23.5.2.1 Amplitudengang

Den Amplitudengang erhält man mit folgender Gleichung:

$$A(\Omega) = \left|G\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\Omega}\right)\right| \tag{23.40}$$

Da hier der Betrag der Übertragungsfunktion interessiert, kann der Amplitudengang auch mit folgender Überlegung bestimmt werden.

Man zerlegt die Übertragungsfunktion $G(z)$ in ihre M Nullstellen und N Pole, sodass man

$$G(z) = K \cdot \frac{(z-\beta_1)\cdot(z-\beta_2)\cdot\ldots\cdot(z-\beta_M)}{(z-\alpha_1)\cdot(z-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(z-\alpha_N)} \tag{23.41}$$

erhält. Bekanntlich gilt für Komplexe Zahlen z_1 und z_2 die Beziehung

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

sowie

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

sodass

$$|G(z)| = |K| \cdot \frac{|(z-\beta_1)|\cdot|(z-\beta_2)|\cdot\ldots\cdot|(z-\beta_M)|}{|(z-\alpha_1)|\cdot|(z-\alpha_2)|\cdot\ldots\cdot|(z-\alpha_N)|} \tag{23.42}$$

gilt. Setzt man hier nun Gl. 23.37 ein, dann kann $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\Omega}$ als Punkt auf dem komplexen Einheitskreis interpretiert werden; die Differenzen $z-\beta_i$ bzw. $z-\alpha_k$ können dann als Abstände der Nullstellen bzw. Pole von $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\Omega}$ interpretiert werden, wie dies in Abb. 23.1 in Teilbild (a) verdeutlicht wird.

Hieraus wird folgendes klar:

- Pole und Nullstellen im Ursprung beeinflussen den Amplitudengang des Systems nicht, da sie immer gleich weit vom Einheitskreis entfernt sind.
- Je näher ein Pol am Einheitskreis liegt, desto grösser wird die Amplitude, wenn $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\Omega}$ in die Nähe dieses Poles kommt.
- Je näher eine Nullstelle am Einheitskreis liegt, desto kleiner wird die Amplitude, wenn $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\Omega}$ in die Nähe dieser Nullstelle kommt.
- Liegt eine Nullstelle genau *auf* dem Einheitskreis, dann wird die Amplitude zu 0, wenn $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\Omega}$ auf der Nullstelle zu liegen kommt.

23.5.2.2 Phasengang

Den Phasengang eines Systems erhält man wie folgt:

$$\varphi(\Omega) = \operatorname{arc} G\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\Omega}\right) \tag{23.43}$$

Auch hier kann die Übertragungsfunktion wieder in ihre Pole und Nullstellen zerlegt werden (Gl. 23.41). Da für den Arcus zweier komplexer Zahlen z_1 und z_2

$$\operatorname{arc}\frac{z_1}{z_2} = \operatorname{arc} z_1 - \operatorname{arc} z_2$$

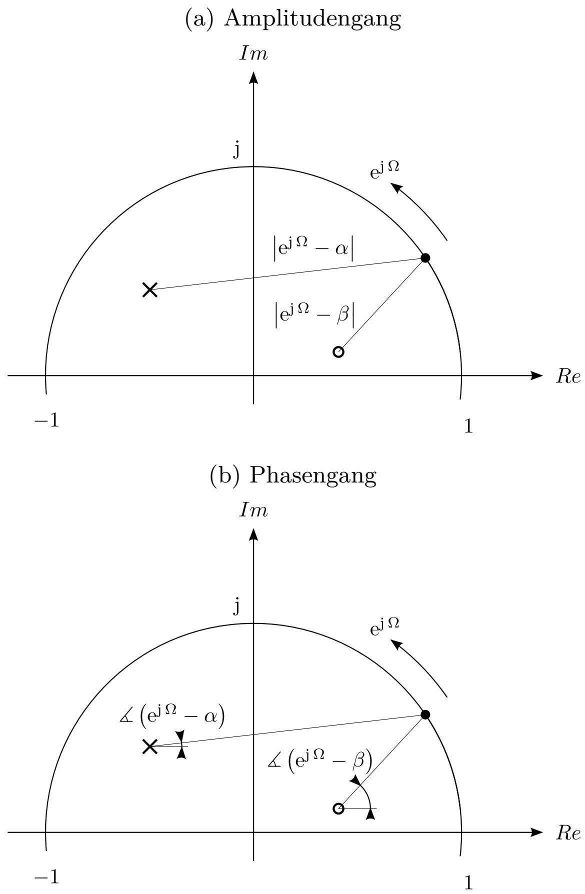

Abb. 23.1. Einfluss der Pole und Nullstellen auf den Amplitudengang

und

$$\operatorname{arc}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{arc} z_1 + \operatorname{arc} z_2$$

gilt, erhält man

$$\operatorname{arc} G(z) = \operatorname{arc}(z - \beta_1) + \operatorname{arc}(z - \beta_2) + \ldots + \operatorname{arc}(z - \beta_M) - \operatorname{arc}(z - \alpha_1) - \operatorname{arc}(z - \alpha_2) - \ldots - \operatorname{arc}(z - \alpha_N) \tag{23.44}$$

bzw.

$$\operatorname{arc} G(z) = \sum_{m=1}^{M} \operatorname{arc}(z - \beta_m) - \sum_{n=1}^{N} \operatorname{arc}(z - \alpha_n) \tag{23.45}$$

Wenn nun Gl. 23.37 wieder eingesetzt wird, erkennt man: der Phasengang ist die Summe der Winkel, deen Scheitel die Pole bzw. Nullstellen sind und die durch die reelle Achse und den Punkt $e^{j\Omega}$ auf dem Einheitskreis begrenzt werden. Der Sachverhalt wird aus Abb. 23.1 Teilbild (b) ersichtlich.

23.6 Diskretisierung einer Übertragungsfunktion

Oft hat man die Übertragungsfunktion einer Regelstrecke oder eines Filters in kontinuierlicher Form als Laplace-Transformierte gegeben. Zur Implementierung eines entsprechenden Algorithmus muss diese Übertragungsfunktion dann noch diskretisiert werden. Das Problem besteht also im Wesentlichen darin, zu einer gegebenen Laplace-Transformierten eine entsprechende z-Transformierte zu finden, so dass sich bei der Rücktransformation ähnliche Kurven ergeben.

23.6.1 Modifizierte z-Transformation

Um aus der Laplace-Transformierten die z-Transformierte einer äquivalenten Strecke zu berechnen, geht man wie folgt vor. Gegeben sei eine kontinuierliche Übertragungsfunktion $G(s)$ in der Form

$$G(s) = K \cdot \frac{\prod_{m=1}^{M} (s - \beta_m)}{\prod_{n=1}^{N} (s - \alpha_n)} = K \cdot \frac{(s - \beta_1) \cdot (s - \beta_2) \cdot \ldots \cdot (s - \beta_M)}{(s - \alpha_1) \cdot (s - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (s - \alpha_N)}$$

dann sind die Nullstellen die β_m und die Polstellen die α_n, K ist ein konstanter Vorfaktor. Um die z-Transformierte der diskreten Übertragungsfunktion zu erhalten, werden nun alle Pole und Nullstellen mit der Beziehung $z = \mathrm{e}^{s\,T}$ umgesetzt, wobei für s nacheinander die β_m und die α_n eingesetzt werden. Der Parameter T ist die Abtastperiode.

Das Resultat dieser Transformation ist eine Übertragungsfunktion der Form

$$G(z) = \frac{\prod_{m=1}^{M} \left(z - \mathrm{e}^{\beta_m T}\right)}{\prod_{n=1}^{N} \left(z - \mathrm{e}^{\alpha_n T}\right)} = K' \cdot \frac{\left(z - \mathrm{e}^{\beta_1 T}\right) \cdot \left(z - \mathrm{e}^{\beta_2 T}\right) \cdot \ldots \cdot \left(z - \mathrm{e}^{\beta_M T}\right)}{\left(z - \mathrm{e}^{\alpha_1 T}\right) \cdot \left(z - \mathrm{e}^{\alpha_2 T}\right) \cdot \ldots \cdot \left(z - \mathrm{e}^{\alpha_N T}\right)}$$

wo noch der Verstärkungsfaktor K' unbekannt ist. Dieser kann z.B. durch Vergleich bei einer charakteristischen Frequenz bestimmt werden oder durch Vergleich der Endwerte von $G(s)$ bzw. $G(z)$.

Beispiel 171
Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.8\,s + 1}$$

deren zeitdiskretes Äquivalent gesucht wird. Die Abtastperiode sei $T = 0.1\,\mathrm{s}$. Zuerst müssen die Pole bestimmt werden. Die Gleichung lautet

$$s^2 + 0.8\,s + 1 = 0$$

und hat die Lösungen

$$s_1 = -0.40000 + 0.91652\,\mathrm{j}$$
$$s_2 = -0.40000 - 0.91652\,\mathrm{j}$$

Die z-Übertragungsfunktion muss somit die Pole

$$\begin{aligned} e^{s_1 T} &= 0.956757 + 0.087935\,j \\ e^{s_2 T} &= 0.956757 - 0.087935\,j \end{aligned}$$

haben und wird damit

$$G(z) = \frac{K'}{(z - 0.956757 - 0.087935\,j) \cdot (z - 0.956757 + 0.087935\,j)} = \frac{K'}{z^2 - 1.91351\,z + 0.92312}$$

und jetzt muss nur noch die Verstärkung K' bestimmt werden.

Dazu kann beispielsweise der Endwert der Sprungantwort berechnet werden. Bei der gegebenen Übertragungsfunktion ist dieser

$$\lim_{s \to 0} \frac{1}{s^2 + 0.8\,s + 1} = 1$$

und bei der diskretisierten Übertragungsfunktion muss er gleich sein. Er lautet:

$$\lim_{z \to 1} \frac{K'}{z^2 - 1.91351\,z + 0.92312} = \frac{K'}{0.0096025} \stackrel{!}{=} 1$$

und somit muss $K' = 0.0096025$ sein.

Somit lautet die gesamte diskretisierte Übertragungsfunktion:

$$G(z) = \frac{0.0096025}{z^2 - 1.91351\,z + 0.92312}$$

Die Sprungantwort der beiden Übertragungsfunktionen ist in Abb. 23.2 dargestellt. □

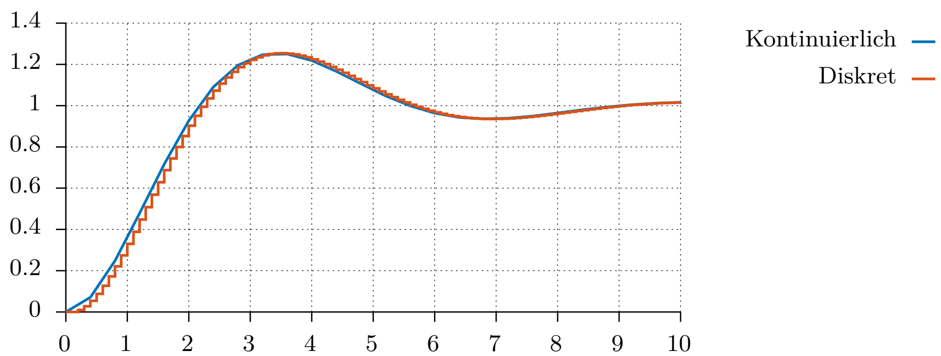

Abb. 23.2. Sprungantwort der kontinuierlichen und der diskretisierten Übertragungsfunktion unter Verwendung der Matched z-Transformation

23.6.2 Bilineare Transformation

Die bilineare Transformation wird auch als Möbius-Transformation bezeichnet. Die bilineare Transformation transformiert eindeutig alle Punkte der komplexen s-Ebene in die

z-Ebene. Es handelt sich hierbei um eine sogenannte konforme Abbildung, das heisst, das Winkel bei der Transformation erhalten bleiben. Eine Gerade in der s-Ebene wird dabei auf einen Kreis in der z-Ebene abgebildet.

Die bilineare Transformation wird mittels der Rechenvorschrift

$$s = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1} \tag{23.46}$$

durchgeführt. Hierbei ist T wieder die Abtastperiode. Auf die Herleitung dieser Beziehung im Detail wird an dieser Stelle verzichtet. Es sei jedoch folgendes erwähnt: ähnlich wie bei der Matched z-Transformation wird $z = \mathrm{e}^{s\,T}$ gesetzt. Hieraus folgt: $s = \frac{1}{T} \ln z$. Anschliessend wird noch eine Reihenentwicklung für den natürlichen Logarithmus vorgenommen (sog. Laurent-Reihen-Entwicklung) und durch Abbrechen der Reihe nach dem ersten Glied erhält man die Beziehung in Gl. 23.46.

Beispiel 172
Gegeben sei die kontinuierliche Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{2}{2\,s^2 + s + 1}$$

und gesucht wird die diskrete Variante.

Mit Hilfe der bilinearen Transformation erhält man durch Einsetzen von Gl. 23.46 in die kontinuierliche Übertragungsfunktion:

$$G(z) = \frac{\left(2\,z^2 + 4\,z + 2\right)\,T^2}{\left(z^2 + 2\,z + 1\right)\,T^2 + \left(2\,z^2 - 2\right)\,T + 8\,z^2 - 16\,z + 8}$$

Die Abtastperiode sei nun $T = 0.2$ und damit ergibt sich

$$G(z) = \frac{0.08\,z^2 + 0.16\,z + 0.08}{0.04\,z^2 + 0.08\,z + 0.04 + 0.4\,z^2 - 0.4 + 8\,z^2 - 16\,z + 8} = \frac{0.08\,z^2 + 0.16\,z + 0.08}{8.44\,z^2 - 15.92\,z + 7.64}$$

Die Sprungantwort der beiden Übertragungsfunktionen ist in Abb. 23.3 dargestellt. □

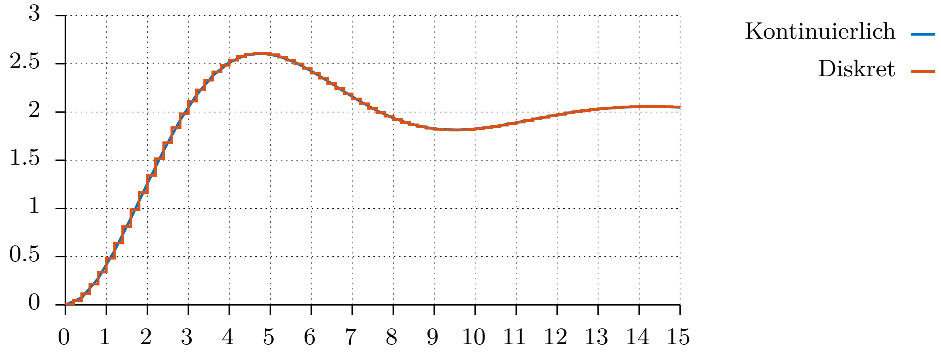

Abb. 23.3. Sprungantwort der kontinuierlichen und der diskretisierten Übertragungsfunktion unter Verwendung der bilinearen Transformation

23.6.3 Impulsinvariante Transfomation

Die Idee hinter der Impulsinvarianten Transformation ist, die Impulsantwort des analogen Systems abzutasten und so eine diskretisierte Impulsantwort zu erhalten. Die Beziehung lautet:

$$H(z) = T \cdot \mathscr{Z}\left\{\mathscr{L}^{-1}\left\{G(s)\right\}\Big|_{t=k\,T}\right\} \tag{23.47}$$

Zuerst wird mit der inversen Laplace-Transformation die Impulsantwort berechnet, welche dann mit $t = k\,T$ abgetastet wird. Anschliessend wird die abgetastete Impulsantwort mit der z-Transformation in den z-Bereich überführt.

Ein ähnliches Verfahren kann auch mit der Sprungantwort durchgeführt werden:

$$H(z) = \left(1 - z^{-1}\right) \cdot \mathscr{Z}\left\{\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}\Bigg|_{t=k\,T}\right\} \tag{23.48}$$

Der Grund für diesen im Gegensatz zur bilinearen Transformation bzw. zur Matched z-Transformation aufwendigen Ansatz lässt sich wie folgt herleiten. Das Halteglied kann mit einer Übertragungsfunktion der Form

$$G_{\mathrm{ZOH}}(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}\,\mathrm{e}^{-s\,T}$$

dargestellt werden (ZOH = *zero order hold*). Die Totzeit $\mathrm{e}^{-s\,T}$ kann durch z^{-1} dargestellt werden, sodass man für $G_{\mathrm{ZOH}}(s)$ folgende Mischung aus z-Transformierter und Laplace-Transformierter erhält:

$$G_{\mathrm{ZOH}}(s) = \left(1 - z^{-1}\right) \cdot \frac{1}{s}$$

Daher muss die zu diskretisierende Strecke $G(s)$ noch mit $\frac{1}{s}$ multipliziert werden. Der Term $1 - z^{-1}$ kommt dann zur z-Transformierten noch als Vorfaktor hinzu.

Abb. 23.4 zeigt einen Vergleich der kontinuierlichen Funktion und der mittels Halteglied diskretisierten Funktion. Die kontinuierliche Übertragungsfunktion lautet

$$G(s) = \frac{1.5}{s^2 + 0.6\,s + 1}$$

woraus man mit der Abtastperiode $T = 0.1\,\mathrm{s}$ die z-Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{0.007346\,z + 0.007201}{z^2 - 1.932\,z + 0.9418}$$

erhält.

Beispiel 173
Gegeben sei das System

$$G(s) = \frac{4}{s^2 + 2\,s}$$

Die Partialbruchzerlegung von $\frac{G(s)}{s}$ lautet dann

$$\frac{G(s)}{s} = \frac{2}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+2}$$

woraus man mit Hilfe der (einseitigen) inversen Laplace-Transformation

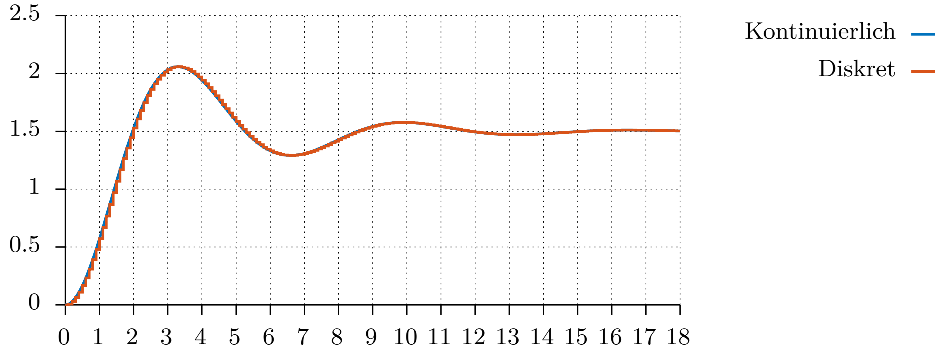

Abb. 23.4. Sprungantwort eines kontinuierlichen Systems und der mit Halteglied diskretisierten Variante

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s+2}\right\}=2\,t-1+\mathrm{e}^{-2\,t}$$

erhält. Mit der Substitution $t \mapsto k\,T$ erhält man nun

$$2\,k\,T-1+\mathrm{e}^{-2\,k\,T}$$

was nun noch z-transformiert werden muss. Man erhält:

$$\mathscr{Z}\left\{2\,k\,T-1+\mathrm{e}^{-2\,k\,T}\right\}=\frac{2\,T\,z}{(z-1)^2}-\frac{z}{z-1}+\frac{z}{z-\mathrm{e}^{-2\,T}}$$

Gemäss Gl. 23.48 muss dies noch mit $\left(1-z^{-1}\right)$ multipliziert werden, womit man das Endresultat

$$H(z)=\frac{z\cdot\left(2\,T\,\mathrm{e}^{2\,T}-\mathrm{e}^{2\,T}+1\right)+\mathrm{e}^{2\,T}-2\,T-1}{z^2\,\mathrm{e}^{2\,T}-z\,\mathrm{e}^{2\,T}-z+1}$$

erhält. □