# *Messunsicherheit und Fehlerfortpflanzung*

## Messunsicherheit

Die Messung einer physikalischen Größe (Masse, Spannung, Strom, Zeit,...) ist in der Regel mit einer gewissen Unsicherheit behaftet. Das heißt, der gemessene Wert weicht vom tatsächlichen, in der Regel unbekannten, Wert ab. Für diese Abweichung gibt es zwei Ursachen:

### Die Systematische Abweichung und die Statistische Abweichung

### Systematische Abweichung

Eine systematische Abweichung entsteht durch ein fehlerhaftes Messgerät oder falschen Gebrauch des Geräts. Beispielsweise kann bei einer Zeitmessung die verwendete Stoppuhr stets nachgehen, oder bei einer Längenmessung der Maßstab geringfügig zu lang oder zu kurz sein. Abweichungen vom tatsächlichen Wert können auch durch die Messmethode bedingt sein, beispielsweise dann, wenn sich der Längenmaßstab nicht in der gleichen Ebene befindet, in der eine Längenmessung erfolgen soll.
Die systematische Abweichung muss der Herstellerangabe entnommen werden, oder abgeschätzt werden. Wenn Fehler abgeschätzt werden müssen kann man sich an den

Skalenteilen orientieren, dabei kann ein Skalenteil (oder evtl. 0,5 Skalenteile) als Fehler angenommen werden.

## Statistische Abweichung

Eine statistische Abweichung entsteht durch Zufälle bei der Erfassung des Messwertes. Messungen sind daher vom mathematischen Standpunkt aus gesehen Zufallsprozesse. Wird beispielsweise die Schwingungsdauer eines Pendels mit einer Stoppuhr bestimmt, so weichen die einzelnen Messwerte meist geringfügig voneinander ab. Den Bereich, über den die Messwerte statistisch schwanken, beschreibt man mathematisch durch die so genannte Standardabweichung. Bildet man den Mittelwert vieler Einzelmessungen, so weicht dieser weniger vom tatsächlichen Wert ab als ein einzelner Messwert. Die Standardabweichung gibt dann die Streuung der einzelnen Messwerte um den Mittelwert an.

## Mittelwert, Standardabweichung und Unsicherheit des Mittelwerts

Die Größe der statistischen Abweichung kann durch mehrfache Wiederholung des Messvorgangs und den Methoden der mathematischen Statistik erfasst werden.
Eine physikalische Größe $x$ wird $n$ -mal mit dem gleichen Messverfahren gemessen. Die $n$ Messwerte $x_i$ folgen i.a. angenähert einer Gaußschen Häufigkeitsverteilung, wenn keine statistischen Abweichungen während der Messung auftreten. Der arithmetische Mittelwert $\bar{x}$ ist ein Schätzwert für den unbekannten Wert der Größe $x$ :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{mit} \quad \bar{x} \to x \qquad (1)$$

Er konvergiert für große n gegen den "wahren" Wert der Messgröße $\boldsymbol{x}$ .
Ein Maß für die Streuung der Messwerte um den Mittelwert $\bar{x}$ ist die sogenannte Standardabweichung $\sigma_x$ der Messwerte $x_i$ :

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \left[ \sum x_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum x_i \right)^2 \right]} \qquad (2)$$

Die in Abbildung 1 dargestellte Gaußsche Normalverteilungskurve zeigt die Häufigkeitsverteilung einer großen Anzahl $n$ von Messwerten. Aufgetragen ist hier die Häufigkeit $\varphi(x_i)$ als Funktion des Messwertes $x_i$ .

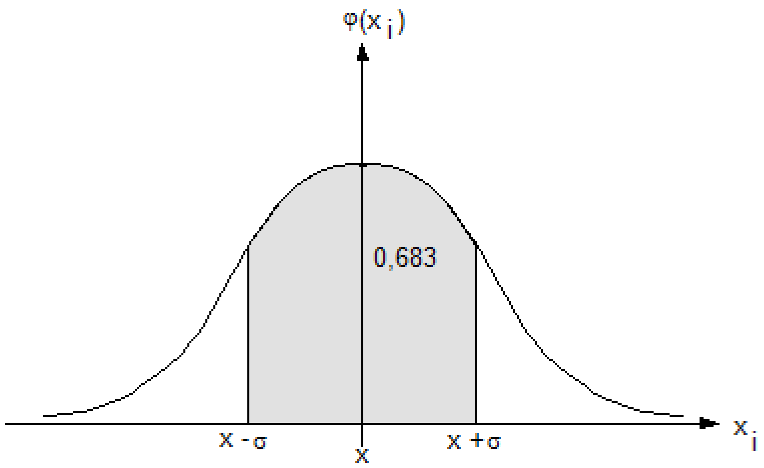



Abbildung 1: Gaußsche Normalverteilung

Der gesamte Flächeninhalt unter der Kurve ist eins, entsprechend der Wahrscheinlichkeit von 100%, einen Messwert zwischen $-\infty < x < +\infty$ zu finden.

Die Fläche unter der Kurve im Intervall $[x-\sigma\,;x+\sigma]$ hat den Inhalt 0,683, d.h. mit einer Wahrscheinlichkeit von 68,3% liegt ein Messwert in einer $\sigma$ - Umgebung von $x$ .
Man nennt diese Wahrscheinlichkeit auch **statistische Unsicherheit**.
Sie beträgt für die sogenannte $1\sigma_x$ - Grenze 68,3%,
für die $2\sigma_x$ - Grenze 95,4%
und für die $3\sigma_x$ - Grenze 99,7%.
Die Unsicherheit des Mittelwertes $\Delta\bar{x}$ ist proportional zur Standardabweichung $\sigma_x$ .
Es gilt:

$$\Delta\bar{x}=\frac{k\cdot\sigma_x}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} \qquad (3)$$

Also ergibt sich für eine Messreihe mit einer relativ großen Anzahl von $n$ Messwerten ein arithmetischer Mittelwert $\bar{x}$ mit einer Streuung so, dass der "wahre Wert" **x** mit einer Wahrscheinlichkeit von 68,3% im Intervall von $\bar{x} \pm \Delta\bar{x}$ liegt ( mit k = 1 **einfache Unsicherheit**).

Für $\Delta\bar{x} = 2 \cdot \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$ kann die statistische Sicherheit auf 95,4% (mit *k* = 2 **erweiterte Unsicherheit**)

bzw. für $\Delta\bar{x} = 3 \cdot \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$ auf 99,7% erhöht werden (mit *k* = 3 **erweiterte Unsicherheit**).

Das **Ergebnis der Messung der Größe x** wird in der Form: $x = \bar{x} \pm \Delta\bar{x}$ angegeben.

Häufig wird zusätzlich der Relativwert der Unsicherheit als Prozentwert $\frac{\Delta x}{\bar{x}} * 100$ mit angegeben. Der Relativwert der Unsicherheit wird auch relative Unsicherheit (in Prozent) genannt.

## „Messfehler"

Als Messfehler bezeichnet man die Differenz aus Messwert und wahren Wert der Messgröße. Da der wahre Wert einer Messgröße im Allgemeinem nicht bekannt ist, ist der Begriff Messfehler eigentlich kein physikalisch sinnvoller Begriff und sollte daher **NICHT** verwendet werden.

## Angaben von Messgrößen und deren Unsicherheit

Bei Messunsicherheitsangaben ist die Anführung von null verschiedenen Ziffern nur in der ersten signifikanten Stelle sinnvoll. (z. B. $3*10^{-4}$ statt 0,0003)

**Signifikante Stellen** sind alle angegebenen Ziffern bis auf führende Nullen.

Beim Messresultat sind ebenfalls alle Ziffern auf diese Messunsicherheitsstelle zu runden. Dabei sind die Rundungsregeln entsprechend zu beachten. Lediglich bei einer führenden 1 der Messunsicherheit kann auf die zweite Messunsicherheitsstelle gerundet. Diese Rundungsregeln gelten auch für die Angabe des Relativwertes der Messunsicherheit.

Beispiele:

**1.** Bei der Bestimmung der Brennweite *f* einer Sammellinse ergeben sich die folgenden Rechenwerte:

$\bar{f} = 196{,}762\,mm\,; \quad \Delta f = 1{,}454\,mm$

Das Ergebnis wird dann folgendermaßen angegeben:

$f = (196{,}8 \pm 1{,}5)\,mm$ oder $f = (197 \pm 2)\,mm$

**2.** Bei der Bestimmung eines ohmschen Widerstandes ergeben sich die Rechenwerte:

$R = 6{,}57632\,\Omega\,; \quad \Delta R = 0{,}02673\,\Omega$

Das Ergebnis wird dann folgendermaßen angegeben:

$R = (6{,}58 \pm 0{,}03)\,\Omega$ *bzw.* $R = (6{,}58 \pm 3 * 10^{-2})\,\Omega$

*oder auch als* $R = (6{,}58\,\Omega \pm 0{,}5\,\%)$

# Fehlerfortpflanzung

## Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz

Die Größe $z$ möge mit den direkten Messgrößen $a$ , $b$ , $c$ ,... durch einen bekannten funktionalen Zusammenhang $z=f(a,b,c,\ldots)$ gegeben sein, so dass $z$ eine indirekte bzw. zusammengesetzte Messgröße darstellt.

Die Unsicherheiten der Messgrößen $a$ , $b$ , $c$ ,...

bezeichnen wir mit $\Delta a$ , $\Delta b$ , $\Delta c$ ,...

Diese Unsicherheiten können z.B. Schätz(ungs)werte, errechnete Unsicherheiten, oder Herstellerangaben sein und pflanzen sich auf $z$ fort.

Aus dem Ausdruck für das totale Differential der Funktion $f(a,b,c,\ldots)$ und unter der Annahme, dass die Messwerte einer Normalverteilung unterliegen, also annähernd gleich viele positive wie negative Vorzeichen vorkommen, erhält man das Fehlerfortpflanzungsgesetz von Gauß, das den geschätzten Wert $\Delta z$ der Unsicherheit von $z$ , angibt.

$$\Delta z=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a}\Delta a\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial b}\Delta b\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial c}\Delta c\right)^2+\ldots} \qquad (4)$$

Vereinfachend lässt sich für den **Maximalwert der Unsicherheit** näherungsweise schreiben:

$$\Delta z\approx\left|\frac{\partial f}{\partial a}\right|\Delta a+\left|\frac{\partial f}{\partial b}\right|\Delta b+\left|\frac{\partial f}{\partial c}\right|\Delta c+\ldots \qquad (5)$$

Dabei ist $\frac{\partial f}{\partial a}$ der partielle Differentialquotient, d. h. die Ableitung von $f$ nach $a$ , wobei alle anderen Variablen $(b,c,\ldots)$ konstant gehalten werden.

Im Zusammenhang mit dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz werden die Absolutwerte der partiellen Differentialkoeffizienten auch Sensitivitätskoeffizienten genannt.

## Beispiel zur Anwendung der <u>maximalen</u> Messunsicherheitsberechnung

Die Dichte $\rho$ eines zylindrischen Körpers kann bei bekannter Masse $m$, Durchmesser $d$ und Höhe $h$ berechnet werden zu:

$$\rho = \frac{m}{\frac{\pi}{4} d^2 h} = m \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^{-1} \cdot d^{-2} \cdot h^{-1} \qquad (6)$$

Angenommen, die Masse $m$, der Durchmesser $d$ und die Höhe $h$ des Zylinders seien mit den Unsicherheiten $\Delta m$, $\Delta d$ und $\Delta h$ bestimmt worden.
Anwendung der Gleichung (5) liefert:

$$\Delta \rho \approx \left|\frac{\partial \rho}{\partial m}\right| \cdot \Delta m + \left|\frac{\partial \rho}{\partial d}\right| \cdot \Delta d + \left|\frac{\partial \rho}{\partial h}\right| \cdot \Delta h$$

$$\Delta \rho \approx \frac{1}{\frac{\pi}{4} d^2 h} \cdot \Delta m + \frac{2m}{\frac{\pi}{4} d^3 h} \cdot \Delta d + \frac{m}{\frac{\pi}{4} d^2 h^2} \cdot \Delta h$$

$$\Delta \rho = \frac{\rho}{m} \cdot \Delta m + \frac{2 \cdot \rho}{d} \cdot \Delta d + \frac{\rho}{h} \cdot \Delta h \qquad (7)$$

Für die praktische Berechnung der Unsicherheit $\Delta \rho$ einer abgeleiteten Größe empfiehlt es sich, eine Tabelle anzulegen. In unserem Beispiel:

Aus den Messwerten:

$$m=(2{,}145\pm0{,}002)\,kg$$

$$d=(0{,}0493\pm0{,}0003)\,m$$ wurde die Dichte errechnet: $\rho=7885\frac{kg}{m^3}$

$$h=(0{,}1425\pm0{,}003)\,m$$

Die Unsicherheit von $\rho$ wird mit Hilfe einer Tabelle berechnet:

| Eingangsgröße | | | Sensitivitätskoeffizient | | Betrag zur Unsicherheit |
|---|---|---|---|---|---|
| Größe $x_i$ | Wert $x_i$ | Unsicherheit $\Delta x_i$ | Formel für den Betrag $\left\lvert\frac{\partial\rho}{\partial x_i}\right\rvert$ | Wert des Betrags | Spalte 3 * Spalte 5 |
| $m$ | 2,145kg | 0,002kg | $\frac{\rho}{m}$ | 3676/m³ | 7kg/m³ |
| $d$ | 0,0493m | 0,0003m | $\frac{2\rho}{d}$ | 319878kg/m⁴ | 96kg/m³ |
| $h$ | 0,1425m | 0,0003m | $\frac{\rho}{h}$ | 5533kg/m⁴ | 17kg/m³ |
| $\rho$ | **7885kg/m³** | -------- | ---------- | --------- | $\Delta\rho$ = **120kg/m³** |

Damit ergibt sich als Endergebnis der Dichte: $\rho=(7885\pm120)\frac{kg}{m^3}$

Stellenzahl der Unsicherheit zu groß !

oder $\rho=(7{,}89\pm0{,}12)\cdot10^3\frac{kg}{m^3}$

Stellenzahl ok, 2 Stellen bei der Unsicherheit wegen führender 1

oder $\rho=(7{,}9\pm0{,}2)\cdot10^3\frac{kg}{m^3}$

Stellenzahl ok **(pessimistisch! ,** (vgl. m. ursprüngl. Ergebnis) **)**

## Spezialfälle der maximalen Messunsicherheitsberechnung

In **zwei** Fällen lässt sich die Anwendung der maximalen Messunsicherheitsberechnung weiter vereinfachen:

1. Es seien a und b Messgrößen, K eine Konstante und es gelte:

$$z = f(a,b) = Ka - b \qquad (8)$$

Dann ist nach den Gesetzen der Differenziation:

$$\frac{\partial f}{\partial a} = K \quad und \quad \frac{\partial f}{\partial b} = -1 \qquad (9)$$

Also erhält man:

$$\Delta z \approx |K| \Delta a + \Delta b \qquad (10)$$

Es gilt also speziell:

**Für Summen (oder Differenzen) von Messgrößen:**
**addieren sich deren absolute Unsicherheiten,**
**multipliziert mit dem Absolutwert ihrer konstanten Faktoren, zur maximalen Gesamtunsicherheit.**

2. Als weiterer Spezialfall sei:

$$z = f(a,b) = K a^m b^{-n} \qquad (11)$$

Man erhält für die beiden partiellen Ableitungen (nach a und b):

$$\frac{\partial z}{\partial a} = Kma^{m-1} n^{-n} = m\frac{z}{a}$$

und (12)

$$\frac{\partial z}{\partial b} = K a^m (-n) b^{-n-1} = (-n)\frac{z}{b}$$

Damit ergibt sich:

$$\Delta z \approx \left|\frac{\partial z}{\partial a}\right| \Delta a + \left|\frac{\partial z}{\partial b}\right| \Delta b$$

$$\Longrightarrow \Delta z \approx \left|\frac{mz}{a}\right| \Delta a + \left|\frac{-nz}{b}\right| \Delta$$

$$\Longrightarrow \frac{\Delta z}{z} \approx m \frac{\Delta a}{a} + n \frac{\Delta b}{b} \qquad (13)$$

Es gilt also:

**Für Produkte von Potenzen**

**addieren sich die relativen Unsicherheiten**

**multipliziert mit den Beträgen der Exponenten zur maximalen relativen Gesamtunsicherheit.**

Als **Beispiel** wird wieder die Bestimmung der Dichte gemäß Gleichung (6) betrachtet:

$$\rho = \frac{m}{\frac{\pi}{4} d^2 h} = m \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^{-1} \cdot d^{-2} \cdot h^{-1} \qquad (6)$$

Mit (13) ergibt sich somit sofort:

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} \approx \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta h}{h} + 2 \cdot \frac{\Delta d}{d} \qquad (14)$$

Man vergleiche dieses Ergebnis mit der letzten Zeile von Gleichung (7)

$$\Delta \rho = \frac{\rho}{m} \Delta m + \frac{2 \cdot \rho}{d} \Delta d + \frac{\rho}{h} \Delta h \qquad (7)$$

# Lineare Regression

Zu bestimmende physikalische Messgrößen stehen oftmals, theoretisch, in einem linearen Zusammenhang oder können in einen solchen transformiert werden. (s. Abschnitt Linearisierung) Die graphische Darstellung der Wertepaare lässt eine lineare Tendenz erkennen, wobei die Messwerte, aufgrund der beschriebenen Messungenauigkeiten, mehr oder weniger um eine optimale, den Messwerten angepassten Gerade streuen vgl. Abbildung 1.

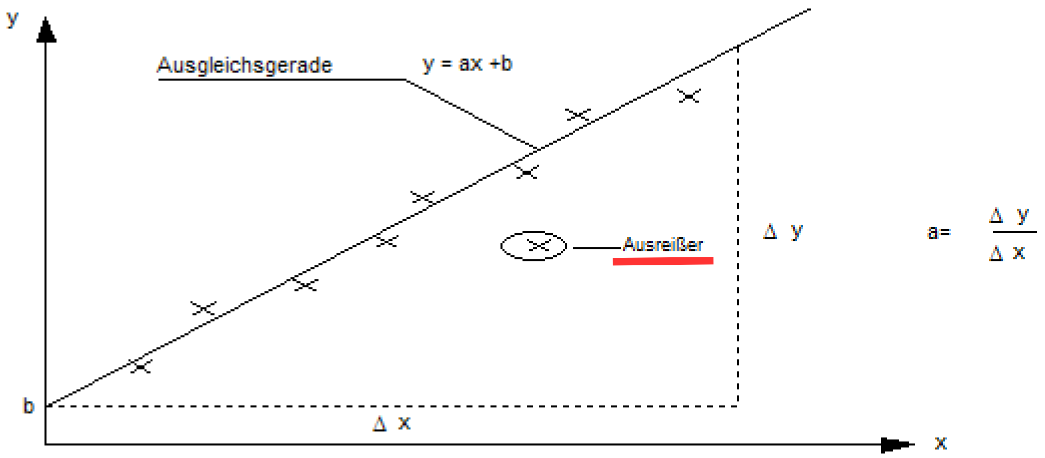



*Abbildung 1: Ausgleichsgerade*

Bei der graphischen Darstellung der Messwerte werden grobe Fehler sofort deutlich. Diese sogenannten Ausreißer werden in eine rechnerische Auswertung **nicht** mit einbezogen. Relevante physikalische Größen können durch die Auswertung der Ausgleichs- bzw. Regressionsgeraden, also die Bestimmung der Steigung m und des Achsenabschnitts *b*, ermittelt werden.

Hinreichend gute Ergebnisse liefern oftmals bereits die optische Regression, d.h. die Ausgleichsgerade wird vermittelnd zwischen den Messwerten per Auge hindurch gelegt.

Die Steigung a der Geraden $y = a * x + b$ wird dann über ein Steigungsdreieck bestimmt, während *b* direkt als Schnittpunkt mit der Ordinaten abgelesen werden kann.

Die **Nichtberücksichtigung** von „Ausreißern" bei der Auswertung ist zu begründen.

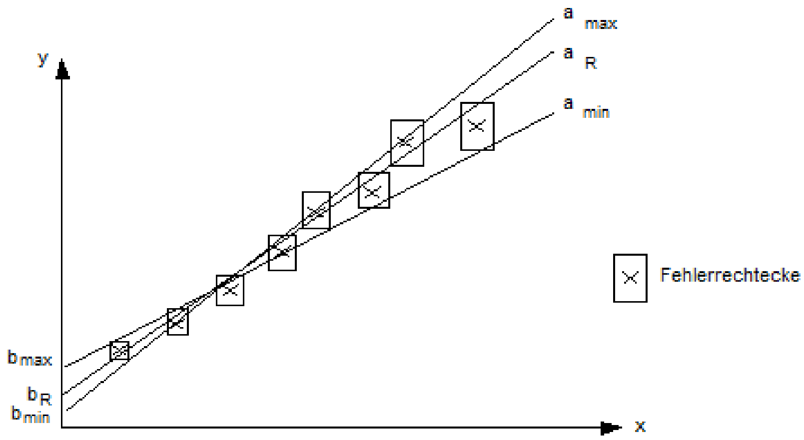



*Abbildung 2: Optische Regression mit Fehlerrechtecken*

Da die xy-Wertepaare Messungenauigkeiten beinhalten, die durch Fehlerbalken bzw. Fehlerrechtecke dargestellt werden können, ist es möglich, eine obere und untere Grenzgerade nach subjektiver Einschätzung vermittelnd einzuzeichnen (Vgl. Abbildung 2.)

Die **Schnittpunkte mit der Ordinate** liefern die Werte $b_{max}$ und $b_{min}$

Über entsprechende **Steigungsdreiecke** kann $a_{max}$ und $a_{min}$ bestimmt werden.

Mit Hilfe dieser Werte können nun die Unsicherheiten $\Delta a$ und $\Delta b$ aus der graphischen Auswertung angegeben und somit das Ergebnis für $a$ und $b$ dargestellt werden.

$$\Delta a=\frac{a_{max}-a_{min}}{2};\quad \Delta b=\frac{b_{max}-b_{min}}{2} \qquad (15)\;;(16)$$

$$a=a_{a_R\pm\Delta a;\quad b=b_R\pm\Delta b}$$

Genauere Werte können mit Hilfe der linearen Regressionsrechnung ermittelt werden.

Auf die zum Teil doch recht anspruchsvolle Herleitung der nachfolgend aufgeführten Gleichungen wird an dieser Stelle verzichtet und auf die angegebene Literatur verwiesen.

## Regressionsgerade

Für die **Steigung a** ergibt sich aus den n Wertepaaren $(x_i, y_i)$ : (Gerade: $y = a * x + b$ )

$$a = \frac{n \cdot \sum x_i \cdot y_i - \sum x_i \cdot \sum y_i}{n \cdot \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \qquad (17)$$

Der **Ordinatenabschnitt b** berechnet sich wie folgt:

$$b = \frac{\sum x_i^2 \cdot \sum y_i - \sum x_i \cdot \sum x_i \cdot y_i}{n \cdot \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \qquad (18)$$

**Sonderfall**: Ursprungsgerade durch den Ursprung < = > $b = 0$ d.h. aus (18) folgt:

$$\sum x_i^2 \cdot \sum y_i = \sum x_i \cdot \sum x_i \cdot y_i$$

bzw.

$$\frac{\sum y_i}{\sum x_i \cdot y_i} = \frac{\sum x_i}{\sum x_i^2}$$

Diesen Zusammenhang eingesetzt in die modifizierte Gleichung (17):

$$a = \frac{\sum x_i \cdot y_i}{\sum x_i^2} \qquad (19)$$

Für die Unsicherheit $\Delta a$ der Steigung $a$ ergibt sich:

$$\Delta a = \sigma_y \sqrt{\frac{n}{n \cdot \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}} \qquad (20)$$

Die Unsicherheit $\Delta b$ des Achsenabschnitts $b$ beträgt somit:

$$\Delta b=\sigma_y \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n\cdot\sum x_i^2-\left(\sum x_i\right)^2}} \qquad (21)$$

Hierin ist $\sigma_y$ ein Maß für die Streuung der y-Werte:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{n-2}\left\{\sum y_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum y_i\right)^2 - \frac{a}{n}\left[n * \sum x_i * y_i - \sum x_i * \sum y_i\right]\right\}}$$

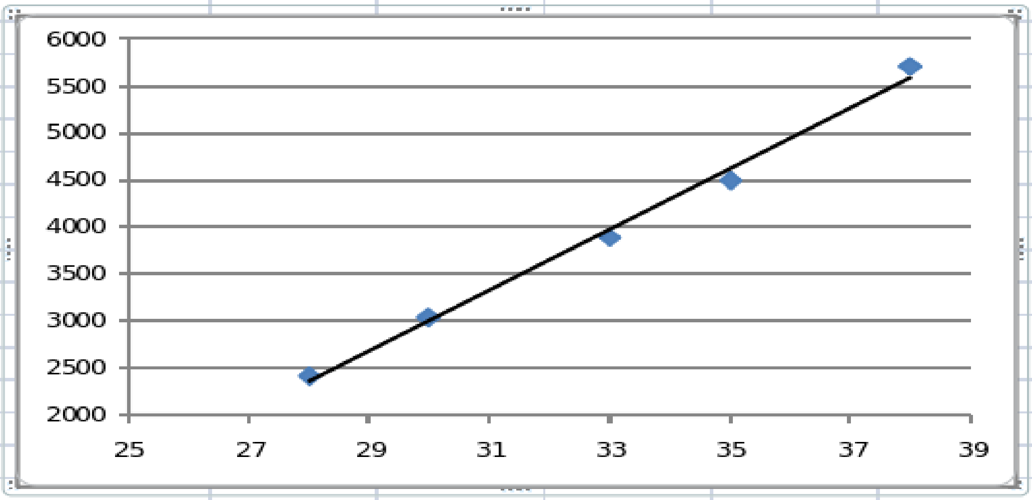
$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{n-2}\sum\left(y_i-b-a\cdot x_i\right)^2} \qquad (22)$$

## Auswertung mit Programmen

1. Mit einer **Tabellenkalkulation** (z. B. **Excel:**)

| Beispiel-Werte: | | | Auswertung über die RGP-Funktion: | |
|---|---|---|---|---|
| x-Achse | y-Achse | | | |
| 28 | 2410 | | 323,681529 | -6707,55414 |
| 30 | 3033 | | 15,0409262 | 496,213811 |
| 33 | 3895 | | 0,99356379 | 119,194002 |
| 35 | 4491 | | 463,112679 | 3 |
| 38 | 5717 | | 6579539,17 | 42621,6306 |

A3:A7 = {28;30;33;35;38}




Um die **RGP-Funktion** aufzurufen: über Funktion einfügen ( $f_x$ ) das Bedienfeld der RGP-Formel aufrufen. Dort die Werte der x- und y-Werte wie gewohnt markieren (Reihenfolge beachten !). Für Konstante und Stats einen Wert von 1 annehmen.

Nun eine Matrix von 2x5 Feldern markieren, F2 drücken und dann gemeinsam StrgShift und Enter drücken.

Bei anderen Programmen (z. B. Libreoffice-calc (kostenlos)) ist die Funktion RGP auch vorhanden und ähnlich zu bedienen.

Die ausgegebene Matrix gibt folgende Werte wieder:

| | |
|---|---|
| Steigung **m** | Koordinatenabschnitt **b** |
| Fehler der Steigung **Δm** | Fehler des Koordinatenabschnitts **Δb** |
| Bestimmtheitsmaß **$R^2$**:<br>$R^2=1$ : vollkommene Korrelation<br>$R^2 \to 0$: Regressionsgerade nicht geeignet | Standardfehler des Schätzwertes |
| F-Statistik | Freiheitsgrad |
| Regressions-Quadratsumme | Residuale-Quadratsumme |

Die grün markierten Werte sind für die Auswertung nutzbar.

2. Mit einem **Taschenrechner** mit statistischen Funktionen (z. B. "**CASIO fx-991ES**" )

Mit MODE und 3 in den Modus STAT wechseln. Dort mit 2 die lineare Regression auswählen A+BX. Nun sind die Wertepaare in die Tabelle einzugeben:

| Beispiel-Werte: | | |
|---|---|---|
| | x | y |
| 1 | 28 | 2410 |
| 2 | 30 | 3033 |
| 3 | 33 | 3895 |
| 4 | 35 | 4491 |
| 5 | 38 | 5717 |

Alle Werte müssen über = bestätigt werden. Nachdem die gesamte Tabelle eingegeben ist max. 40 Wertepaarte muss AC gedrückt werden, um das Programm zu verlassen.

Über SHIFT1 kann dann das eigentliche STAT-Menü aufgerufen werden. Die Werte der linearen Regression bekommt man über 7 Reg. Über die Tasten 1-5 kann man nun die Einzelnen Ergebnisse abrufen.

Folgende Tasten liefern die Ergebnisse :

| Buchstabe | Bedeutung | Taschenrechner | Vergleich mit Excel |
|---|---|---|---|
| **A** | Koordinatenabschnitt **b** | -6707,55414 | -6707,55414 |
| **B** | Steigung **m** | 323,6815287 | 323,681529 |
| **r** | Bestimmtheitsmaß **$R^2$** | 0,9967766992 | 0,99356379 |

| | |
|---|---|
| $\hat{y}$ | Der geschätzte y-Wert bei einem gegebenen x-Wert |
| $\hat{x}$ | Der geschätzte x-Wert bei einem gegebenen y-Wert |

## Linearisierung

Da lineare physikalische Zusammenhänge relativ bequem ausgewertet werden können, werden auch nichtlineare Zusammenhänge oft linearisiert. D. h. in Form einer Geraden dargestellt. Dies ist häufig möglich, wie **folgende Beispiele** zeigen:

1. Die Schwingungszeit $T$ eines Drehpendels mit der Winkelrichtgröße $c^x$ , auf dem zwei gleiche Zusatzmassen $m_z$ im gleichen Abstand $s$ von der Pendeldrehachse aufgebracht sind, beträgt:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J_0 + 2\left(J_z + m_z s^2\right)}{C^x}} \qquad (23)$$

mit: $J_0$ = Trägheitsmoment des Drehpendels ohne Zusatzmassen

$J_z$ = Trägheitsmoment einer Zusatzmasse.

Die Winkelrichtgröße des Pendels sowie die Trägheitsmomente sind unbekannt. Quadriert man Gleichung (23) so kann man $y = T^2$ und $x = s^2$ ansehen also eine lineare Abhängigkeit herstellen:

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{J_0 + 2\left(J_z + m_z s^2\right)}{c^x}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 J_0}{c^x} + \frac{8\pi^2 J_Z}{c^x} + \frac{8\pi^2 m_z}{c^x} \cdot s^2$$

und man erhält

$$y = \quad a \quad \cdot \quad x + b \qquad (24)$$

mit b = 0

Das heißt, aus der Gleichung (23) ist eine einfache Geradengleichung geworden.

Trägt man $T^2$ über $s^2$ in einem Diagramm auf, erhält man eine Gerade.

2. Bei der Messung der Brennweite $f$ eines optischen Systems gilt nach der einfachen Brennweitengleichung: $\frac{1}{f}=\frac{1}{g}+\frac{1}{b}$ . (Abbildungsgleichung)

   Hierbei bedeuten $g$ und $b$ die Gegenstands- und die Bildweite.
   Setzt man nun $y=\frac{1}{g}$ und $x=\frac{1}{b}$ , so liefert dies $y=\left(\frac{1}{f}\right)-x$ , d. h. wieder eine Geradengleichung.

## Literatur:

**Eichler/Kronfeld/Sahm;** Das neue Physikalische Grundpraktikum; Springer Verlag

**W.H. Westphal**; Physikalisches Praktikum; Vieweg-Verlag

**W. Walcher**; Praktikum der Physik; Teubner-Verlag

**Becker/Jodl**; Physikalisches Praktikum; VDI-Verlag

**Stingl/Roth**; Mathematik für Fachhochschulen; Carl Hanser Verlag

**G. Hartwig**; Einführung in die Fehler-und Ausgleichsrechnung; Carl Hanser Verlag

**Topping**; Fehlerrechnung; Taschentext 29; Physik-Verlag