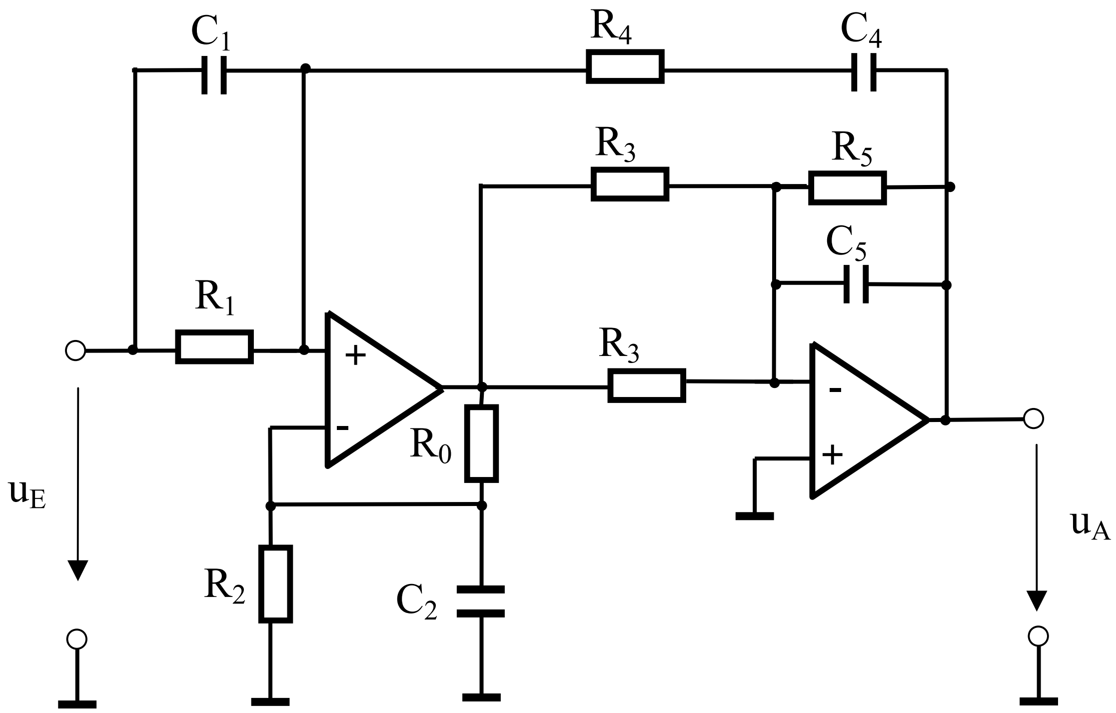
Aufgabe 1: (Modellbildung) **(24 Punkte)**

Gegeben sei folgende Operationsverstärkerschaltung:



Die Operationsverstärker werden als ideal vorausgesetzt, d. h. der Ausgangswiderstand sei vernachlässigbar klein und sowohl der Eingangswiderstand als auch der Verstärkungsfaktor seien unendlich groß.

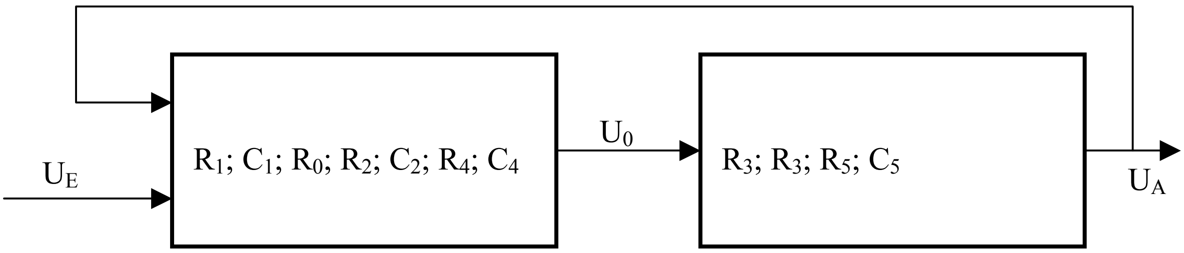
a) Geben Sie zu der obigen Schaltung zunächst einen Wirkungsplan mit 2 Blöcken an. Verfeinern Sie diesen Wirkungsplan anschließend soweit, dass Sie die Zusammenhänge in den einzelnen Blöcken mathematisch gut beschreiben können.

b) Geben Sie eine mathematische Beschreibung für das Verhalten jedes einzelnen Blockes an.

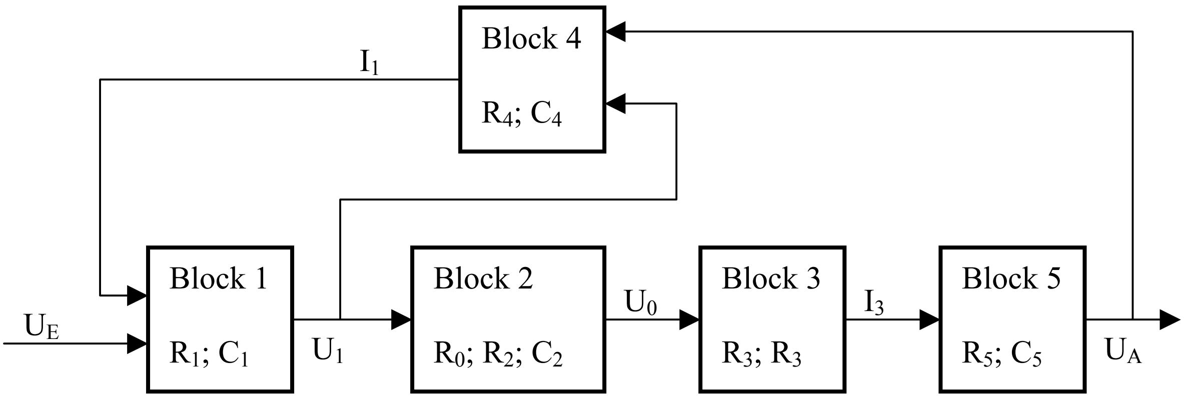
c) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $R(s) = U_A(s)/U_E(s)$?

Lösung zur Aufgabe 1:

a) Wirkungsplan mit 2 Blöcken:



Verfeinerung:



b) mathematische Beschreibung der Blöcke:

Block 1: $U_1 = U_E - Z_1 I_1 = U_E - \frac{R_1}{1+s\tau_1} I_1 \text{ mit } \tau_1 = R_1 C_1$

Block 2: $U_0 = \frac{R_0 + Z_2}{Z_0} U_1 = \left(1 + \frac{R_0}{Z_2}\right) U_1 = \left(1 + \frac{R_0(1+s\tau_2)}{R_2}\right) U_1 = \text{ mit } \tau_2 = R_2 C_2$

$$U_0 = \frac{R_0 + R_2}{R_2}\left(1 + s\tau_{20}\right) U_1 \quad \text{mit } \tau_{20} = \frac{R_0}{R_0 + R_2}\tau_2$$

Block 3: $I_3 = \frac{2}{R_3} U_0$

Block 4: $I_1 = \frac{1}{Z_4}\left(U_1 - U_A\right) = \frac{sC_4}{\left(1+s\tau_4\right)}\left(U_1 - U_A\right) \text{ mit } \tau_4 = R_4 C_4$

Block 5: $U_A = -\frac{R_5}{1+s\tau_5} I_3 \text{ mit } \tau_5 = R_5 C_5$

c) Übertragungsfunktion:

Zusammenfassung der Blöcke 1 und 4 ergibt:

$$U_1 = U_E - \frac{s\tau_{14}}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_4)}(U_1 - U_A) \quad \text{mit } \tau_{14} = R_1C_4$$

$$U_1 = \underbrace{\frac{(1+s\tau_1)(1+s\tau_4)}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_4)+s\tau_{14}}}_{G_1 = \frac{A_1}{N}} U_E + \underbrace{\frac{s\tau_{14}}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_4)+s\tau_{14}}}_{G_2 = \frac{A_2}{N}} U_A \tag{1.1}$$

Zusammenfassung der Blöcke 2, 3 und 5 ergibt:

$$U_A = \underbrace{-\frac{R_5}{(1+s\tau_5)}\frac{2}{R_3}\frac{(R_0+R_2)}{R_2}(1+s\tau_{20})}_{G_3 = \frac{A_3}{N_3}} U_1 \tag{1.2}$$

Mit den Abkürzungen G_1, G_2 und G_3 erhält man aus den Gleichungen (1.1) und (1.2):

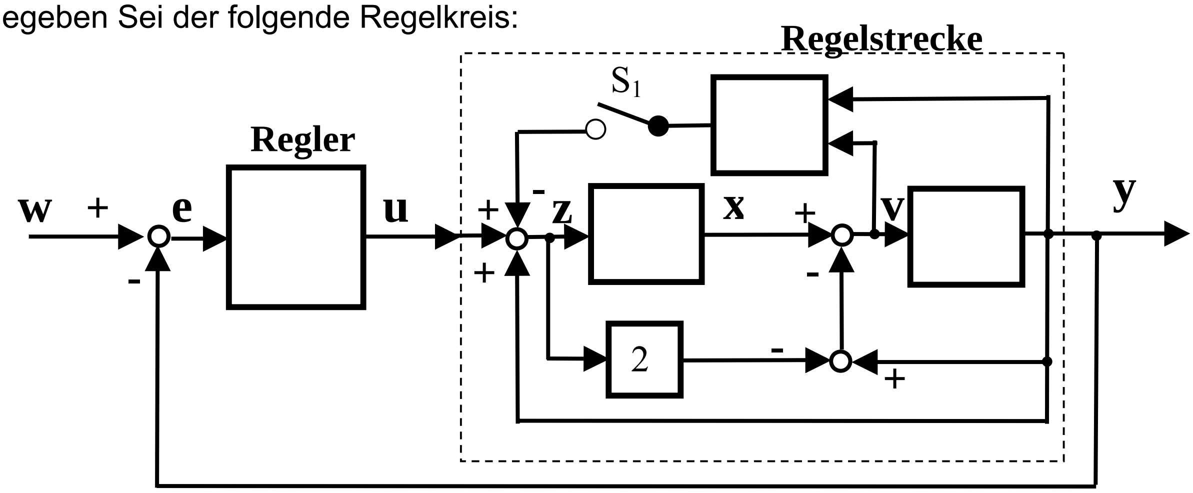
$$U_A = G_3\,[G_1U_E + G_2U_A] \quad \Rightarrow U_A = \frac{G_3G_1}{(1+G_3G_2)}U_E = \frac{A_3A_1}{(N_3N + A_3A_2)}U_E$$

Daraus ergibt sich schließlich:

$$U_A = -\frac{2R_5(R_0+R_2)(1+s\tau_{20})(1+s\tau_1)(1+s\tau_4)}{\underbrace{R_2R_3(1+s\tau_5)[(1+s\tau_1)(1+s\tau_4)+s\tau}\,] - 2R_5(R_0+R_2)(1+s\tau_{20})s\tau_{14}}U_E$$

Aufgabe 2: (Dgl, Regleranpassung) (29 Punkte)

Gegeben Sei der folgende Regelkreis:



Regler: $\dot{u}(t) + a_0\, u(t) = b_1 \dot{e}(t) + b_0\, e(t)$

Neben dem obigen Strukturbild der Regelstrecke ist der Zusammenhang zwischen den Größen y, x, v und z bekannt:

$$\dot{y}(t) - 2y(t) = v(t)$$

$$\dot{x}(t) = \dot{z}(t) - 2z(t)$$

a) Geben Sie die DGl für das dynamische Verhalten der Regelstrecke mit der Eingangsgröße u(t) und der Ausgangsgröße y(t) bei geöffnetem Schalter S_1 an. Ist die Regelstrecke stabil im Sinne des asymptotischen Abklingens aller Eigenbewegungen ? (Begründung)

b) Nach dem Schließen des Schalters S_1 lautet die Übertragungsfunktion der Regelstrecke: $G(s) = (6s + 4)/(s^2 - 2s)$. Geben Sie die Führungsübertragungsfunktion $T(s) = Y(s)/W(s)$ des geschlossenen Regelkreises in Abhängigkeit von den Regler-Parametern b_0 , b_1 und a_0 des Reglers an.

c) Kann man mit den Parametern b_0 , b_1 und a_0 des Reglers jedes beliebige dynamische Verhalten des geschlossenen Regelkreises einstellen? (Begründung)

d) Bestimmen Sie die Parameter b_0 , b_1 und a_0 des Reglers so, dass alle Nullstellen des charakteristischen Polynoms einen Realteil von -1 haben. Wenn möglich, sollten konjugiert komplexe Nullstellen, bei denen der Imaginärteil betragsmäßig gleich dem Realteil ist, gewählt werden.

e) Berechnen und skizzieren Sie den Verlauf der Ausgangsgröße y(t) des Regelkreises für einen Führungssprung bei Erregung aus der Ruhelage.

Lösung zur Aufgabe 2:

a) aus der Zeichnung entnimmt man:

$v = x - y + 2z$

$z = u + y$

Zusammen mit den angegebenen Dglen erhält man :

$$\dot{y} - 2y = x - y + 2(u + y)$$
$$\dot{x} = \dot{u} + \dot{y} - 2(u + y)$$

Daraus ergibt sich :

$$\ddot{y} - 3\dot{y} = \dot{u} + \dot{y} - 2(u + y) + 2\dot{u}$$

und schließlich :

$$\ddot{y} - 4\dot{y} + 2y = 3\dot{u} - 2u$$

Die Regelstrecke ist nicht stabil im Sinne des asymptotischen Abklingens aller Eigenbewegungen, weil nicht alle Koeffizienten des charakteristischen Polynoms das gleiche Vorzeichen haben.

zu b) Die Übertragungsfunktion des Reglers lautet:

$$H(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s + a_0}$$

Für die Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises gilt:

T(s) = G(s)H(s)/(1 + G(s)H(s)

Einsetzen ergibt:

$$T(s) = \frac{(b_1 s + b_0)(6s + 4)}{(s + a_0)(s^2 - 2s) + (b_1 s + b_0)(6s + 4)}$$

zu c)

Das dynamische Verhalten wird durch die Nullstellen des charakteristischen Polynoms bestimmt. Bei dem vorliegenden System 3. Ordnung müssten 3 Nullstellen λ_1, λ_2, λ_3 beliebig vorgebbar sein. Damit erhielte man folgendes Nennerpolynom:

$N_W(s) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2)(s - \lambda_2) = s^3 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)s^2 + (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3)s - \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$

Durch Vergleich mit dem Nennerpolynom

$N(s) = s^3 + (a_0 + 6b_1 – 2)s^2 + (4b_1 + 6b_0 – 2a_0)s + 4b_0$

der Führungsübertragungsfunktion erhält man die folgenden 3 Bestimmungs-gleichungen:

$$a_0 + 6b_1 – 2 = – (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$$

$$4b_1 + 6b_0 – 2a_0 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3$$

$$4b_0 = – \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

Wie man sieht, gibt es keine Zwangsbedingungen für die Nullstellen. Deshalb lässt sich mit den Parametern a_0, b_1 und b_0 jede beliebige Dynamik einstellen.

zu d)

$\lambda_1 = –1$
$\lambda_{2/3} = –1 \pm j$

Damit lautet das Gleichungssystem:

$$\left.\begin{array}{l} a_0 + 6b_1 – 2 = 3 \\ 4b_1 + 6b_0 – 2a_0 = 4 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} a_0 + 6b_1 = 5 \\ –2a_0 + 4b_1 = 1 \end{array}\right\} \quad 16b_1 = 11 \Rightarrow b_1 = \frac{11}{16}$$

$$a_0 = \frac{7}{8}$$

$$4b_0 = 2 \Rightarrow b_0 = 0{,}5$$

zu e)

Es gilt $Y(s) = T(s)\, W(s)$

Mit $W(s) = 1/s$ erhält man:

$$Y(s) = \frac{\left(\frac{11}{16}s + \frac{1}{2}\right)(6s+4)}{(s+1)(s+1+j)(s+1-j)s} = \frac{\frac{33}{8}s^2 + \frac{23}{4}s + 2}{(s+1)(s+1+j)(s+1-j)s}$$

Partialbruchzerlegung:

$$Y(s) = \frac{\frac{33}{8}s^2 + \frac{23}{4}s + 2}{(s+1)(s+1+j)(s+1-j)s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{Cs+D}{s^2+2s+2}$$

Daraus erhält man:

$$\frac{33}{8}s^2+\frac{23}{4}s+2=A(s+1)(s+1+j)(s+1-j)+B(s+1+j)(s+1-j)s+(Cs+D)(s+1)s$$

Einsetzen der Nullstellen ergibt:

s = 0: A = 1

s = -1: B = $-\frac{3}{8}$

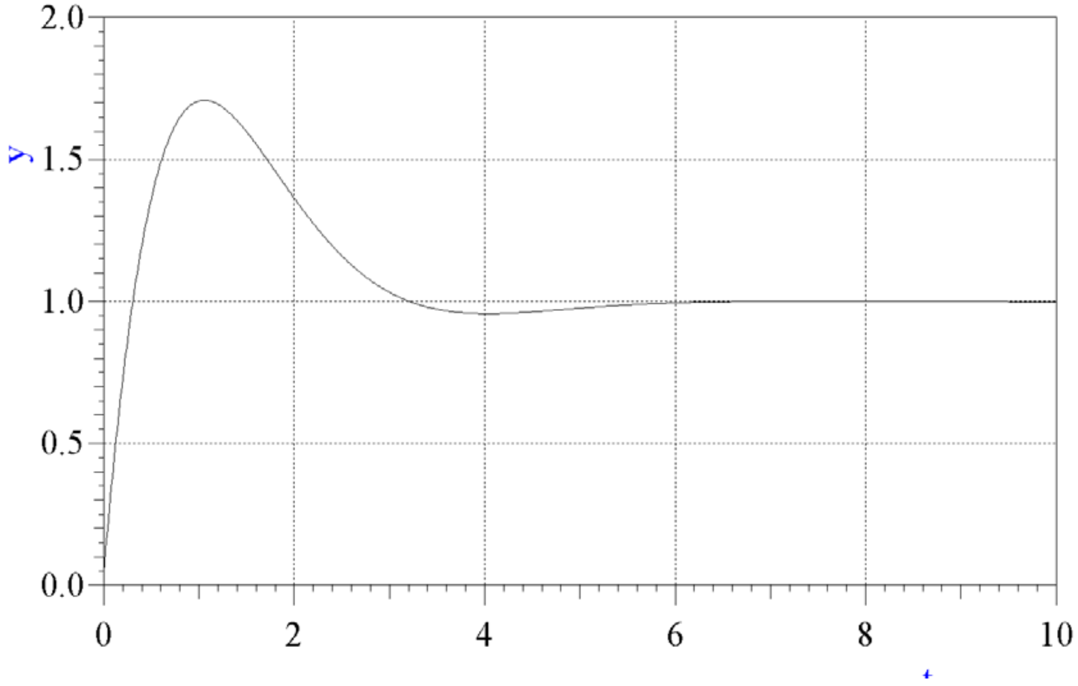
$$\left.\begin{array}{l} s = 1:\quad 15/4 = 2C + 2D \\ s = 2:\quad 30/4 = 12C + 6D \end{array}\right\} \quad C = -\frac{5}{8} \quad \text{und } D = \frac{5}{2}$$

Also erhält man:

$$Y(s)=\frac{1}{s}-\frac{\frac{3}{8}}{s+1}-\frac{\frac{5}{8}(s+1)}{s^2+2s+2}+\frac{\frac{25}{8}}{s^2+2s+2}$$

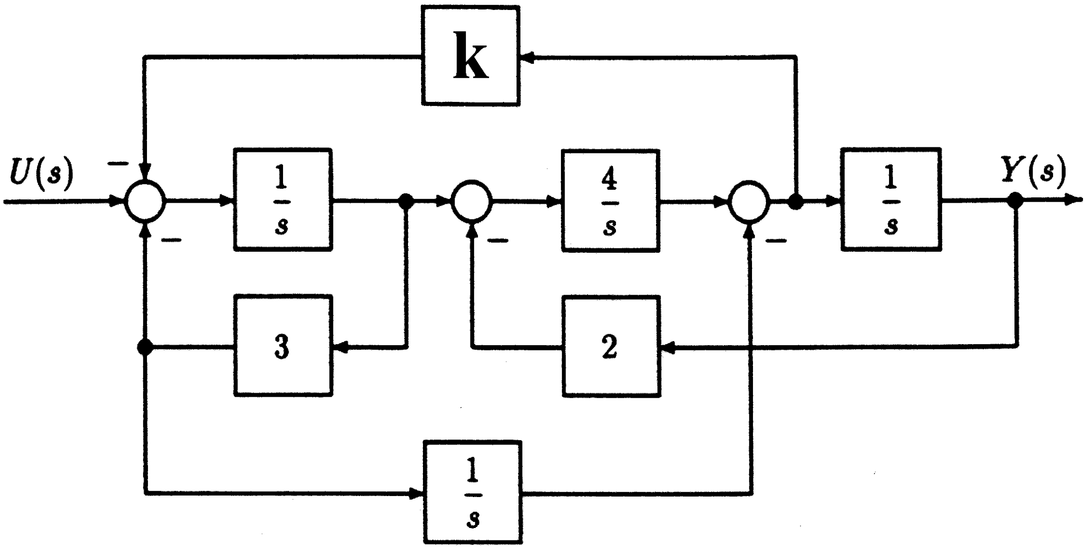
Die Rücktransformation liefert:

$$y(t)=1-\frac{3}{8}e^{-t}-\frac{5}{8}e^{-t}\cos(t)+\frac{25}{8}e^{-t}\sin(t)$$



Aufgabe 3: (Strukturbildreduktion, Stabilität) (17 Punkte)

Gegeben sei das folgende Strukturbild eines Übertragungssystems:

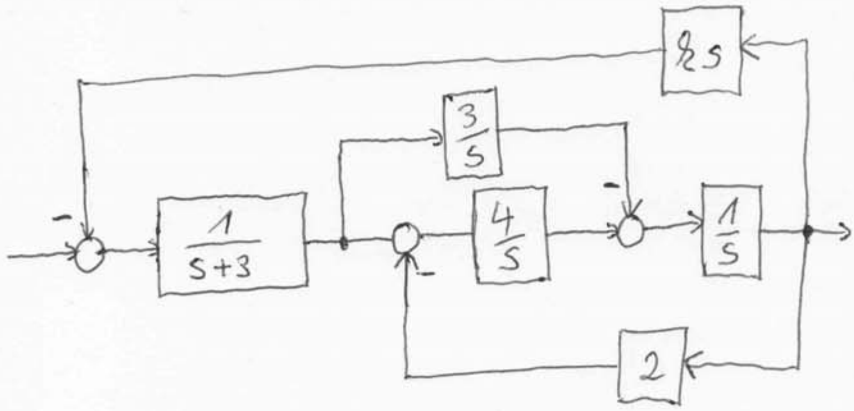


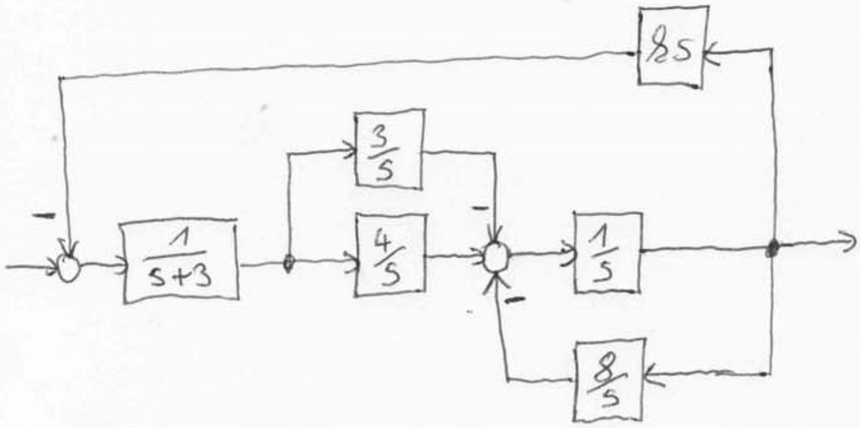
a) Bestimmen Sie durch schrittweise Reduktion des Strukturbildes die Übertragungsfunktion G(s) = Y(s)/U(s).

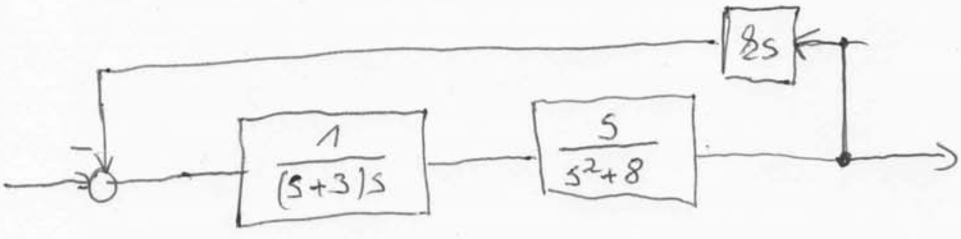
b) Geben Sie die zugehörige DGl an!

c) Gibt es einen Wertebereich für den Parameter k, bei dem das Übertragungssystem stabil ist? Begründung!

Lösung zur Aufgabe 3:







$$G(s) = \frac{1}{(s+3)(s^2+8) + ks} = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + (8+k)s + 24}$$

b) DGl: $\dddot{y} + 3\ddot{y} + (8+k)\dot{y} + 24y = u$

c) z. B. Hurwitz:

$$H = \begin{pmatrix} 3 & 24 & 0 \\ 1 & (8+k) & 0 \\ 0 & 3 & 24 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} H_1 = 24 \\ H_2 = 3(8+k) - 24 = 3K \\ \quad \Rightarrow \underline{K > 0} \\ H_3 = 24 \cdot H_2 \end{array}$$

$\Rightarrow$ <u>stabil für $k > 0$</u>