Experimentelle Modalanalyse (EMA)

Kurze Einführung

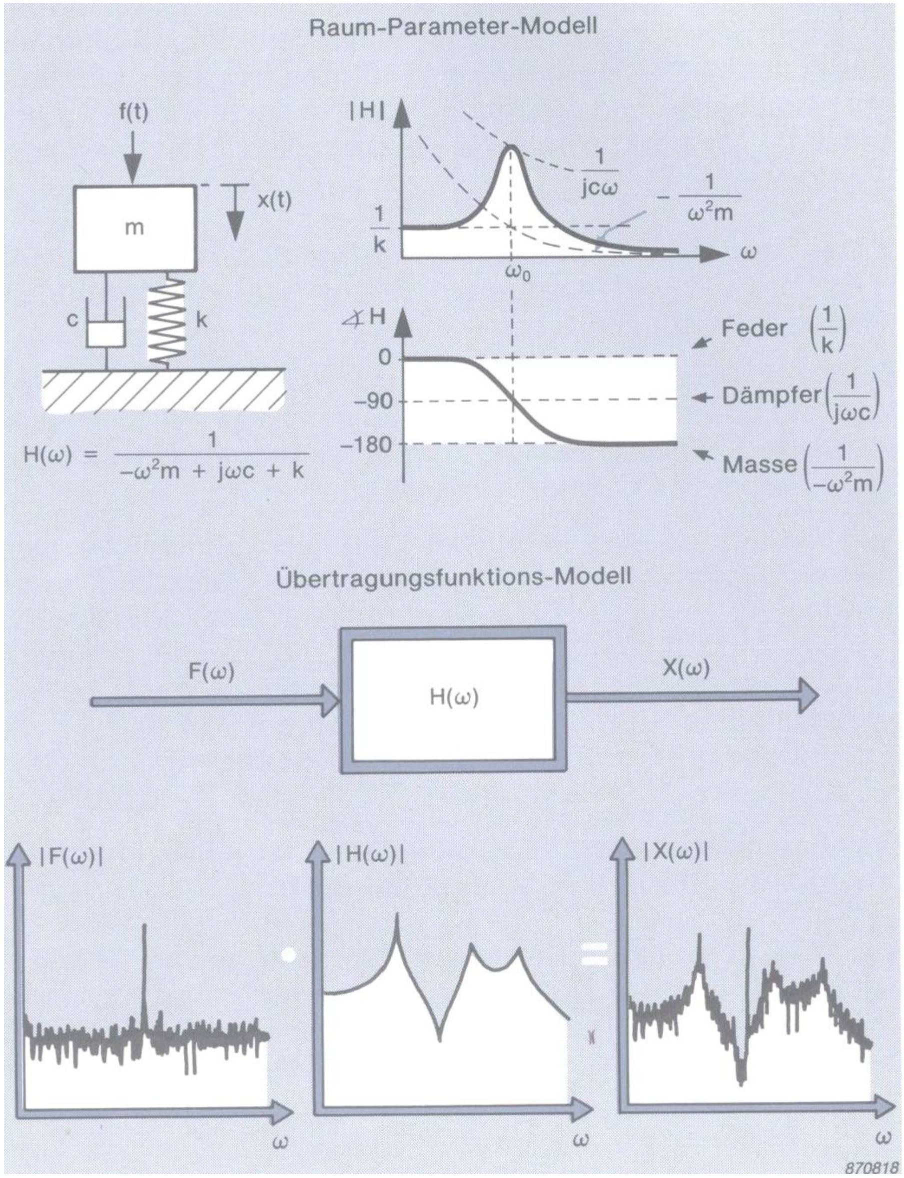
Modalanalyse ist der Vorgang zur Ermittlung der Modalparameter einer Struktur für alle Eigenschwingformen im zu untersuchenden Frequenzbereich.

Erster Schritt der EMA ist die Ermittlung der Modalparameter eines Systems:

- **Modalfrequenz**
- **Modaldämpfung**
- **Modenform**

Ziel letztendlich ist die Entstehung eines Modal-Modells des Strukturverhaltens anhand dieser Parameter.

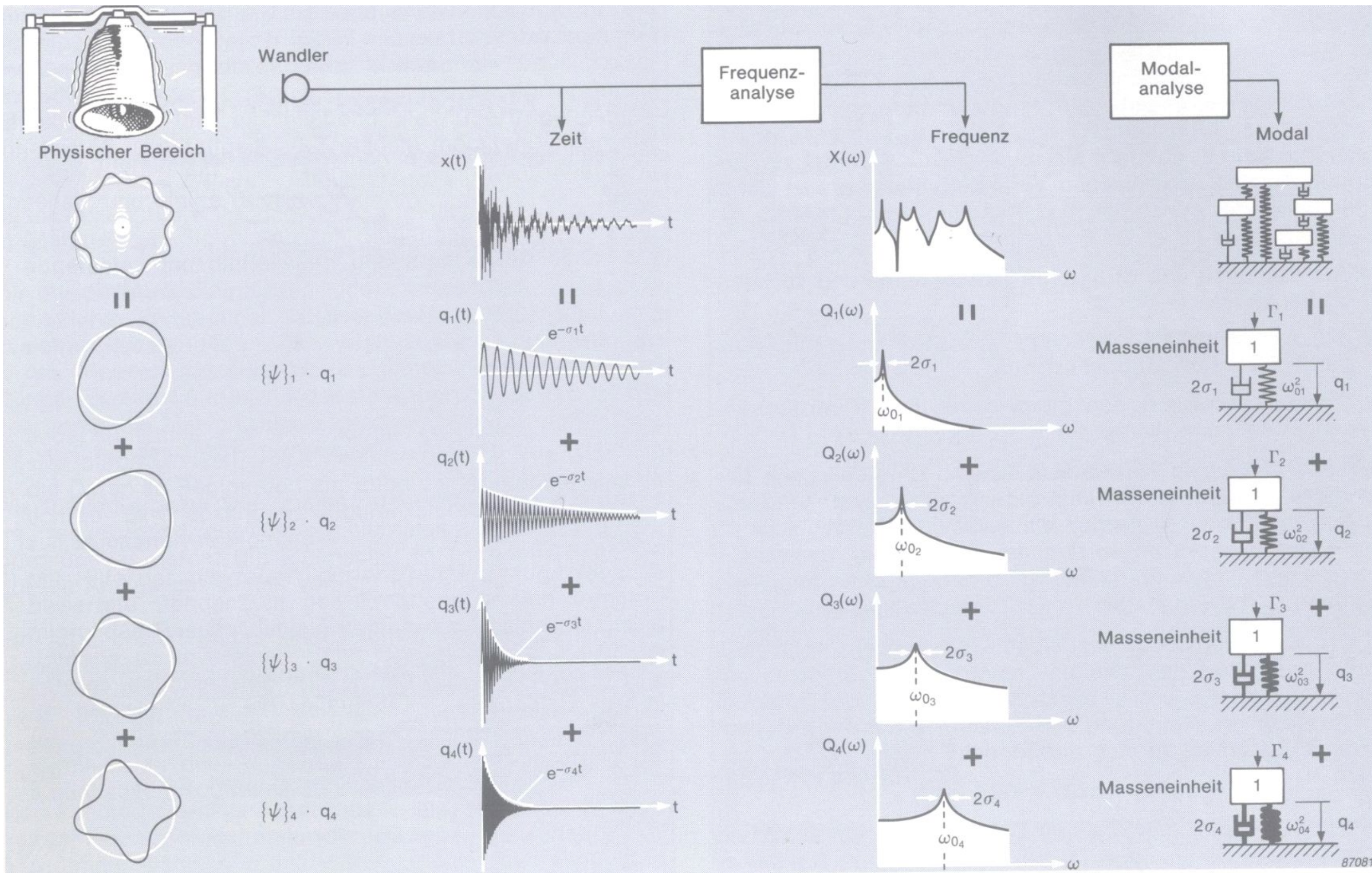
Grundidee der Modalanalyse



Experimentelle Modalanalyse (EMA)

Kurze Einführung

Jede erzwungene Schwingung einer Struktur lässt sich als bewertete Summe ihrer Schwing(Moden)formen darstellen. Jede Schwingform lässt sich durch ein Ein-Freiheitsgrad-Modell darstellen



Experimentelle Modalanalyse (EMA)

Kurze Einführung

Voraussetzungen:

Linearität : Systeme müssen sich linear verhalten, d.h. Antwort immer proportional zur Erregung.

Für die Messung der Übertragungsfunktion folgt daraus:

- **Überlagerung: Übertragungsfunktion ist unabhängig von der Art der Erregerfunktion; Gleitsinus Breitbanderregung**
- **Homogenität: gemessene Übertragungsfunktion ist unabhängig von Erregungspegel**
- **Reziprozität: Übertragungsfunktion gleich unabhängig davon, wo Messpunkt und wo Erregerpunkt ist.**

Erregung x(t) ruft System - Antwort y(t) hervor.

Experimentelle Modalanalyse (EMA)

Kurze Einführung

Zusammenhang zwischen Antwort und Erregung durch *DUHAMEL*sches Integral:

$$y(t) = \int_0^t g(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau = g(t)^* \cdot x(t) \qquad (1)$$

g(t) - Gewichtsfunktion, welche als Systemantwort auf einen *DIRAC*-Impuls definiert ist.

Günstigere Darstellung der dyn. Eigenschaften eines Systems durch FOURIER-Transformation von (1) im Frequenzbereich möglich:

$$\underline{Y}(j\omega) = \underline{G}(j\omega)\, \underline{X}(j\omega) \qquad (2)$$

Experimentelle Modalanalyse (EMA)

Kurze Einführung

Mit (2) sind Systemeigenschaften aus Antwortspektrum Y(jω)) und dem Erregerspektrum X(jω) ermittelbar, Frequenzgang G(jω) mathematisch beschrieben als gebrochene rationale Funktion:

$$G_{\mu\nu} = \frac{Y(j\omega)_\mu}{X(j\omega)_\nu} = \frac{a_0 + a_1 j\omega + \ldots + a_m (j\omega)^m}{b_0 + b_1 j\omega + \ldots + b_n (j\omega)^n} \qquad (3)$$

G (jω) – bei multivariablen Strukturmodellen Frequenzgangmatrix, enthält alle Frequenzgänge, die das Systemverhalten von Antwortstelle μ zur Erregerstelle ν beschreiben.

- **Polstellen: Charakter der Schwingung, System-Eigenfrequenzen**
- **Nullstellen des Polynoms: Einfluss auf Schwingungsamplitude**

Jedes dynamische System kann beschrieben werden mit:

$$\underline{M}\,\underline{\ddot{y}}(t) + \underline{K}\,\underline{\dot{y}}(t) + \underline{C}\,\underline{y}(t) = \underline{x}(t) \qquad (4)$$

Experimentelle Modalanalyse (EMA)

Kurze Einführung

Die Dgln. in (4) sind im Allgemeinen verkoppelt.

Mit Modaltransformation besteht Möglichkeit, die Dgln. zu entkoppeln, d.h. in n Dgln. aufzulösen. Entkopplung durch Diagonalisierung der Systemmatrizen M, K, C. Die gleichzeitige Diagonalisierung der 3 Matrizen ist nur möglich, wenn die Matrizen $\underline{M}$, $\underline{K}$, $\underline{C}$ symmetrisch und die Bequemlichkeitshypothese lt. (5) gilt:

$$\underline{K} = \alpha \underline{M} + \beta \underline{C} \qquad (5)$$

Annahme: proportionale Dämpfung bei schwach gedämpften Systemen. Modaltransformation - Ähnlichkeitstransformation mit der Modalmatrix V. Mit Ansatz:

$$\underline{y} = \underline{V} \cdot \underline{p} \qquad (6)$$

Experimentelle Modalanalyse (EMA)

Kurze Einführung

und Multiplizieren von (4) mit V^T erhält man mit (5):

$$\operatorname{diag}\left(\underline{\tilde{M}}\right)\underline{\ddot{p}} + \operatorname{diag}\left(\underline{\tilde{K}}\right)\underline{\dot{p}} + \operatorname{diag}\left(\underline{\tilde{C}}\right)\underline{p} = \underline{V}^T\underline{x} \qquad \textbf{(7)}$$

Danach *FOURIER*-Transformation - Frequenzgang (bei homogenen („Null“)-Anfangsbedingungen) ist Quotient aus Antwort Y und Erregung X beschrieben in der Form – damit Komponente der Frequenzgangmatrix $\underline{G}$:

$$G_{\mu\nu}(j\omega) = \sum_{i=1}^{r}\left[\frac{v_{\mu i} \cdot v_{\nu_i}}{j\omega - j\omega_i} + \frac{v^*_{\mu i}\, v^*_{\nu i}}{j\omega - j\omega^*_i}\right] \qquad \textbf{(8)}$$

$v_{\mu i}, v_{\nu i}$ - Elemente der Modalmatrix

Experimentelle Modalanalyse (EMA)

Kurze Einführung

Schlussfolgerungen:

- **Jeder Frequenzgang ist Summe der Frequenzgänge modaler Systeme mit einem FG (siehe Folie 2).**
- **Frequenzgang auf die auf die Erregung bezogene Antwort nach (2) und kann somit gemessen werden.**
- **Damit erhält man Zusammenhang zwischen den Messwerten für Frequenzgang und Systemeigenschaften.**
- **Mit geeigneten Identifikationsverfahren können entsprechend die modalen Parameter bestimmt (geschätzt) werden.**
- **Gl. (8): schon in einer Komponente G alle Eigenwerte vorhanden und in einer Zeile bzw. Spalte der Frequenzgang-matrix alle Eigenvektoren des Systems enthalten.**
- **Eine Zeile der Matrix erhält man, indem an einer Stelle gemessen und an allen anderen Stellen erregt wird und eine Spalte, wenn an einer Stelle erregt und an allen Stellen gemessen wird.**

Experimentelle Modalanalyse (EMA)

Kurze Einführung

Hinweise für eine vollständige Identifikation:

3.Beobachtbarkeit:
- **keine Messung im Schwingungsknoten**
- **keine Messung von Relativkoordinaten**

2. Steuerbarkeit:
- **keine Erregung im Schwingungsknoten**
- **Kraftwirkungslinie möglichst außerhalb des geschätzten Schwerpunktes**
- **bei simultaner Erregung an unterschiedlichen Stellen unterschiedliche Erregerfunktionen wählen**

3. Identifizierbarkeit:
- **die aus Messdaten gebildete Kriteriumsfunktion für die Fehlerbewertung muss ein globales Minimum besitzen, welches mit den gewählten exp. Mitteln und Algorithmen bestimmt werden kann**

Experimentelle Modalanalyse (EMA)

Kurze Einführung

Prinzipieller Weg:

- **System durch eine dynamische (gemessene Kraft) angeregt.**
- **Resultierende Systemantwort mit Messaufnehmern erfasst.**
- **Zeitsignale von Erregung und Antwort werden konditioniert, dem FFT-Analysator übergeben und dort gefiltert, abgetastet, digitalisiert und mit der FFT in den Frequenzbereich transformiert.**

Ergebnis: Frequenzgang in diskreten Werten.

3 Aspekte der Frequenzgangermittlung:

1. **Lagerung und Erregung der Struktur**
2. **Aufnahme der zu messenden Größen (Kraft, Bewegung)**
3. **Signalverarbeitung (Analysatoreinstellung entspr. der Aufgabe)**

Experimentelle Modalanalyse (EMA)

Kurze Einführung

Idealfall:
Bildung des Frequenzganges G nach (2).

Praktisch entstehen Probleme durch:
- mechanische Störsignale in der Struktur,
- nichtlineares dynamisches Verhalten des Systems
- elektrische Rauschsignale in Messgeräten.

Lösung durch Mittelungsverfahren angewendet – nach genügend großer Anzahl von Mittelungen wird:
- stochastisches Rauschen unterdrückt
- deterministische Signale addieren sich.

Experimentelle Modalanalyse (EMA)

Kurze Einführung

Einfluss der Störsignale in der Kohärenzfunktion, sie bewertet Linearität zwischen Eingangs- und Ausgangssignal:

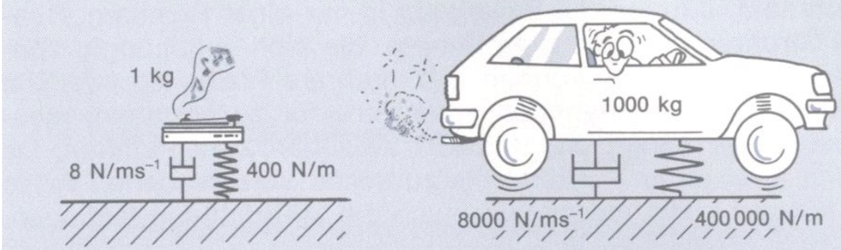
$$\gamma^2 = \frac{\left[G_{\mu\nu} \right]^2}{G_{\mu\mu} \; G_{\nu\nu}} \qquad \left(0 < \gamma^2 < 1 \right)$$

γ klein – dann großer Einfluss von Störsignalen auf den Frequenzgang. Praktisch meist ausreichend:
$\gamma > 0{,}75$

Mit der Kohärenzfunktion ist Kontrolle des Versuchsaufbaus möglich, Ursachen schlechter Kohärenz:
- Kabeleinflüsse
- schlechte Wahl der Erreger- und Messpunkten, Nichtlinearität)

Kohärenz sollte in Abhängigkeit von Mittelungszahl bestimmt werden; Fehlerquellen können so erkannt und notwendige Mittelungszahl festgelegt werden.

Beispiel PKW



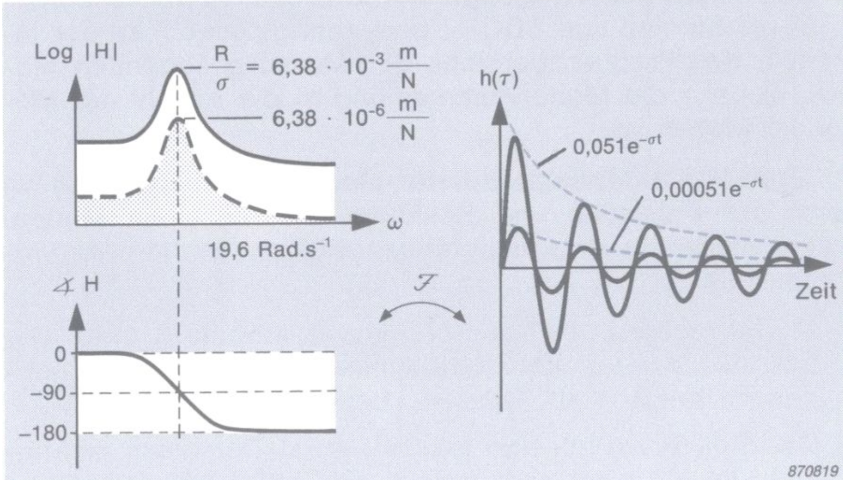
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{400}{1}} = 20 \qquad \sqrt{\frac{400\,000}{1\,000}} = 20 \quad \text{Rad/s}$$

$$\sigma = \frac{c}{2m} = \frac{8}{2 \cdot 1} = 4 \qquad \frac{8\,000}{2 \cdot 1\,000} = 4 \quad \text{Rad/s}$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \sigma^2} = \sqrt{20^2 - 4^2} = 19{,}6 \qquad \sqrt{20^2 - 4^2} = 19{,}6 \quad \text{Rad/s}$$

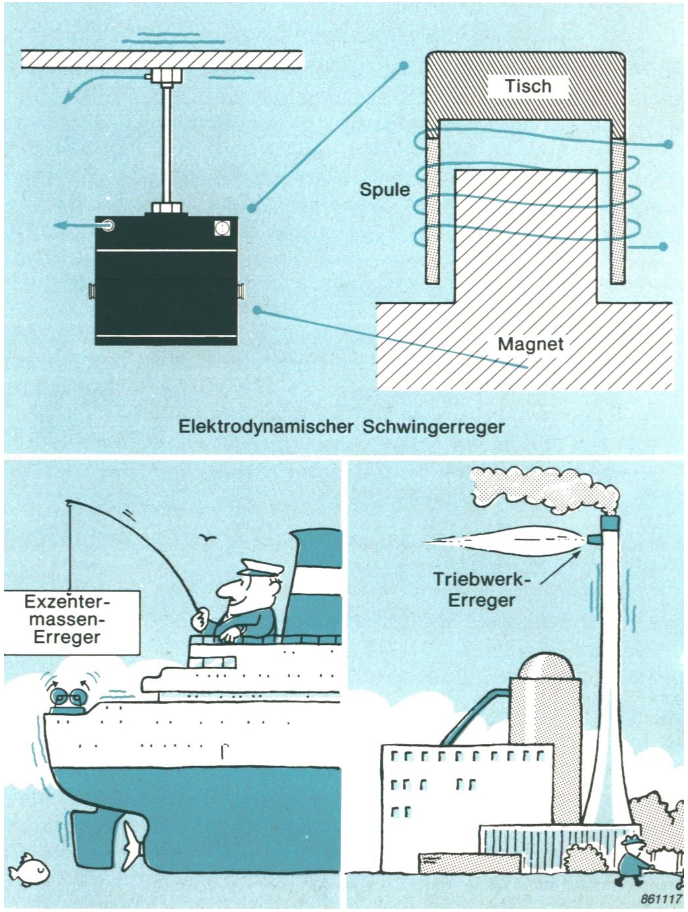
$$R = \frac{1}{2 \cdot j \cdot m \cdot \omega_d} \qquad = \frac{1}{2 \cdot j \cdot 1.000 \cdot 19{,}6}$$

$$= \frac{1}{2 \cdot j \cdot 19{,}6} = -j2{,}55 \cdot 10^{-2} \qquad = -j2{,}55 \cdot 10^{-5} \ \text{m/N} \cdot \text{s}$$



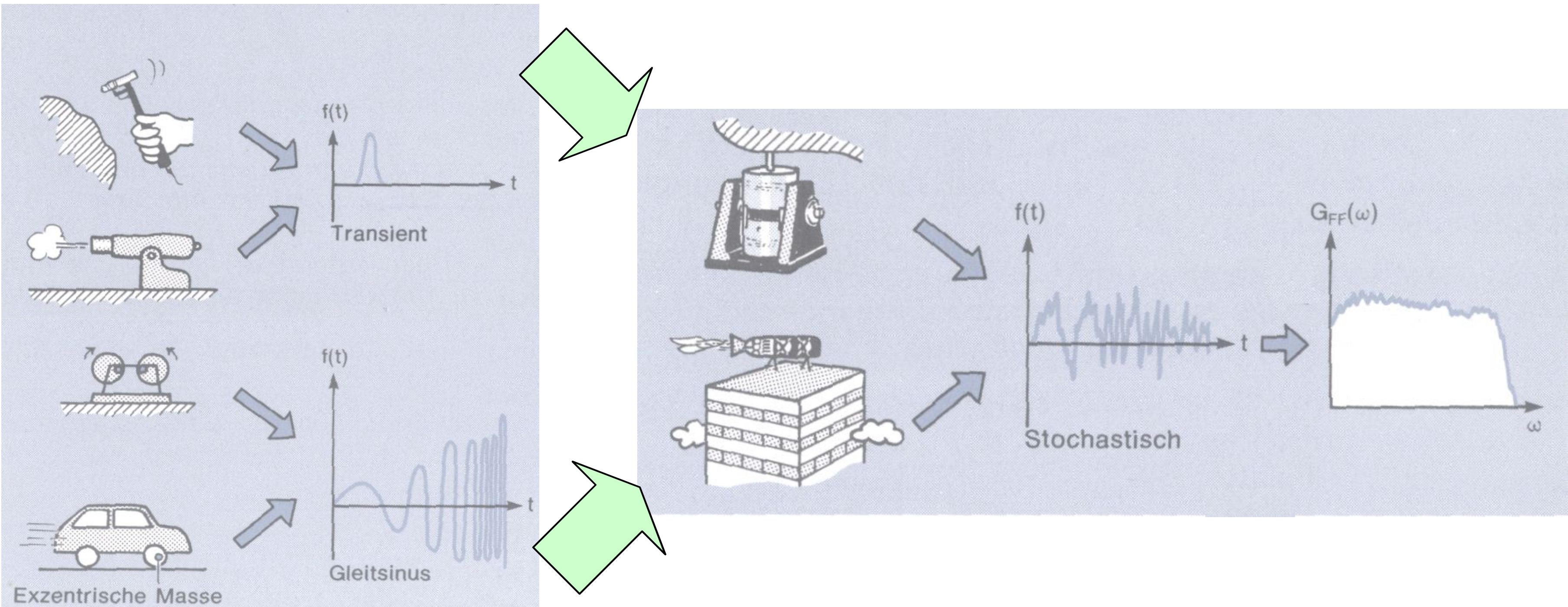
Grundidee der Modalanalyse

Erregerarten



Grundidee der Modalanalyse

Erregersignale

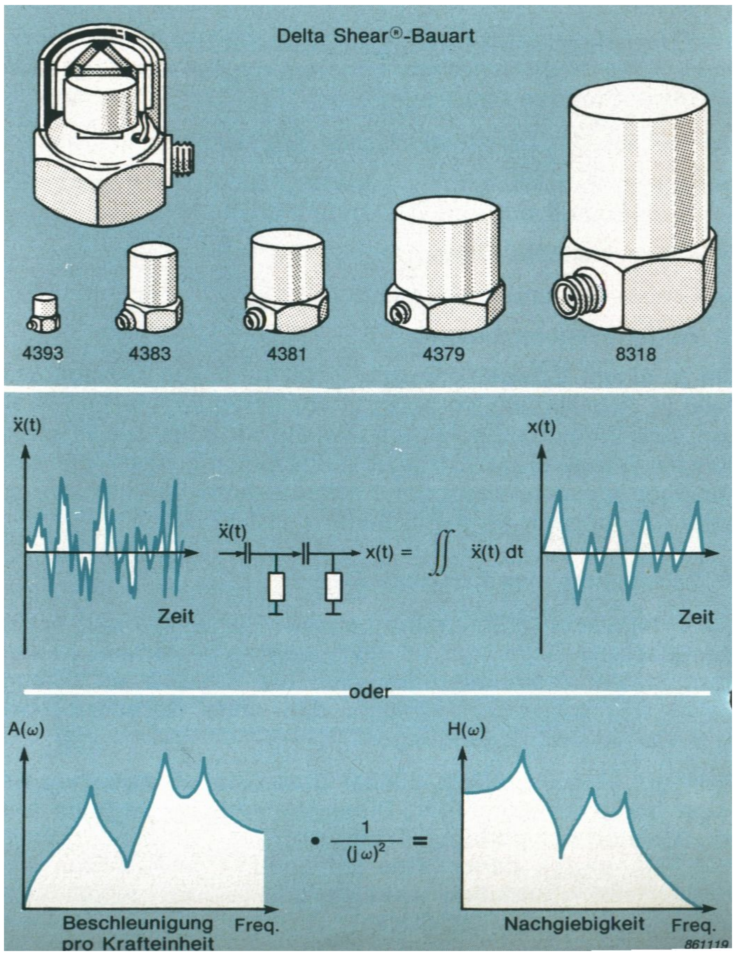


Signalform	Analyse-geschwindigkeit	Abbrech-fehler ?	Lineare Näherung ?	Scheitelfaktor Störsignalabstand	Spektrum-regelung	Frequenzlupen-Analyse ?	γ^2 erfaßt Nicht-Linearitäten ?	γ^2 erfaßt Datenverlust ?
Sinusförmig	sehr langsam	ja	nein	gut	gut	ja	nein	nein
Stochastisch	langsam	ja	ja	ausreichend	gut	ja	ja	ja
Pseudo-Stochastisch	schnell	nein	nein	ausreichend	gut	ja	nein	nein
Schlag	sehr schnell	nein (mit exp. Fenster)	nein	schlecht	begrenzt	nein	nein	nein
Mehrfach-Schlag	langsam	ja	einge-schränkt	ausreichend bis schlecht	begrenzt	nein	(ja)	ja

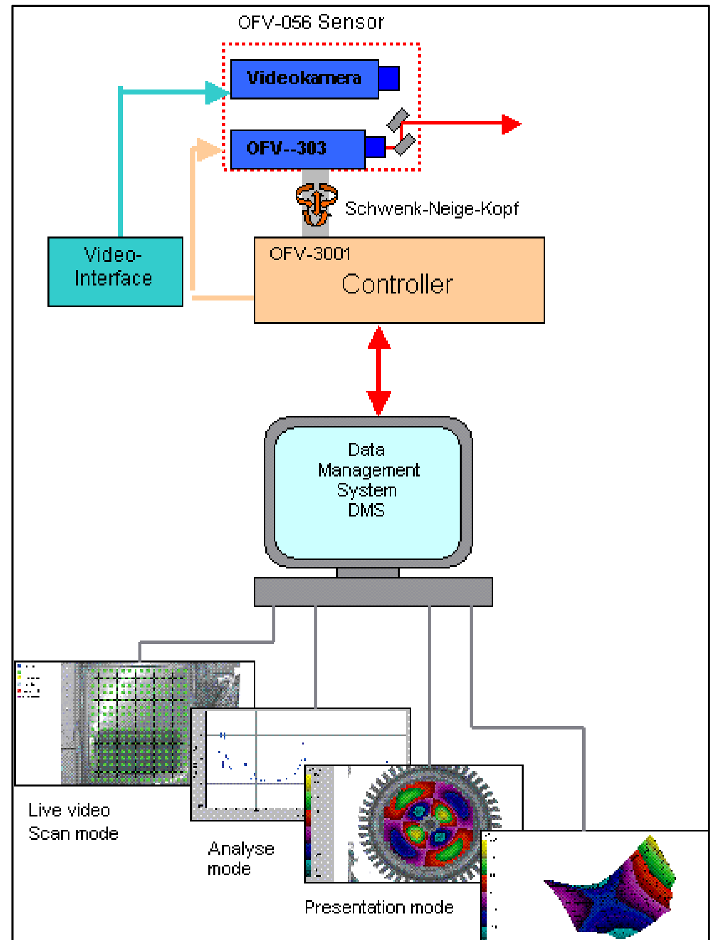
Grundidee der Modalanalyse

Aufnehmer

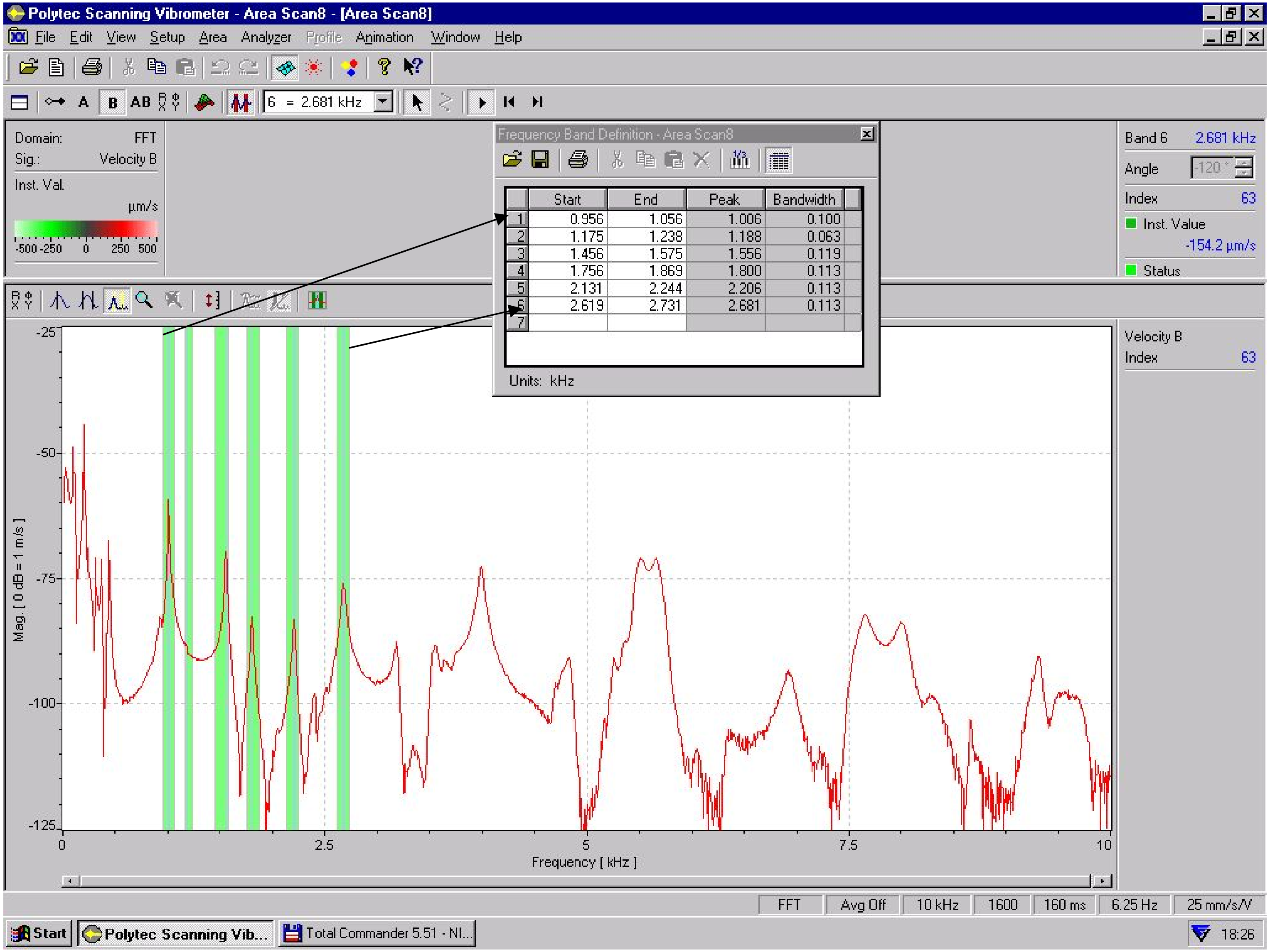
Gekoppelt



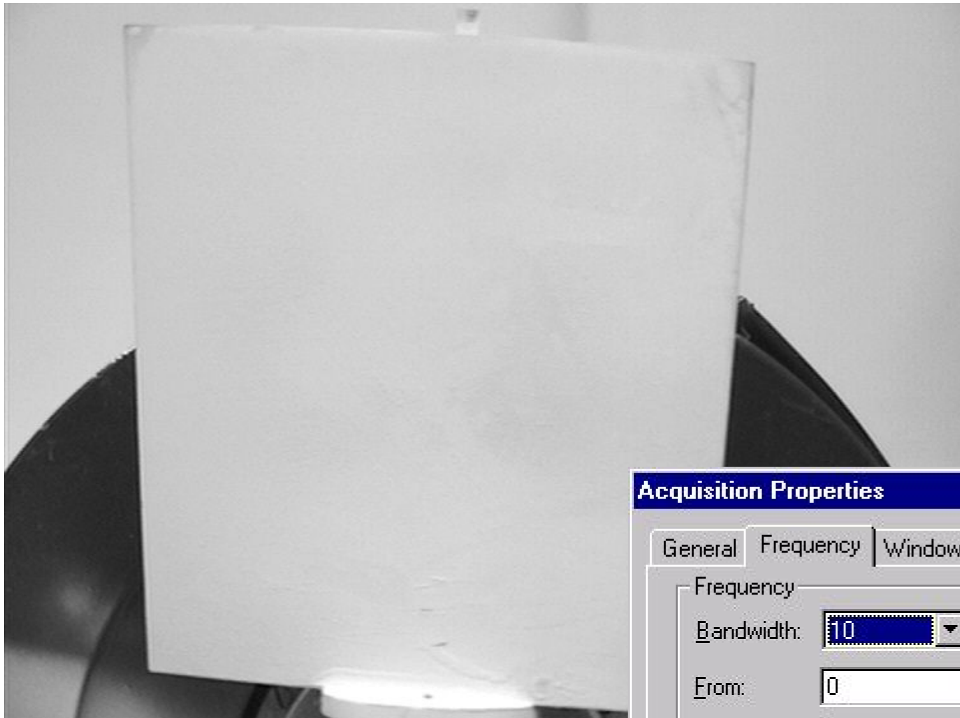
Berührungslos

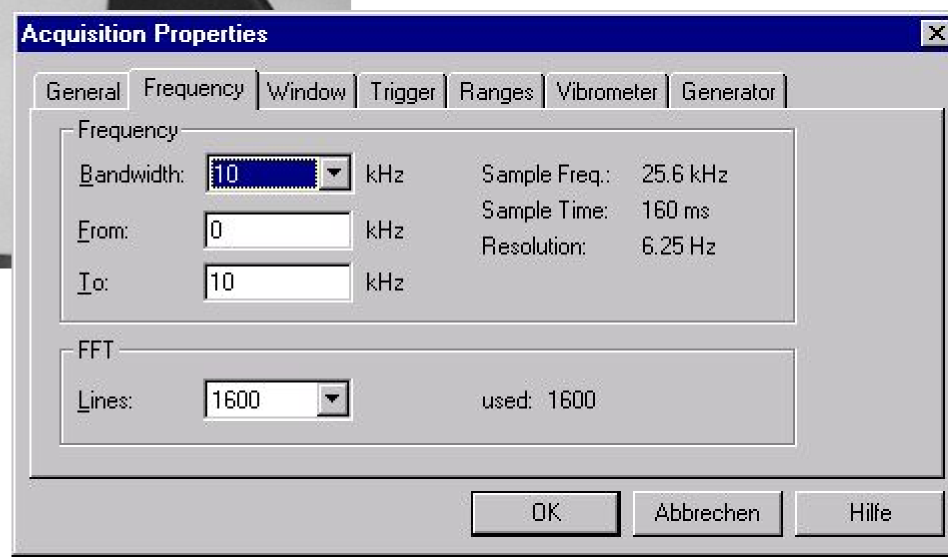


Schaufel - Spektrum Periodic Chirp 0 - 10 kHz

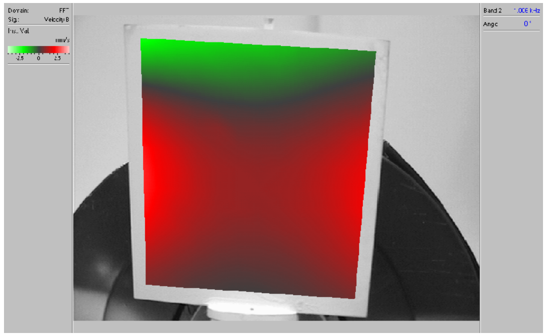


Schaufel - Spektrum Periodic Chirp 0 - 10 kHz

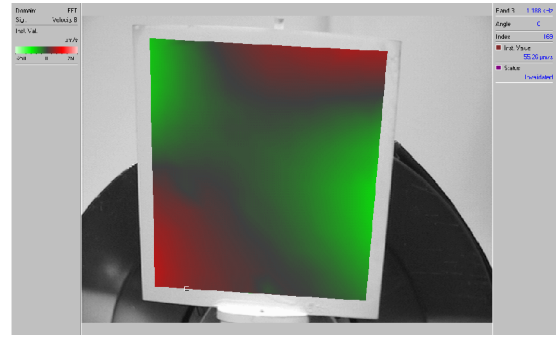




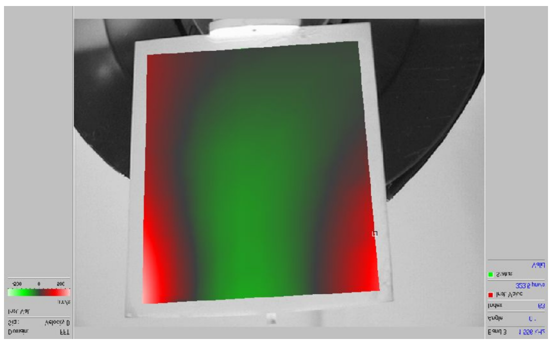
Schaufel - Spektrum Periodic Chirp 0 - 10 kHz



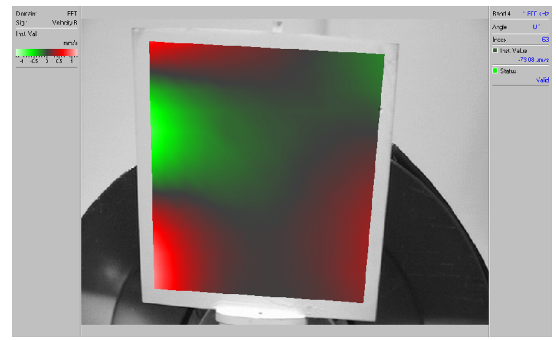
1000 Hz



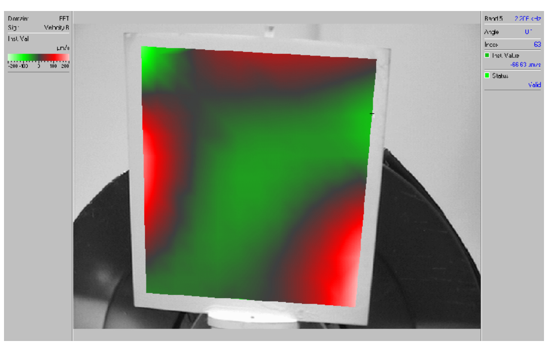
1188 Hz



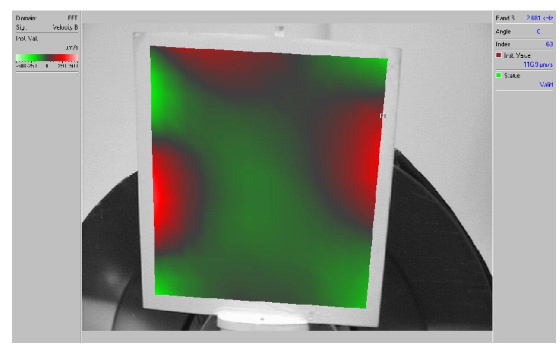
1588 Hz



1800 Hz



2206 Hz



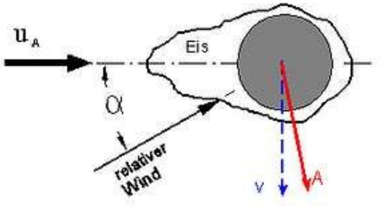
2681 Hz

Nichtlineare Schwingungen

1	$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$ $t = 0: q = q_0;\ \dot{q} = u_0$	Lineare autonome Bewegungsgleichung (Freie Schwingungen)	Autonome Bewegungs-gleichungen	
2	$\ddot{q} + f(q; \dot{q}) = 0$ $t = 0: q = q_0;\ \dot{q} = u_0$	Nichtlineare autonome Bewegungsgleichung (Freie Schwingungen) *Sonderfall:* Bewegungsgleichung der selbst-erregten Schwingungen		
3	$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = f(t)$	Lineare Bewegungsgleichung für erzwungene Schwingungen	Erzwungene Schwin-gungen	Heteronome Bewegungsgleichungen
4	$\ddot{q} + f_1(\dot{q}; q) = f_2(t)$	Nichtlineare Bewegungsgleichung für erzwun-gene Schwingungen		
5	$\ddot{q} + f_1(t)\,\dot{q} + f_2(t)\,q = 0$	Rheolineare Bewegungsgleichung (Parametererregte Schwingungen)	Parameter-erregte Schwin-gungen	
6	$\ddot{q} + f_1(t)\,f_2(\dot{q}; q) = 0$	Rheonichtlineare Bewegungsgleichung (Parametererregte Schwingungen)		
7	$\ddot{q} + f_1(t)\,f_2(\dot{q}; q) = f_3(t)$	Rheonichtlineare Bewegungsgleichung mit Störglied		

Nichtlineare Schwingungen

Selbsterregte Schwingungen:
- **Reibschwinger**
- **Regen- Windinduzierte Schwingungen**



Parameterregte Schwingungen:
- **Pendel mit bewegtem Aufhängepunkt oder veränderlicher Länge**
- **Kupplungsstangenantrieb von Lokomotiven**
- **Träger mit vershiebbarem Lager**

Nichtlineare Schwingungen

Typische Erscheinungen:

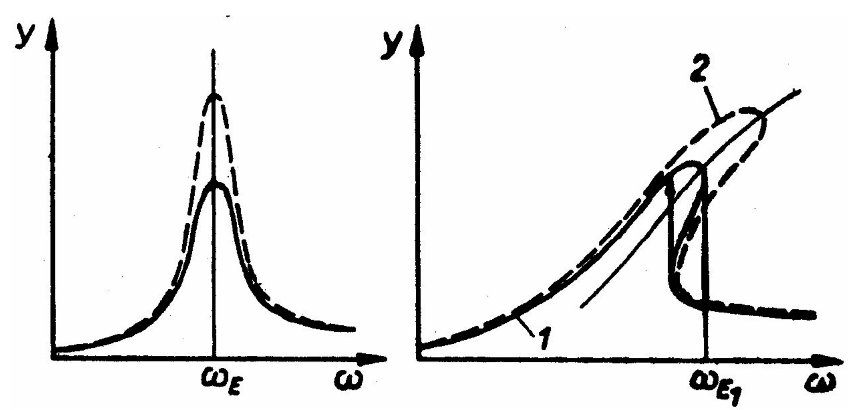
2. **Schwingfrequenz ist Funktion der Amplitude:**

$$\frac{T}{T_0} = \left[1 + \frac{2}{\pi} / \left(\frac{q_{\max}}{q_{Spiel}} - 1\right)\right]$$

6. **Bewegung der freien und harmonisch erregten Schwingungen ist eine Zeitfunktion**
7. **Bei „negativer“ Dämpfung (Anfachung) treten selbsterregte Schwingungen auf**
8. **Bei harmonischer Erregung mit Ω treten Bwegungen mit Subharmonischen auf:**

$$\Omega_k = {}^{p}\!/_{n}\, \Omega_k$$

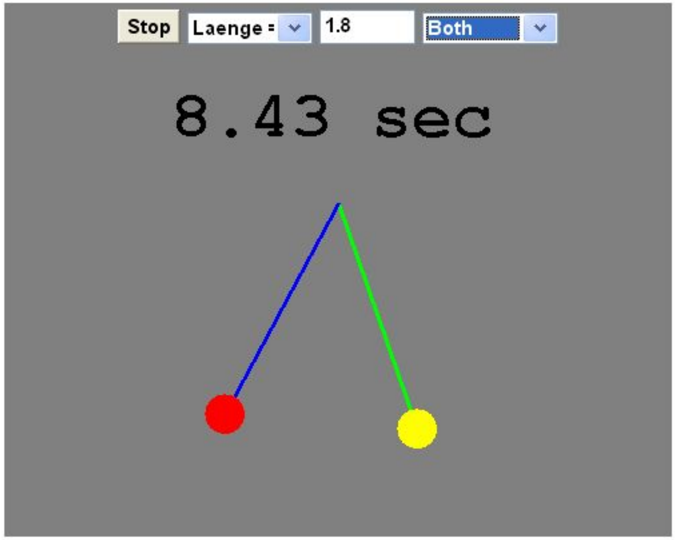
11. Kippeffekt der Resonanzkurve



Nichtlineare Schwingungen

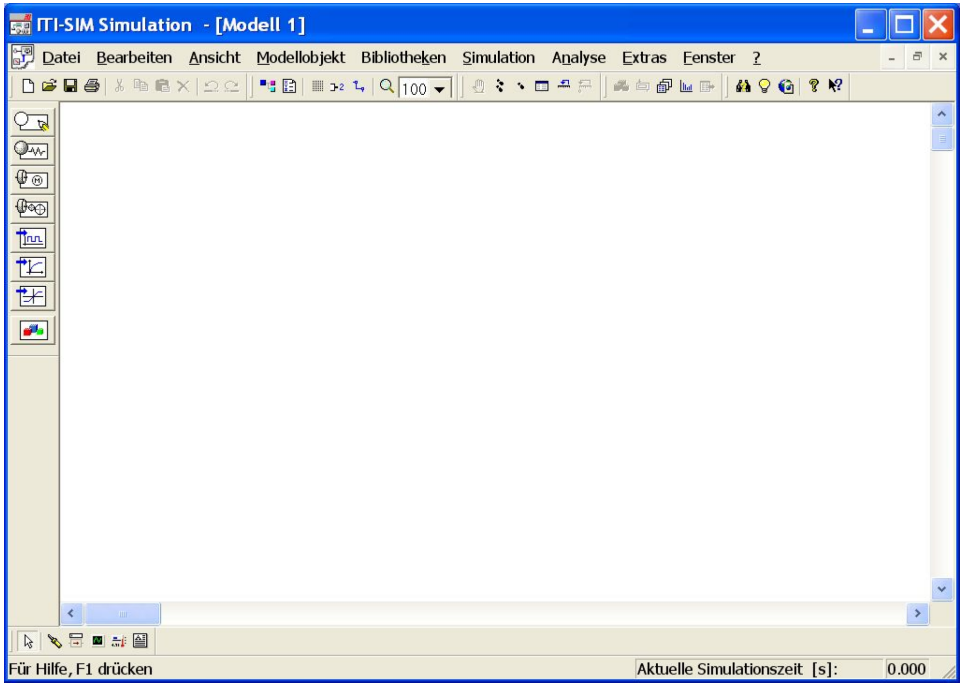
Beispiel: Nichtlineares Pendel

Das lineare und nichtlineare Pendel



ITI-SIM

MKS-System von ITI-GmbH Dresden



Literatur

Brüel & Kjær, Informationsblatt zur Modalanalyse

Lehrbuch und Übungsbuch Technische Mechanik, Fachbuchverlag:
Hans-Jürgen Hardtke , Bodo Heimann , Heinz Sollmann

Holzweißig / Dresig: Lehrbuch Maschinendynamik, Springer-Verlag
5. Auflage

ITI-SIM Handbuch