{b}_1\, s + \tilde{b}_2\, s^2 + \ldots + \tilde{b}_m\, s^m}{\tilde{a}_0 + \tilde{a}_1\, s + \tilde{a}_2\, s^2 + \ldots + \tilde{a}_n\, s^n} \tag{1.1}$$

Man dividiere Zähler und Nenner jeweils durch $\tilde{a}_0$ und erhält:

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1\, s + b_2\, s^2 + \ldots + b_m\, s^m}{1 + a_1\, s + a_2\, s^2 + \ldots + a_n\, s^n} \tag{1.2}$$

Diese Übertragungsfunktion wird für mehrere s_k gemessen, sodass gilt:

$$G(s_k) = p_k + \mathrm{j}\, q_k \tag{1.3}$$

Dies setzt man nun bei Gleichung 1.2 ein und erhält:

$$\frac{b_0 + b_1\, s_k + b_2\, s_k^2 + \ldots + b_m\, s_k^m}{1 + a_1\, s_k + a_2\, s_k^2 + \ldots + a_n\, s_k^n} = p_k + \mathrm{j}\, q_k \tag{1.4}$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner:

$$b_0 + b_1\, s_k + b_2\, s_k^2 + \ldots + b_m\, s_k^m = (p_k + \mathrm{j}\, q_k) \cdot \left(1 + a_1\, s_k + a_2\, s_k^2 + \ldots + a_n\, s_k^n\right)$$

Ausmultiplizieren:

$$\begin{aligned} b_0 + b_1\, s_k + b_2\, s_k^2 + \ldots + b_m\, s_k^m = \\ p_k + p_k\, a_1\, s_k + p_k\, a_2\, s_k^2 + \ldots + p_k\, a_n\, s_k^n + \mathrm{j}\, q_k + \mathrm{j}\, q_k\, a_1\, s_k + \mathrm{j}\, q_k\, a_2\, s_k^2 + \ldots + \mathrm{j}\, q_k\, a_n\, s_k^n \end{aligned} \tag{1.5}$$

Nun bringt man alle Terme, in denen p_k und q_k für sich alleine sind, auf die rechte Seite:

$$\begin{aligned} b_0 + b_1\, s_k + b_2\, s_k^2 + \ldots + b_m\, s_k^m \\ -p_k\, a_1\, s_k - p_k\, a_2\, s_k^2 - \ldots - p_k\, a_n\, s_k^n \\ -\mathrm{j}\, q_k\, a_1\, s_k - \mathrm{j}\, q_k\, a_2\, s_k^2 - \ldots - \mathrm{j}\, q_k\, a_n\, s_k^n \\ = p_k + \mathrm{j}\, q_k \end{aligned} \tag{1.6}$$

Mit

$$s_k = \mathrm{j}\, \omega_k \tag{1.7}$$

wird hieraus:

$$\begin{aligned} b_0 + b_1\, (\mathrm{j}\, \omega_k) + b_2\, (\mathrm{j}\, \omega_k)^2 + \ldots + b_m\, (\mathrm{j}\, \omega_k)^m \\ -p_k\, a_1\, (\mathrm{j}\, \omega_k) - p_k\, a_2\, (\mathrm{j}\, \omega_k)^2 - \ldots - p_k\, a_n\, (\mathrm{j}\, \omega_k)^n \\ -\mathrm{j}\, q_k\, a_1\, (\mathrm{j}\, \omega_k) - \mathrm{j}\, q_k\, a_2\, (\mathrm{j}\, \omega_k)^2 - \ldots - \mathrm{j}\, q_k\, a_n\, (\mathrm{j}\, \omega_k)^n \\ = p_k + \mathrm{j}\, q_k \end{aligned} \tag{1.8}$$

Und nach Ausmultiplizieren der Potenzen:

$$\begin{aligned} b_0 + \mathrm{j}\, b_1\, \omega_k - b_2\, \omega_k^2 - \mathrm{j}\, b_3\, \omega_k^3 \pm \ldots \\ -\mathrm{j}\, p_k\, a_1\, \omega_k + p_k\, a_2\, \omega_k^2 - \mathrm{j}\, p_k\, a_3\, \omega_k^3 \pm \ldots \\ +a_1\, q_k\, \omega_k + \mathrm{j}\, q_k\, a_2\, \omega_k^2 - q_k\, a_3\, \omega_k^3 \mp \ldots \\ = p_k + \mathrm{j}\, q_k \end{aligned} \tag{1.9}$$

Realteil:

$$\begin{aligned} b_0 - b_2\, \omega_k^2 + b_4\, \omega_k^4 - b_6\, \omega_k^6 \pm \ldots \\ +p_k\, a_2\, \omega_k^2 - p_k\, a_4\, \omega_k^4 + p_k\, a_6\, \omega_k^6 \mp \ldots \\ +q_k\, a_1\, \omega_k - q_k\, a_3\, \omega_k^3 + q_k\, a_5\, \omega_k^5 \mp \ldots \\ = p_k \end{aligned} \tag{1.10}$$

Imaginärteil:

$$\begin{aligned} b_1\, \omega_k - b_3\, \omega_k^3 + b_5\, \omega_k^5 - b_7\, \omega_k^7 \pm \ldots \\ -p_k\, a_1\, \omega_k + p_k\, a_3\, \omega_k^3 - p_k\, a_5\, \omega_k^5 \pm \ldots \\ +q_k\, a_2\, \omega_k^2 - q_k\, a_4\, \omega_k^4 + q_k\, a_6\, \omega_k^6 \mp \ldots \\ = q_k \end{aligned} \tag{1.11}$$

In Matrizenform:

$$\mathbf{A}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\omega_k^2 & 0 & \omega_k^4 & 0 & -\omega_k^6 & \ldots & q_k\, \omega_k & p_k\, \omega_k^2 & -q_k\, \omega_k^3 & -p_k\, \omega_k^4 & \ldots \\ 0 & \omega_k & 0 & -\omega_k^3 & 0 & \omega_k^5 & 0 & \ldots & -p_k\, \omega_k & q_k\, \omega_k^2 & p_k\, \omega_k^3 & -q_k\, \omega_k^4 & \ldots \end{pmatrix}$$

sowie

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{b}_k^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} p_k & q_k \end{pmatrix}$$