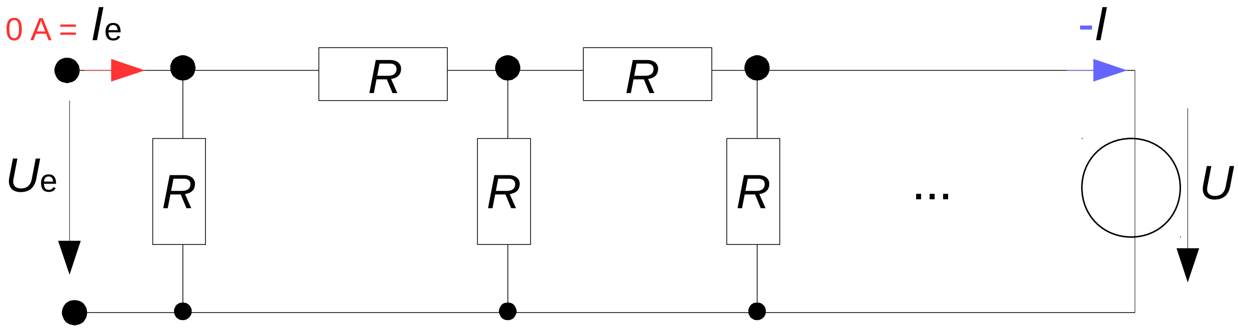
Hier wird ein primärseitig leerlaufendes Widerstandsnetzwerk mit n+1 Quer – und n Längswiderständen, alle mit dem gleichen Wert R betrachtet, gezeichnet für n = 2.

Sekundärseitig wird die ideale Spannungsquelle U angeschlossen (rechts).



(Es ist zu erkennen, wie der Querwiderstand links dem R_3 aus der Aufgabe entspricht. Die darüber gesuchte Spannung wird hier mit U_e bezeichnet. Ebenso korrespondiert der Querwiderstand ganz rechts mit dem Aufgabe-R_5.)

Die (beiden Vierpol-) Kettengleichungen sind $\begin{bmatrix} U_e \\ 0\,\text{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0\,\Omega \\ \frac{1}{R} & 1 \end{bmatrix} \cdot \overbrace{\left(\begin{bmatrix} 1 & R \\ 0\,\text{S} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0\,\Omega \\ \frac{1}{R} & 1 \end{bmatrix} \right)^n}^{A_n} \cdot \begin{bmatrix} U \\ -I \end{bmatrix}$.

Die n-te Potenz (des Kettenmatrix-Produktes) kann mit den Fibonacci-Zahlen

$$F_n \ := \ F_{n-1} + F_{n-2} \qquad (F_0 \ := \ 0, \ F_1 \ := 1) \quad \text{(explizit: s. z. B. „Binet-Formel“)}$$

ausgedrückt werden: $\begin{bmatrix} U_e \\ 0\,\text{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0\,\Omega \\ \frac{1}{R} & 1 \end{bmatrix} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} F_{2\cdot n+1} & R\cdot F_{2\cdot n} \\ \frac{1}{R}\cdot F_{2\cdot n} & F_{2\cdot n-1} \end{bmatrix}}^{A_n} \cdot \begin{bmatrix} U \\ -I \end{bmatrix}$ (beweisbar z. B. mittels vollständiger Induktion).

Matrix-Multiplikation ergibt $\begin{bmatrix} U_e \\ 0\,\text{A} \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} \overbrace{F_{2\cdot n+1}}^{a_{11}} & \overbrace{R\cdot F_{2\cdot n}}^{a_{12}} \\ \underbrace{\frac{1}{R}\cdot F_{2\cdot n+2}}_{a_{21}} & \underbrace{F_{2\cdot n+1}}_{a_{22}} \end{bmatrix}}^{A_n} \cdot \begin{bmatrix} U \\ -I \end{bmatrix}$.

Aus der unteren (Strom-) Gleichung $a_{21}\cdot U \ = \ a_{22}\cdot I$ folgt $R \ = \ \frac{F_{2\cdot n+2}}{F_{2\cdot n+1}} \cdot \frac{U}{I}$.

Die erste Gleichung liefert $U_e \ = \ \overbrace{F_{2\cdot n+1}}^{a_{11}}\cdot U \ - \overbrace{R\cdot F_{2\cdot n}}^{a_{12}}\cdot I$, mit R eingesetzt $U_e \ = \ U \cdot \overbrace{\left(F_{2\cdot n+1} \ - \frac{F_{2\cdot n} \cdot F_{2\cdot n+2}}{F_{2\cdot n+1}} \right)}^{\frac{1}{F_{2\cdot n+1}}}$

(wobei beim letzten Schritt die {herleitbare} Identität $1 \ = \ F_{2\cdot n+1}{}^2 \ - \ F_{2\cdot n}\cdot F_{2\cdot n+2}$ angewendet wurde).

Es könnte z. B. noch ein Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \left\{ \frac{R}{\underbrace{R_{ges}}_{\frac{U}{I}}} \right\} \ = \ \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, das $\varphi \ > \ 1$ des Goldenen Schnittes, hergeleitet werden.

Für das von der Aufgabe gegebene n = 2 wird die Kettenmatrix $A_2 \ = \ \begin{bmatrix} 5 & 3\cdot R \\ \frac{1}{R}\cdot 8 & 5 \end{bmatrix}$.

Mit den beiden gegebenen Grössen $U \ = \ 12\,\text{V}$ und $I \ = \ \frac{3}{5}\text{A}$ können die beiden gesuchten Werte

$$R \ = \ \frac{\overbrace{8}^{F_{2\cdot n+2}}}{\underbrace{5}_{F_{2\cdot n+1}}} \cdot \overbrace{20\,\Omega}^{\frac{U}{I}} \ = \ 32\,\Omega \quad \text{und} \quad U_e \ = \ \frac{\overbrace{12\,\text{V}}^{U}}{\underbrace{5}_{F_{2\cdot n+1}}} \ = \ \frac{12}{5}\,\text{V} \quad \text{angegeben werden,}$$

so wie sie zuvor bereits mehrfach publiziert wurden.