Universität zu Lübeck
Institut für Signalverarbeitung
Professor Dr.-Ing. Alfred Mertins

WS2015/2016
Termin 21.03.2016

Name: ....

Matrikelnummer: ....

1	
2	
3	
4	
5	

Klausur Signalverarbeitung

Aufgabe 1 (20 Punkte)
Ein zeitdiskretes LTI-System besitze die Übertragungsfunktion

$$H(z) = 1 + 6z^{-1} + 11z^{-2} + 6z^{-3}.$$

a) Bestimmen Sie die Impulsantwort $h(n)$.

b) Bestimmen Sie die Differenzengleichung, die den Zusammenhang zwischen dem Eingangssignal $x[n]$ und dem Ausgangssignal $y[n]$ herstellt.

c) Bestimmen Sie die Pole und Nullstellen des Systems und zeichnen Sie ein Pol-Nullstellen-Diagramm. Hinweis: Eine der Nullstellen liegt bei $z = -1$.

d) Finden Sie die Übertragungsfunktionen $H_1(z)$ und $H_2(z)$ zweier FIR-Filter mit wenigstens zwei von null verschiedenen Koeffizienten, die die Bedingung $H_1(z)H_2(z) = H(z)$ erfüllen.

e) Finden Sie ein Eingangssignal $x(n) \not\equiv 0$, für das das Ausgangssignal $y(n)$ für alle n zu null wird. Hinweis: Mit $x(n) \not\equiv 0$ ist gemeint, dass $x(n)$ auch Werte enthalten muss, die ungleich null sind.

Aufgabe 2 (20 Punkte)
Ein System erster Ordnung mit der Übertragungsfunktion $H(z)$ besitze einen Pol bei $z = \frac{1}{2}$ und eine Nullstelle bei $z = 2$. Der Verstärkungsfaktor des Systems sei durch

$$\lim_{z\to\infty} H(z) = 2$$

spezifiziert.

a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $H(z)$.

b) Geben Sie an, ob das System BIBO-Stabil ist.

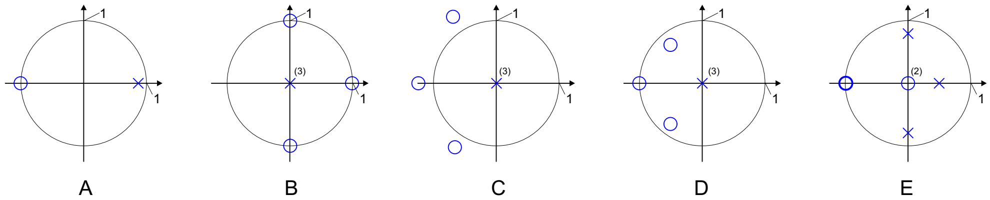
c) Bestimmen Sie die Impulsantwort des Systems.

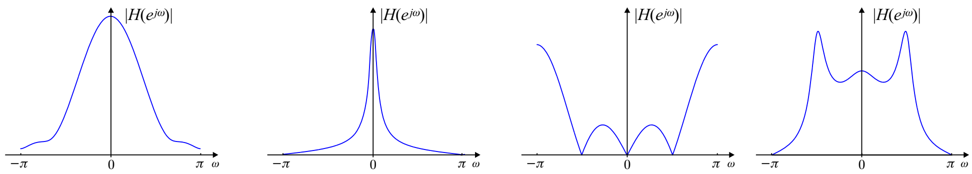
d) Bestimmen Sie den Frequenzgang des Systems nach Betrag und Phase.

e) Besitzt das System $H(z)$ ein stabiles inverses System?

Aufgabe 3 (20 Punkte)

a) Gegeben seien folgende Pol-Nullstellen-Diagramme und Betragsfrequenzgänge diskreter Systeme. Ordnen Sie den vier Betragsfrequenzgängen jeweils eines der fünf Pol-Nullstellen-Diagramme zu. (8 Punkte)





☐ ☐ ☐ ☐

b) Gesucht sind die gerade- und ungerade-symmetrischen Anteile der Folge

$$x(n) = 4\delta(n) + 2\delta(n-2).$$

Zur Auswahl stehen die Folgen

$x_1(n) = 4\delta(n) + 2\delta(n-2)$, $\quad x_2(n) = 4\delta(n) + \delta(n-2) + \delta(n+2)$

$x_3(n) = 2\delta(-n) + 2\delta(n)$, $\quad x_4(n) = 2\delta(n) + \delta(n-2) + \delta(n+2)$

$x_5(n) = \delta(n-2) - \delta(n+2)$, $\quad x_6(n) = 2\delta(n) + \delta(n-2) - \delta(n+2)$

Kreuzen Sie die richtigen Antworten an (6 Punkte):

gerader Anteil	ungerader Anteil
☐ $x_g(n) = x_1(n)$	☐ $x_u(n) = x_1(n)$
☐ $x_g(n) = x_2(n)$	☐ $x_u(n) = x_2(n)$
☐ $x_g(n) = x_3(n)$	☐ $x_u(n) = x_3(n)$
☐ $x_g(n) = x_4(n)$	☐ $x_u(n) = x_4(n)$
☐ $x_g(n) = x_5(n)$	☐ $x_u(n) = x_5(n)$
☐ $x_g(n) = x_6(n)$	☐ $x_u(n) = x_6(n)$

c) Kreuzen Sie die richtigen Antworten an (6 Punkte):

1. Ein zeitkontinuierliches LTI-System mit der Übertragungsfunktion $H(\omega) = 1 - \mathrm{rect}(\omega)$ ist ein

   ☐ Tiefpass; ☐ Hochpass; ☐ Allpass; ☐ Differenzierer; ☐ Integrierer.

2. Ein zeitkontinuierliches LTI-System mit der Übertragungsfunktion $H(\omega) = \mathrm{tri}(\omega/4)$ antwortet auf das Eingangssignal $x(t) = \cos(2t) + \sin(8t)$ mit dem Ausgangssignal

   ☐ $\cos(2t)$; ☐ $\frac{1}{2}\cos(2t)$; ☐ $\frac{\pi}{2}\cos(2t)$; ☐ $\frac{3}{4}\cos(2t) + \frac{1}{4}\cos(8t)$.

Aufgabe 4 (20 Punkte)
Ein zeitkontinuierliches LTI-System besitze die Impulsantwort

$$h(t) = \text{rect}\left(\frac{t-1}{2}\right) + \text{rect}\left(t - \frac{1}{2}\right).$$

a) Zeichnen Sie die Impulsantwort.
b) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $H(\omega)$.
c) Geben Sie an, ob die Impulsantwort bandbegrenzt ist und nennen Sie ggf. die maximale Frequenz.
d) Das System werde mit dem Signal

$$x(t) = 1 + \cos(\pi t) + \cos(2\pi t)$$

angeregt. Bestimmen Sie das Ausgangssignal des Systems.

Aufgabe 5 (20 Punkte)
Das Signal

$$x(t) = \text{si}(400\pi t)$$

werde zu äquidistanten Zeitpunkten abgetastet. Hinweis: Verwechseln Sie nicht „si“ mit „sin“ .

a) Geben Sie die nach dem Abtasttheorem zulässige minimale Abtastfrequenz an.

b) Zeichnen Sie das Spektrum des ideal abgetasteten Signals

$$x_d(t) = x(t)\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta_0(t - nT)$$

über drei Perioden für den Fall, dass die Abtastfrequenz doppelt so hoch gewählt ist, wie es nach dem Abtasttheorem notwendig wäre.

c) Zeichnen Sie das Spektrum des ideal abgetasteten Signals über drei Perioden für den Fall, dass die gewählte Abtastfrequenz nur $2/3$ der nach dem Abtasttheorem notwendigen Abtastfrequenz beträgt.

d) Aus den unter c) gewonnenen Abtastwerten werde (wie üblich) durch eine Tiefpassfilterung mit Bandbegrenzung auf die halbe Abtastfrequenz ein zeitkontinuierliches Signal rekonstruiert. Die Übertragungsfunktion des Rekonstruktionstiefpasses sei

$$H(\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right).$$

Zeichnen Sie das Spektrum des rekonstruierten Signals.

e) Geben Sie das nach d) rekonstruierte Signal an.

Hinweis: Bedenken Sie, dass das o. g. Signal $x_d(t)$ das *ideal abgetastete Signal* heißt, auch wenn dabei das Abtasttheorem nicht eingehalten wird oder sogar überabgetastet wird. Das Wort „ideal“ bezieht sich nicht auf die Abtastrate, sondern darauf, dass der Funktion $x(t)$ in unverfälschter Weise die Augenblickswerte $x(nT)$ entnommen werden.