(Quellen: Douglas Physik, Lexikon Mathematik, Artikel Phy i d Schule 1990)

Fehlerbetrachtung und Fehlerschätzung

1. Definition der Messfehler und Angabe von Messwerten

Wahrer Wert, Bestwert und Messfehler

Jede physikalische Größe *x* hat zu einem bestimmten Zeitpunkt einen objektiven, von jedem Messverfahren unabhängigen Wert, den man als *wahren Wert* bezeichnet. Dieser wahre Wert ist im allgemeinen unbekannt. Durch Messung soll ein Wert bestimmt werden, der dem wahren Wert besonders nahe kommt.

- Der sehr sorgfältig gemessene *Einzelmesswert* oder
- der aus mehreren Messungen errechnete *Mittelwert.*

wird als bestmöglicher Vertreter des wahren Wertes - als *Bestwert* $\bar{x}$ genommen.
Der Bestwert jedoch wird meist vom wahren Wert abweichen. Diese Abweichung Δx heißt Messfehler.
Beispiel: Messung der Zimmerhöhe mit einem Gliedermaßstab

Messwert = Bestwert:	x = 240 cm
Geschätzter absoluter Messfehler:	Δx = 1 cm
Angabe des Messergebnisses:	x = 240 cm ± 1 cm oder 239 cm ≤ x ≤ 241 cm.

Zuverlässige Ziffern

Ich soll die Geschwindigkeit eines Körpers messen und erhalte s = 1 m und t = 3 s. Wegen v = s/t folgt 0,33333333333 …. ms^{-1}. Aber wie viele Nachkommastellen soll ich angeben?

Bei der Angabe physikalischer Größen, wie sie in physikalischen Aufgaben oder in Datenblättern von Geräten etc. vorkommen, wird der Messfehler oft nicht explizit mit angegeben. In solchen Fällen nimmt man an, dass der Messfehler eine, zwei oder gar drei Einheiten der letzten angegebenen Dezimalstelle des Messwertes beträgt.
Beispiel: Eine Strecke beträgt

a)	s = 8,8 cm.	Δs = 0,1 cm	8,7 cm ≤ s ≤ 8,9 cm.
b)	s = 8,80 cm.	Δs = 0,01 cm	8,79 cm ≤ s ≤ 8,81 cm.
c)	s = 0,8 cm.	Δs = 0,1 cm	0,7 cm ≤ s ≤ 0,9 cm.

Liegt nur die Maßzahl vor, weiß man oft nicht, wie sie ermittelt wurde, ob durch sorgfältige Messung, grobe Messung oder Schätzung. Man orientiert sich dann nach der Anzahl der zuverlässigen Ziffern.

Bei einem Näherungswert heißen alle Ziffern, die mit dem exakten Wert übereinstimmen, zuverlässige Ziffern.
Beispiele:

a) Ein Radfahrer gibt seine Fahrstrecke an: „Ich schätze 25 km.“ Der Fehler beim Schätzen dürfte ein bis zwei Kilometer sein, also: s = 25 km mit 2 zuverlässigen Ziffer.
b) Ein anderer Radfahrer schaut auf seinen Tacho und gibt 20,00 km an. s = 20,00 km mit 4 zuverlässigen Ziffern, denn der Messfehler wird hier mit 10 m angenommen.
c) Der Radfahrer sagt: “Mein Rad wiegt 0,015 t.“ m = 0,015 t hat 2 zuverlässige Ziffern. Die Nullen treten als Platzhalter für das Komma auf. Ebenfalls 2 zuverlässige Ziffern bei der Angabe m = 15 kg. Bei m = 15000 g wird die Anzahl der zuverlässigen Ziffern nicht deutlich, wenn keine weiteren Informationen vorliegen. Es ist aber zu vermuten, dass die Anzahl der zuverlässigen Ziffern 4 beträgt, da vermutlich genauer gewogen wurde. (Sonst hätte man bequemer 15 kg geschrieben.)

d) Durch die Anwendung von Zehnerpotenzen kann man mit Größen bequemer rechnen. Sagt Radfahrer I: „s = 2·10^4 m", so liegt wahrscheinlich nur eine grobe Schätzung vor, denn es gibt nur eine zuverlässige Ziffer. s = 2,0·10^4 m – 2 zuverlässige Ziffern und s = 2,000·10^4 m – 4 zuverlässige Ziffern.

2. Fehlerursachen und Fehlerarten

Messfehler haben folgende Ursachen

→ im Verhalten des Experimentators,
→ in der Experimentieranordnung,
→ in den Messmitteln, das sind Messgeräte und Maßverkörperungen (z. B. Wägestücke, Hakenkörper, Vergleichswiderstände) und
→ im Einfluss der Umwelt auf das Experiment.

Die Fehlerursachen bedingen zwei verschiedene Arten von Messfehlern:

Zufällige Fehler x_{zuf}

Bei vielen Wiederholungen der Messung ist nicht vorhersagbar, wie stark und in welche Richtung eine Abweichung des Bestwertes vom wahren Wert erfolgt. Der Zufall kann bei der Planung und Ausführung der Messung nicht ausgeschlossen werden.

- Die zufälligen Abweichungen vom wahren Wert haben gleichhäufig beiderlei Vorzeichen, vorausgesetzt man führt die Messung sehr oft durch.
- Es gibt also Messwerte, die größer, und solche, die kleiner als der wahre Wert sind.
- Die bei wiederholter Messung bestimmten Werte streuen um den Mittelwert $\bar{x}$ herum.

Beispiele:

Beispiel	*Ursache*
➢ Grobe Einteilung der Skale, ➢ Bewegung (Schwankung) des Zeigers ➢ schräge Blickrichtung zur Skale	Ablesefehler
➢ Reaktionsschnelle beim Start und Stopp einer Uhr ➢ Unsicherheit beim Beurteilen der Übereinstimmung zweier Ereignisse	Auslösefehler
Nicht völlig exaktes Anlegen des Messstabes an die zu messende Strecke	Anlegefehler
Beurteilung der Schärfe eines reellen Bildes	Einstellungsfehler
Beurteilung maximaler Lautstärke bei Resonanz	Abgleichfehler

Zum zahlenmäßigen Ermitteln des zufälligen Fehlers Δx_{zuf}

Wurde dieselbe physikalische Größe *x* unter gleichen Bedingungen *mehrmals* gemessen, so darf der zufällige Fehler *rechnerisch* ermittelt werden,

bei *n = 10* $\Delta\bar{X}_{ZUF} = \pm\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\bar{x})^2}{n}}$

n=3 $\Delta\bar{X}_{ZUF} = \pm\frac{x_{max}-x_{min}}{n}$

Wurde die physikalische Größe nur 1mal gemessen, so muss der zufällige Fehler *abgeschätzt* werden:

— Die zufällige Abweichung hängt von den *Experimentierbedingungen* ab (z. B. Ungleichmäßigkeit des Messobjektes, nur kurzzeitige Anzeige des Messwertes, Schwierigkeiten beim Einstellen und beim Abgleichen, ungünstige Sichtverhältnisse, zufällige Einflüsse der Umgebung).
— Der Fehler beim Ablesen von Skalen sollte mit der Hälfte (oder dem Viertel) der Bedeutung der kleinsten Skalenteilung angenommen werden.
— Der Auslösefehler beim Ein- und Ausschalten einer Handstoppuhr beträgt je nach Reaktionsschnelle Δ*t*= ±0,1 s bis ±0,3 s.

Systematische Fehler x_{sys}

Bei vielen Wiederholungen der Messungen wirken sich systematische Fehler stets gleich auf die Abweichung des Bestwertes vom wahren Wert aus.
Die systematischen Abweichungen haben stets das gleich Vorzeichen. Bei wiederholter Messung sind die Werte sämtlich größer oder sämtlich kleiner als der wahre Wert.

Beispiele:

Ursachen	*Wirkung*
Reibung bei mechanischen Bewegungen	*t* zu groß
Wärmekapazität des Gefäßes	ϑ_M zu klein
Wärmeaufnahme aus der Umgebung	ϑ_M zu groß
Zwei Messgeräte in stromrichtiger Schaltung	*U* zu groß
Toleranz der Festwiderstände	*R* zu groß oder zu klein
Genauigkeitsklasse elektrischer Messgeräte	*U* zu groß oder zu klein I zu groß oder zu klein

Von den systematischen Fehlern sind einige aus bekannten Fehlerursachen nach Betrag und Vorzeichen erfassbar (sogenannte *erfasste systematische Fehler);* sie lassen sich durch Ändern der Experimentieranordnung vermindern bzw. durch Rechnung beseitigen. Andere systematische Fehler sind nicht nach Betrag und Vorzeichen erfassbar (sogenannte *nicht-erfasste systematische Fehler).* Sie lassen sich nur durch Kenntnis von Fehlergrenzen grob abschätzen.

Zum zahlenmäßigen Ermitteln der systematischen Fehler Δx_{syst}

Systematische Fehler, die sich nicht korrigieren oder kompensieren oder weiter verringern lassen, müssen abgeschätzt werden:

— Der *Anzeigefehler* des elektrischen Meßgerätes *Polytest* beträgt aufgrund der Genauigkeitsklasse bei Gleichgrößen ±2,5 % und bei Wechselgrößen ±5 % vom Messbereichsendwert, gleichgültig, an welcher Stelle der Skale der Zeiger steht.
— Der *Anzeigefehler* bei *Laborthermometern* (1/1°) beträgt ±1 K, bei (1/10°) ±0,25 K.
— Der *Anzeigefehler* bei *Messzylindern* beträgt ± l % vom größten Volumen.
— Die maximale *Fehlergrenze* von *Präzisionswaagen* (l kg) beträgt ±1 % der jeweiligen Belastung.
— Der *Anzeigefehler* der *Federkraftmesser* beträgt ±2 % vom Messbereichsendwert.
— Der *Fehler* der *Gitterkonstanten* optischer Strichgitter beträgt etwa +1 % vom angegebenen Wert.

Die *systematischen Fehler* von *Hakenkörpern* müssen durch Vergleich mit geeichten Wägestücken ermittelt werden.
Die *systematischen Fehler* der Stoppuhr, des Lineals, des Messschiebers und der Messuhr (Feinmesszeiger) dürfen vernachlässigt werden.

3. Berücksichtigung der Messfehler im Experimentierprozess

Durch die unvermeidlichen Messfehler kann stets nur ein Näherungswert bestimmt werden. Diese Einsicht verpflichtet, während der Vorbereitung, der Durchführung und der Auswertung des Experimentes alle Handlungen sehr sorgfältig auszuführen und die Ergebnisse aufmerksam und kritisch zu werten.

Bei der ***Vorbereitung*** sollten deshalb die Fragen beantwortet werden:

— Worauf muss man bei der Durchführung *achten,* um Messfehler so gering wie möglich zu halten?
— Wie lassen sich systematische Fehler *korrigieren* (z. B. Einfluss der Wärmekapazität, Einfluss der Innenwiderstände elektrischer Messgeräte), *kompensieren* (z. B. bewegungshemmende Kräfte) oder *verringern* (z. B. Wärmeübertragung von und nach der Umgebung)?
— Bei welchen physikalischen Größen werden die Messfehler

a) bedeutenden,
b) unbedeutenden Einfluss auf das Resultat des Experiments haben?

Bei der ***Auswertung*** ist zu beachten:

— Einzelwerte, die sehr weit von den anderen abweichen (Ausreißer), werden *nicht* in den Mittelwert zum Berechnen eines Bestwertes einbezogen.
— In der *graphischen Darstellung* ist die Streuung der Messwerte durch die geeignete Lage einer „glatten" Kurve auszugleichen. Die Messpunkte sollen möglichst *dicht* bei der Funktionskurve liegen und sich *gleichmäßig auf beide Seiten* verteilen. Die Form der Kurve ist oft aus dem mathematischen Zusammenhang bekannt (z. B. Gerade, Parabel, Exponentialkurve).
— Das Experiment ist einer *Fehlerkritik* zu unterziehen, indem
  a) die Genauigkeit der gemessenen Werte durch *wörtliche Aufzählung von Ursachen* für zufällige und systematische Fehler kritisch einzuschätzen ist;
  b) Ursachen zu nennen sind, die zu *nichterfassten systematischen Fehlern* mit *eindeutigen Vorzeichen* führen. Es ist zu diskutieren, wie sich diese Fehler auf die direkt gemessenen Größen und auf das Endresultat auswirken. Die Aussagen sind zu begründen.

4. Zahlenmäßige Angabe von Messfehlern

4.1. Relativer Fehler und prozentualer Fehler

Astronomen können die Entfernung Erde Mond bis auf 4 Zentimeter genau messen. Ein Heimwerker misst die Zimmerhöhe zum Tapezieren bis auf 4 Zentimeter genau. Welche Messung ist besser?

Der relative Fehler ∂x ermöglicht es, die Güte einer Messung mit der einer anderen Messung zu vergleichen. Dabei wird der absolute Fehler Δx auf den Bestwert x der gemessenen Größe bezogen.

Berechnung: $\partial x = \frac{\Delta x}{x}$

Der prozentuale Fehler $\partial x_{\%}$ ist der in Prozenten ausgedrückte relative Fehler.

Berechnung: $\partial x_{\%} = \frac{\Delta x}{x} \cdot 100$

4.2. Der Größtfehler einer direkt messbaren physikalischen Größe

Wenn man die Stromstärke beim Entladen eines Kondensators untersucht, spielen zufällige und systematische Fehler gleichzeitig eine Rolle, denn der Zeiger des Strommessers bewegt sich und man muss zwischen den kleinsten Skalenteilen abschätzen. Außerdem ist das Stromstärkemessgerät ein elektrisches Gerät mit einem Innenwiderstand, so dass die Stromstärke verfälscht wird. Wie berücksichtigt man das gleichzeitige Auftreten beider Fehler?

Der *Größtfehler* Δx berücksichtigt den *ungünstigsten Fall,* bei dem sich *alle Fehler addieren* (sich keine Fehler gegenseitig aufheben).
Der Größtfehler Δx einer direkt messbaren physikalischen Größe *x* lässt sich aus dem *zufälligen Anteil* Δx_{zuf} und dem nichterfassten *systematischen Anteil* Δx_{syst} ermitteln.

Berechnung des Größtfehlers: $\Delta x = |\Delta x_{zuf}| + |\Delta x_{SYS}|$

Wenn einer der beiden Anteile wesentlich geringer ist als der andere, so darf er vernachlässigt werden.
Der Größtfehler Δx ist im allgemeinen auf *eine geltende Ziffer* zu runden, es ist *aufzurunden*

Die Formulierung des Resultates

Der *Größtfehler* ermöglicht es, ein Intervall anzugeben, in dem der wahre Wert mit hoher Wahrscheinlichkeit liegt.

Resultat = Bestwert ± Betrag des Größtfehlers also $x = \bar{x} \pm |\Delta\bar{x}|$

Die Ermittlung des Größtfehlers bedarf großer Sorgfalt. Schätzt man den Fehler zu gering ab, so könnte der wahre Wert außerhalb des Intervalls liegen, schätzt man ihn zu grob ab, so wird das Vertrauen in das Messergebnis unnötig herabgesetzt.

Beispiel 1: Bestimmung der Stromstärke von Gleichstrom

mit dem Messgerät *Polytest* im Messbereich bis 100 mA

Messwert (Bestwert): I = 60 mA

Geschätzt: ΔI_{zuf} = ±1,5 mA – Das entspricht der Hälfte der kleinsten Skalenteilung des gewählten Messbereichs.

ΔI_{syst} = ±2,5 mA Das sind 2,5% von 100.

Größtfehler (absolut): ΔI= ±4 mA

Größtfehler (prozentual): $\delta I_{\%} = \frac{\Delta I}{\mathrm{I}} \cdot 100 = 6{,}667 = 7\%$

Resultat: I = 60 mA ± 4 mA

Beispiel 2: Bestimmung der Periodendauer eines Federschwingers mit Hilfe der Handstoppuhr

(*Hinweis:* Um die Periodendauer *T* möglichst genau zu bestimmen, wird die Zeit *t* für 10 Perioden gemessen. Dabei tritt nur beim Ein- und beim Ausschalten der Uhr je ein Auslösefehler auf.)

Messwert: *t*= 14,2s; daraus folgt der

Bestwert: T= 1,42s

Geschätzt: Δt_{2uf} = ±0,4s; Δt_{syst} vernachlässigbar

Größtfehler: Δt = ±0,4 s, woraus sich der Größtfehler der Periodendauer ergibt zu $\Delta T = \pm \frac{0{,}4s}{10} = \pm\, 0{,}04s$

Resultat : *T* = 1,42 s ± 0,04 s

4.3. Größtfehler einer indirekt messbaren physikalischen Größe z = f (x, y, ...)

Das Resultat eines Experimentes wird häufig mit Gleichungen aus den direkt gemessenen Größen berechnet. Der Bestwert der Größe z ergibt sich durch Einsetzen der Meßwerte *x, y, ...* in den Zusammenhang *z = ((x,y, ...)*. Dabei pflanzen sich die Fehler der direkt gemessenen Größen *x, y, ...* auf das Resultat z fort.

Wie lässt sich der Größtfehler von z ermitteln?

1. Möglichkeit: Die Größe z wurde durch wiederholtes ausführen des gesamten Experiments mehrmals bestimmt. Als zufälliger Größtfehler darf errechnet werden

entweder (n ≈ 10): $\Delta\bar{z} = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(z_i-\bar{z})^2}{n(n-1)}}$

oder vereinfacht für (n ≈ 3) $\Delta\bar{z} = \pm\frac{z_{max}-z_{min}}{n}$

Beispiel: Es soll die Länge eines Fadenpendels mit Hilfe einer Stoppuhr gemessen werden. Dazu werden sechs Messungen ausgeführt. Folgende Messtabelle wurde erarbeitet:

Nr. der Messung	t in s für 10 Schwingungen	T in s	$\ell = \frac{\mathrm{T}^2}{4\cdot\pi^2}\cdot g$ in m
1	12	1,2	0,3578
2	13	1,3	0,4199
3	9	0,9	0,2013
4	17	1,7	Ausreißer bleibt unbeachtet
5	11	1,1	0,3006
6	12	1,2	0,3578

Größtfehler: $\Delta\ell = \frac{\ell_{max} - \ell_{min}}{5} = \frac{0{,}4199\text{ m} - 0{,}2013\text{ m}}{5} = 0{,}04372\text{ m} \approx 0{,}05\text{ m}$

Bestwert von ℓ: Mittelwert $\bar{\ell} = 0{,}3275\text{ m}$

Resultat: $\ell = 0{,}33\text{ m} \pm 0{,}05\text{ m}$

2. Möglichkeit: Die Größe z wurde nur *1 mal* bestimmt. Die Größen *x, y,* sind durch Messen und deren Größtfehler Δx, Δy, ... durch Abschätzen bekannt. Der Größtfehler von z wird dann folgendermaßen ermittelt:

Fall 1: Die Größe z ist die Summe (z = x + y) oder die Differenz (z = x – y
der gemessenen Größen x und y.

Dann ist der *Betrag des absoluten Größtfehlers* einer Summe Differenz gleich der *Summe der Beträge* von den absoluten Größtfehlern der einzelnen Summanden. Berechnung: | Δz | = | Δx | + | *Δy* \.

Merke:

1. Bei Summe und Differenz ist zuerst der absolute Fehler Δz zu berechnen und danach, wenn nötig, der relative Fehler $\delta z = \frac{\Delta z}{z}$
2. Enthält ein Summand einen konstanten Faktor (z. B. *2x),* so ist auch der absolute Fehler von *x* zu vervielfachen *(z.* B. zu verdoppeln).

Beispiel 1: Bestimmung einer Temperaturdifferenz mit einem 1/1°-Thermometer

Gleichung: $z = \vartheta_2 - \vartheta_1$

Meßwerte: $\vartheta_2 = 28°C$ und $\vartheta_1 = 19°C$

Geschätzt: $\Delta\vartheta_2 = \pm 0{,}5$ K und $\Delta\vartheta_1 = \pm 0{,}5$ K *(Hinweis:* Hier wurden nur die zufälligen Fehler berücksichtigt. Da beide Temperaturen mit ein und demselben Thermometer gemessen wurden, durfte der systematische Fehler vernachlässigt werden, weil er sich bei der Differenzbildung aufhebt.)

Bestwert: z = 9K

Größtfehler (absolut): Δz = ±(0,5 K + 0,5 K)=±1K

Größtfehler (prozentual): $\partial z_{\%} = +11$ %

Resultat: z = 9K± l K.

Beispiel 2: Ein Weg besteht aus fünf Gehwegplatten. Eine Platte wurde mit einem Gliedermaßstab gemessen. Ermittle die Länge des Weges, wenn der Bestwert für eine Platte s = 30 cm beträgt. (Fugen bleiben unbeachtet.)

zufälliger Fehler: $\Delta s_{zuf} = 0{,}5$ mm = 0,05 cm

systematische Fehler: – kann vernachlässigt werden.

Bestwert: $\ell = 5 \cdot s = 150$ cm

Größtfehler: $\Delta\ell = 5 \cdot 0{,}05$ cm = 0,15 cm

Resultat: ℓ = 150,00 cm ± 0,15 cm

Fall 2: Die Größe z ist das Produkt (z = x·y) oder der Quotient $z = \frac{x}{y}$ der
gemessenen Größen *x* und *y.*

Dann ist der *Betrag vom relativen Größtfehler* gleich der *Summe der Beträge* der einzelnen Faktoren der relativen Fehler von Dividend und Divisor

Berechnung: $|\partial z| = |\partial x| + |\partial y|$

Merke:

1. Bei Produkt und Quotient ist zuerst der relative Fehler δ*z* zu berechnen und danach der absolute Fehler $\Delta z = \partial z \cdot z$.

2. Enthält der mathematische Zusammenhang außer den Messgrößen noch konstante Faktoren bzw. konstante Summanden, so sind sie ohne Einfluss auf die Berechnung des relativen Größtfehlers.

Beispiel: Bestimmung der Wellenlänge von Filterlicht mit einem Strichgitter der Gitterkonstanten b = 0,05 mm.

Gleichung: $\lambda = \frac{s_1 b}{e}$

Meßwerte : s_1 = 8,0 mm und e = 650 mm

Geschätzt: $\Delta s_1 = \pm 0{,}5$ mm und $\Delta e = \pm 5$ mm

Die systematischen Fehler sind vernachlässigbar.

Bestwert: λ = 615nm

Relative Fehler:

$$\partial s_1 = \frac{\Delta s_1}{s_1} = \pm \frac{0{,}5\ mm}{8\ mm} = \pm 0{,}062\ mm$$

$$\partial b = \pm 0{,}01$$

$$\partial e = \frac{\Delta e}{e} = \pm \frac{5\ mm}{650\ mm} = \pm 0{,}008$$

Relativer Größtfehler der Wellenlänge

$$\partial\lambda = \pm (0{,}062 + 0{,}01 + 0{,}008) = \pm 0{,}0$$

Absoluter Größtfehler der Wellenlänge

$$\Delta\lambda = \pm 0{,}08 \cdot 615\ nm = \pm 49{,}2\ nm \approx \pm 50\ nm$$

Resultat: λ = 615 nm ± 50 nm.

Fall 3. Die Größe z ist eine *Potenz ($z = x^n$)* der gemessenen Größe x Dann ist der *relative Größtfehler der Potenz* gleich dem $|n|$ -fachen relativen Fehler der Basis.

Berechnung: $\partial z = |n| \cdot \delta x,$ (n beliebig reelle Zahl)

Begründung: Da eine Potenz als Produkt gleicher Faktoren darstellbar ist, folgt aus

$x^2 = x \cdot x;\ |\partial x^2| = |\partial x| + |\partial x| = 2 \cdot |\partial x|, bzw. \partial x^2 = 2 \cdot \partial x$ und aus

$x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x};\ \partial x = 2 \cdot \partial\sqrt{x}$ und nach Umstellung $\partial\sqrt{x} = \partial x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\eth x$.

Beispiel: Eine Kugel fällt frei vom Tisch. Mit welcher Geschwindigkeit trifft sie auf den Boden?

Gleichung:	$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$
Bestwert der Höhe:	h = 2,00 m
Bestwert der Geschwindigkeit:	6,264183905 ms^{-1} (laut GTR – ungerundet)
Größtfehler geschätzt	Δh = 1 mm = 0,001 m
relativer Fehler der Höhenmessung:	∂h = 0,001 m:2,00 m = 0,0005
relativer Fehler für v:	Konstante Faktoren sind ohne Einfluss, also:
	$v = \sqrt{2 \cdot g} \cdot \sqrt{h} \quad \Big| \sqrt{2 \cdot g} = \text{konst.}$
	$\partial v = \frac{1}{2}\partial h = 0{,}00025$
Größtfehler von v:	Δv = ∂v·v = 0,001566≈0,002
Resultat:	v = 6,264 ms^{-1} ±0,002 ms^{-1}.

5. Zusammenfassung

Wird nur eine Einzelmessung ausgeführt oder eine Messreihe?		
Messreihe	Einzelmessung	
	Die gesuchte Größe ist eine **Summe oder Differenz**	Die gesuchte Größe ist eine **Produkt oder Quotient**
	1) $\lvert\Delta z\rvert = \lvert\Delta x\rvert + \lvert\Delta y\rvert$.	*1)* Berechne den relativen Fehler $\lvert\partial z\rvert = \lvert\partial x\rvert + \lvert\partial y\rvert$
1. Berechne den Bestwert als Mittelwert aller Ergebnisse	2) Enthält ein Summand einen konstanten Faktor (z.B. *2x)*, so ist auch der absolute Fehler von *x* zu vervielfachen *(z.* B. zu verdoppeln).	Berechne den Größtfehler $\Delta z = \partial z \cdot z$
2. Berechne den Größtfehler mit $\Delta\bar{z} = \pm \frac{z_{max} - z_{min}}{n}$ oder $\Delta\bar{z} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})^2}{n(n-1)}}$	Der relative Fehler wird nur bei Bedarf berechnet.	**Potenzen:** $z = x^2 = x \cdot x$ $\partial z = \lvert\partial x\rvert + \lvert\partial x\rvert = 2 \cdot \lvert\partial x\rvert$
		Wurzeln $z = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ $\partial z = \frac{1}{2}\partial x$
		Enthält ein Summand einen konstanten Faktor, so hat dieser keinen Einfluss auf den relativen Fehler.
Runde den Größtfehler auf eine Stelle. Runde dabei stets auf. Runde den Bestwert auf die Stelle des Größtfehlers		

6. Weitere Beispiele

Beispiel 1:

Aufgabe: Ermittle die Masse eines Würfels mit einer Briefwaage.

Hinweis: Man wird nur eine Einzelmessung ausführen, denn es macht wenig Sinn, die Kugel 10 mal auf eine Waage zu legen und immer den gleichen Wert abzulesen.

Messtabelle:

Bestwert $\overline{m}$	zufälliger Fehler Δm_{zuf}	systematischer Fehler Δm_{sys}	Größtfehler Δm	relativer Fehler $\partial m = \frac{\Delta m}{m}$
22 g	0,5 g (Hälfte d. kl. Skale)	1% von 22 g = 0,22g	0,72 g≈0,8 g	0,0327 = 3,27%

Resultat: m = 22,0 g±0,8 g

Beispiel 2:

Aufgabe: Ermittle das Volumen des Würfels

Hinweis: Man wird nur eine Einzelmessung ausführen, denn es macht wenig Sinn, die Kugel 10 mal auf eine Waage zu legen und immer den gleichen Wert abzulesen.

Messtabelle:

Bestwert $\overline{a}$	zufälliger Fehler Δa_{zuf}	systematischer Fehler Δa_{sys}	Größtfehler Δa	relativer Fehler $\partial a = \frac{\Delta a}{a}$
1,5 cm	0,5 mm = 0,05 cm (Hälfte d. kl. Skale)	zu vernachlässigen	0,05 cm	0,03333
$V = a^3 = 3{,}375\ cm^3$			$\Delta V = \partial V \cdot V$ $\Delta V = 0{,}1 \cdot 3{,}375$ $\Delta V = 0{,}3375 \approx 0{,}4$	$\partial V = 3 \cdot \partial a = 0{,}1$

Resultat: $V = 3{,}4\ cm^3 \pm 0{,}4\ cm^3$

Beispiel 4: Ermittle die Dichte dieses Würfels.

Bestwert $\overline{\rho}$	zufälliger Fehler	systematischer Fehler	Größtfehler	relativer Fehler
$6{,}470\ gcm^{-3}$			$\Delta\rho = \partial\rho \cdot \rho = 0{,}858 \approx 0{,}9$	$\lvert\partial\rho\rvert = \lvert\partial m\rvert + \lvert\partial V\rvert$ $\lvert\partial\rho\rvert = 0{,}0327 + 0{,}1$ $\lvert\partial\rho\rvert = 0{,}1327$

Resultat: $\rho = 6{,}5\ gcm^{-3} \pm 0{,}9\ gcm^{-3}$.

Beispiel 5: Ermittle den Impuls des Würfels, wenn er aus der Höhe h frei fallend auf den Boden trifft.

Bestwert	zufälliger Fehler	systematischer Fehler	Größtfehler	relativer Fehler
$\overline{m} = 0{,}022\ kg =$	0,5 g	0,22g	0,75g	0,0327g
$\overline{h} = 1{,}5\ m$	1 mm (geschätzt)	zu vernachlässigen	0,001 m	0,000666
$v = \sqrt{2gh} = 5{,}425 \frac{m}{s}$			$\Delta V = 0{,}000333 \cdot 5{,}425$ $\Delta V = 0{,}0018 \approx 0{,}002$	$\partial V = \frac{1}{2}\partial h = 0{,}000333$
$p = m \cdot v = 0{,}11935\ kgms^{-1}$			$\Delta p = 0{,}0347 \cdot 0{,}11935$ $\Delta p = 0{,}00414 \approx 0{,}005$	$\lvert\partial p\rvert = \lvert\partial m\rvert + \lvert\partial v\rvert$ $\lvert\partial p\rvert = 0{,}0327 + 0{,}002$ $\lvert\partial p\rvert = 0{,}0347$

Resultat: $p = 0{,}119\ kgms^{-1} \pm 0{,}005\ kgms^{-1}$

Quellen:

Douglas C. Giancoli: Physik. München 2006, Pearson Verlag

Gellert Walter, Kästner Herbert (Hersg.): Lexikon der Mathematik. Leipzig 1977,