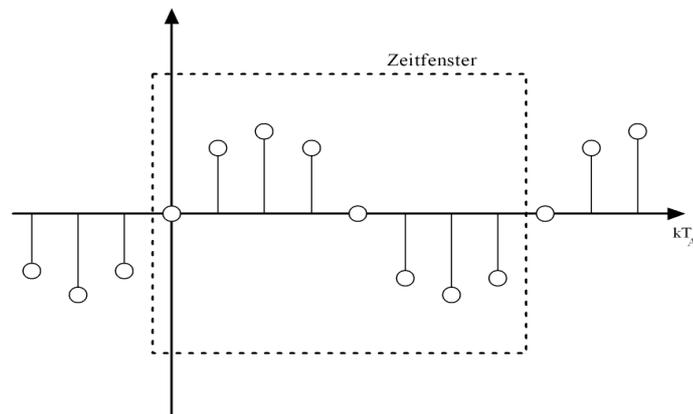


Umsetzung und Implementierung einer FFT für 8-Bit Mikrocontroller der Firma Atmel

1. Theoretischer Ansatz

1.1 Mathematischer Hintergrund



1.1 Periodisches zeitdiskretes Signal mit Abtastfenster

Das gewählte Zeitfenster mit der Periodendauer T_p umfasst die Abtastwerte $n = 0$ bis $(K-1)T_A$ und ist somit KT_A lang. Dabei muss das Fenster für die Berechnung mindestens 2 Abtastwerte enthalten. Des Weiteren gelten folgende Zusammenhänge:

$$\begin{aligned} T_p &= K \cdot T_A \\ T_A &= \frac{T_p}{K} = \frac{1}{f_A} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Der Hintergrund hierfür spiegelt sich auch im Abtasttheorem von Shannon wieder. Dieses besagt, dass man mindestens 2 Abtastwerte benötigt um ein Sinussignal rekonstruieren zu können. Dieses Sinussignal hat dann die Frequenz $f = f_A/2$. Aufgrund der Abtastung ist allerdings das Spektrum bei $f_A/2$ periodisch und man benötigt mindestens 4 Abtastwerte um die Grundschwingung zu errechnen.

$$f_A = \frac{K}{T_p} = K \cdot \Delta f \quad (1.2)$$

Das heißt: Werden im Zeitbereich K Abtastwerte aufgenommen, so ergeben sich, aufgrund der Beziehung (1.2), im Frequenzbereich genau K Spektralwerte mit dem Abstand der diskreten Frequenz Δf . Die Summenformel der diskreten Fouriertransformation lautet wie folgt:

$$DFT : X(i) = \sum_{n=0}^{K-1} x(n) \cdot e^{-j2\pi n \cdot \frac{i}{K}} \quad (1.3)$$

$$IDFT : x(n) = \frac{1}{K} \sum_{i=0}^{K-1} X(i) \cdot e^{j2\pi n \cdot \frac{i}{K}} \quad (1.4)$$

Die Berechnung der DFT mit 8 Abtastwerten soll anhand der nachstehenden Tabelle gezeigt werden. Der Indize i entspricht der Nummerierung der diskreten Frequenz und der Indize n der Nummerierung der Abtastwerte. Laut Summenformel werden alle Spalten einer Zeile aufsummiert um die Komplexe Frequenz $X(ji\Delta f)$ zu erhalten. Als Abtastfolge wird ein Sinussignal mit $f = f_A/8$ angenommen.

$$\{x(nT_A)\} = \left\{ 0; \frac{1}{\sqrt{2}}; 1; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0; -\frac{1}{\sqrt{2}}; -1; -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$$

$i \setminus n$	0	1	2	3	4	5	6	7	$X(ji\Delta f)$
0	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
1	0	$\frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	$e^{-j\frac{\pi}{2}}$	$\frac{e^{-j\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	$e^{-j\frac{\pi}{2}}$	$\frac{e^{-j\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	-4j
2	0	$\frac{e^{-j\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}}$	-1	$-\frac{e^{-j\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{e^{-j\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}}$	1	$\frac{e^{-j\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}}$	0
3	0	$\frac{e^{-j\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	$-e^{-j\frac{\pi}{2}}$	$\frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{e^{-j\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	$-e^{-j\frac{\pi}{2}}$	$\frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	0
4	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
5	0	$-\frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	$e^{-j\frac{\pi}{2}}$	$-\frac{e^{-j\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	$e^{-j\frac{\pi}{2}}$	$-\frac{e^{-j\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	0
6	0	$-\frac{e^{-j\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}}$	-1	$\frac{e^{-j\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{e^{-j\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}}$	1	$-\frac{e^{-j\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}}$	0
7	0	$-\frac{e^{-j\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	$-e^{-j\frac{\pi}{2}}$	$-\frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{e^{-j\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	$-e^{-j\frac{\pi}{2}}$	$-\frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	4j

Tabelle 1.1.1 DFT – Berechnung einer Eingangsfolge

Betrachtet man die in Tabelle 1.1 dargestellten Multiplikationsfaktoren, so fällt auf, dass die Faktoren einer Spektrallinie $X(ji\Delta f)$ sich ständig unter Änderung des Vorzeichens wiederholen. Klammert man diesen aus der Summe aus, reduziert sich die Anzahl der Multiplikationen von 8 auf 4. Diesen Effekt macht man sich bei der Berechnung der *Schnelle Fouriertransformation (FFT)* zu nutzen. Die FFT selbst stellt keine eigenständige Transformationsvorschrift dar, nur einen sehr effektiven Algorithmus zur Lösung der diskreten Fouriertransformation.

Um diese Aussage genauer Prüfen zu können, wird die gleiche Tabelle nur für den Ausdruck $e^{-j2\pi \frac{i}{K}}$ aufgestellt.

$e^{-j2\pi \frac{i}{K}}$		x(0)	x(T _A)	x(2T _A)	x(3T _A)	x(4T _A)	x(5T _A)	x(6T _A)	x(7T _A)
	i \ n	0	1	2	3	4	5	6	7
X(0)	0	1	1	1	1	1	1	1	1
X(jΔf)	1	1	$e^{-j\frac{\pi}{4}}$	$e^{-j\frac{\pi}{2}}$	$e^{-j\frac{3\pi}{4}}$	-1	$-e^{-j\frac{\pi}{4}}$	$-e^{-j\frac{\pi}{2}}$	$-e^{-j\frac{3\pi}{4}}$
X(j2Δf)	2	1	$e^{-j\frac{\pi}{2}}$	-1	$-e^{-j\frac{\pi}{2}}$	1	$e^{-j\frac{\pi}{2}}$	-1	$-e^{-j\frac{\pi}{2}}$
X(j3Δf)	3	1	$e^{-j\frac{3\pi}{4}}$	$-e^{-j\frac{\pi}{2}}$	$e^{-j\frac{\pi}{4}}$	-1	$-e^{-j\frac{3\pi}{4}}$	$e^{-j\frac{\pi}{2}}$	$-e^{-j\frac{\pi}{4}}$
X(j4Δf)	4	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
X(j5Δf)	5	1	$-e^{-j\frac{\pi}{4}}$	$e^{-j\frac{\pi}{2}}$	$-e^{-j\frac{3\pi}{4}}$	-1	$e^{-j\frac{\pi}{4}}$	$-e^{-j\frac{\pi}{2}}$	$e^{-j\frac{3\pi}{4}}$
X(j6Δf)	6	1	$-e^{-j\frac{\pi}{2}}$	-1	$e^{-j\frac{\pi}{2}}$	1	$-e^{-j\frac{\pi}{2}}$	-1	$e^{-j\frac{\pi}{2}}$
X(j7Δf)	7	1	$-e^{-j\frac{3\pi}{4}}$	$-e^{-j\frac{\pi}{2}}$	$-e^{-j\frac{\pi}{4}}$	-1	$e^{-j\frac{3\pi}{4}}$	$e^{-j\frac{\pi}{2}}$	$e^{-j\frac{\pi}{4}}$

Tabelle 1.2 DFT – Berechnung allgemein

Wie schon in Tabelle 1.1 dargestellt, treten einige Faktoren mehrfach auf. Zur weiteren Untersuchung sind die Zeilen markierte, in denen sich das Vorzeichen der Faktoren in einer gemeinsamen Zeile dreht und die Zeilen, bei denen sich das Vorzeichen nicht dreht.

Bsp.:

Zeile X(j3Δf): $x(T_A) \hat{=} x(5T_A) = \varphi = 180^\circ$; $x(2T_A) \hat{=} x(6T_A) = \varphi = 180^\circ$

Zeile X(j6Δf): $x(T_A) \hat{=} x(5T_A) = \varphi = 0^\circ$; $x(2T_A) \hat{=} x(6T_A) = \varphi = 0^\circ$

Für die Spektrallinie X(jΔf) und X(j2Δf) ergeben sich folgende Summenformeln:

$$X(j\Delta f) = [x(0) - x(4T_A)] \cdot 1 + [x(1T_A) - x(5T_A)] \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}} + [x(2T_A) - x(6T_A)] \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} + [x(3T_A) - x(7T_A)] \cdot e^{-j\frac{3\pi}{4}}$$

$$X(j2\Delta f) = [x(0) + x(4T_A)] \cdot 1 + [x(1T_A) + x(5T_A)] \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} + [x(2T_A) + x(6T_A)] \cdot (-1) + [x(3T_A) + x(7T_A)] \cdot \left(-e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)$$

Würde man die Untersuchung stattdessen auf die Spalten beziehen, so kommt man auf das gleiche Resultat. Es ergeben sich daher 2 Wege der Herleitung. Werden die Spalten zum Vereinfachen verwendet, so bleibt die Ausgangsreihenfolge erhalten. Praktischerweise, da alle Eingangsvariablen rein reelle Zahlen sind, wird die zweite Möglichkeit verwendet, da bei dieser die Ausgangsreihenfolge nicht sortiert werden muss. Dies ist vor allem dann wichtig, wenn der Algorithmus auf einen Mikrocontroller oder FPGA umgesetzt werden soll, da hier nur der Realteil sortiert wird.

Zusätzlich zu den Abhängigkeiten in den Zeilen, betrachtet man nun die Abhängigkeit der Spalten. Im Vergleich von Spektrallinie 2 und 6 wird deutlich, dass hier weiter vereinfacht werden kann:

$$X(j2\Delta f) = [x(0) + x(4T_A)] \cdot 1 + [x(1T_A) + x(5T_A)] \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} + [x(2T_A) + x(6T_A)] \cdot (-1) + [x(3T_A) + x(7T_A)] \cdot \left(-e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$X(j6\Delta f) = [x(0) - x(4T_A)] \cdot 1 + [x(1T_A) + x(5T_A)] \cdot \left(-e^{-j\frac{\pi}{2}}\right) + [x(2T_A) + x(6T_A)] \cdot (-1) + [x(3T_A) + x(7T_A)] \cdot \left(e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)$$

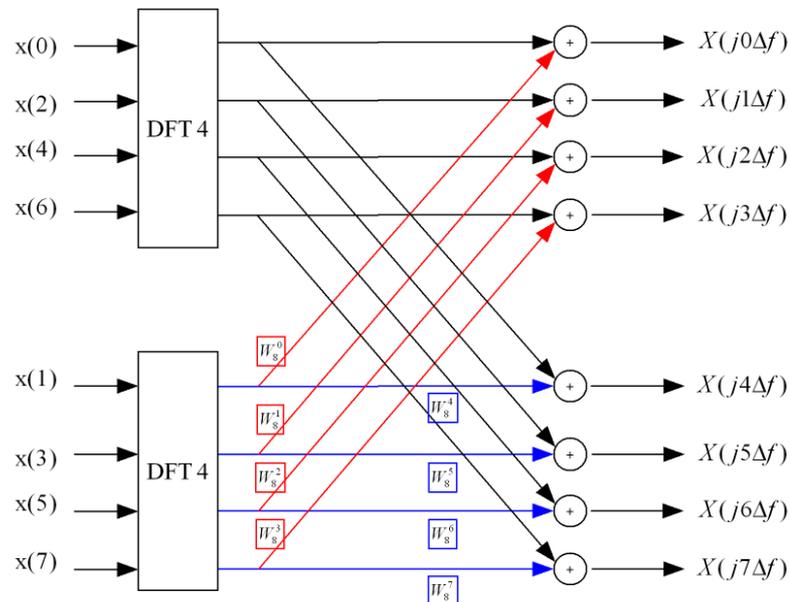
1.2 FFT nach dem RADIX-2 – Verfahren

Wie die Herleitung aus 1.1 ergab, können die Berechnungen von geradem und ungeradem Index vereinfacht werden. Dieses Verfahren wird im RADIX-2 angewendet, in dem die gewünschte DFT in 2 halbe DFT's für gerade und ungerade Indizes getrennt wird. Die entstandene halbe DFT kann anschließend nach dem gleichen Prinzip wieder geteilt werden, bis letztendlich nur noch 2 Werte vorhanden sind. Hierfür ist die zwingende Voraussetzung, dass die Anzahl der Abtastwerte einer Potenz von 2 entspricht.

Für die bessere Übersicht wird der so genannte Twiddle-Faktor definiert:

$$e^{-j2\pi n \frac{i}{K}} = W_K^{ni} \tag{1.5}$$

Wird die DFT bis auf 2 Werte heruntergebrochen, so ergibt sich für den Index der Abtastwerte $n = 0;1$. Der Twiddle-Faktor des Abtastwertes $n = 0$ wird dabei automatisch zu 1. Am Beispiel der DFT-8 sieht Signalfluss der ersten Aufteilung wie folgt aus:



1.2 DFT/2 Aufteilung nach geraden und ungeraden Indizes

Mit diesem Hintergrundwissen, kann man nun recht einfach die Summenformel für gerade und ungerade Indizes aufstellen:

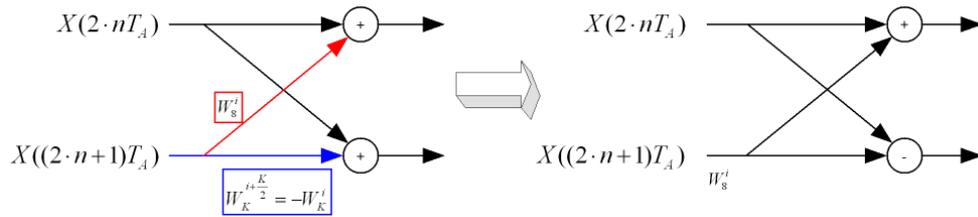
$$X(ji\Delta f) = \sum_{n=0}^{K-1} x(nT_A) \cdot e^{-j2\pi n \cdot \frac{i}{K}}$$

$$X(ji\Delta f) = \sum_{n=0}^{\frac{K}{2}-1} x(2 \cdot nT_A) \cdot e^{-j2\pi \cdot 2n \cdot \frac{i}{K}} + \sum_{n=0}^{\frac{K}{2}-1} x((2 \cdot n + 1)T_A) \cdot e^{-j2\pi \cdot (2n+1) \cdot \frac{i}{K}}$$

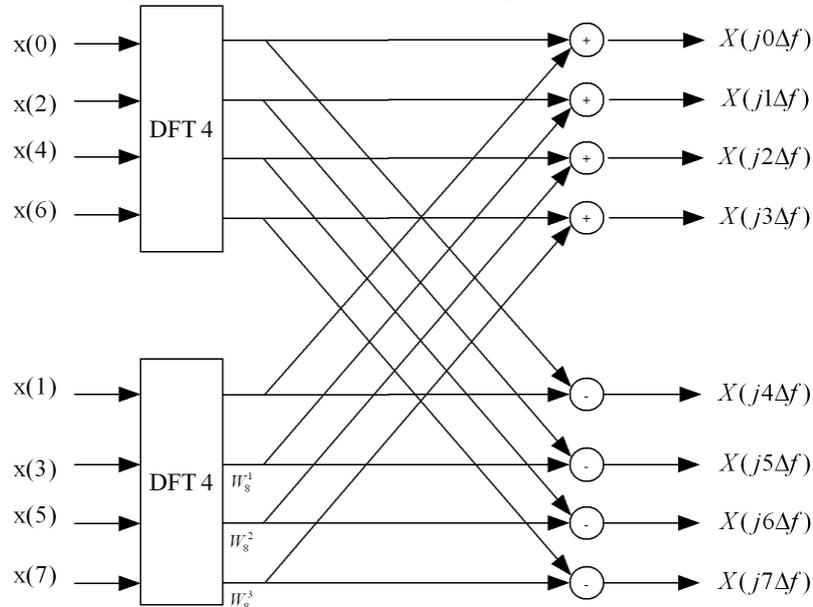
$$X(ji\Delta f) = \sum_{n=0}^{\frac{K}{2}-1} x(2 \cdot nT_A) \cdot e^{-j2\pi n \cdot \frac{i}{K/2}} + e^{-j2\pi \cdot \frac{i}{K}} \cdot \left[\sum_{n=0}^{\frac{K}{2}-1} x((2 \cdot n + 1)T_A) \cdot e^{-j2\pi n \cdot \frac{i}{K/2}} \right]$$

Wie schon in Kapitel 1.1 geschildert, zeigen nicht nur die Spalten Abhängigkeiten, sondern auch die Zeilen. Dies wird nun auch bei der Aufteilung im Signalgraph berücksichtigt. Jedes Pärchen kann dabei wie nachstehend gezeigt vereinfacht werden.

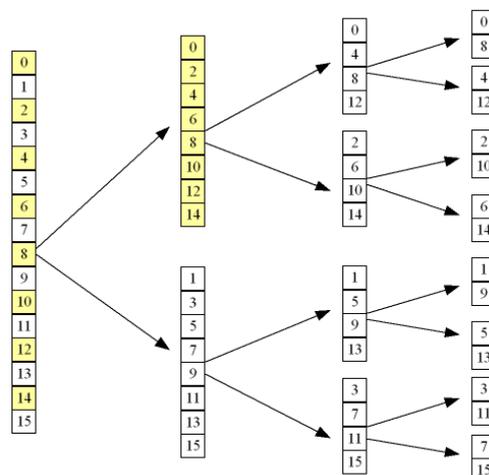
Umsetzung und Implementation einer FFT für 8-Bit Mikrocontroller



Der resultierende Graph sieht anschließend wie folgt aus:



An dieser Stelle müssten nun wieder jede der beiden DFT 4 nach diesem Prinzip aufgeteilt werden. In jeder einzelnen Stufe ergeben sich daher eine unterschiedliche Anzahl von zu verarbeitenden Abtastwerten und somit andere Twiddle-Faktoren. Da das Betragsspektrum allerdings periodisch mit $f_a/2$ ist, muss die letzte Subtraktion für $X(j4\Delta f)$ bis $X(j7\Delta f)$ nicht berechnet werden. Für die Entwicklung eines Algorithmus für einen entsprechenden Mikrocontroller wird mit einer FFT-16 begonnen, da hier 8 Spektrallinien entstehen und sich die Berechnung noch in Grenzen hält. Eine spätere Erweiterung auf höherwertige FFT's ist kein Problem. Nachstehend dargestellt ist die maximale Aufteilung der Abtastwerte bis zu einer DFT-2, durch deren Namen dieses Berechnungsverfahren RADIX-2 gibt.



Butterfly – Graph für FFT 16

