Kann eine R-C-Schaltung verstärken?

In der Rubrik «Watt Ihr Volt» ist im «Elektroniker» Nr. 12/1985 eine Aufgabe gestellt worden, die Dr. Paul Wirz aus 6048 Horw vorgeschlagen hatte. Es sei nochmals kurz rekapituliert, wie diese Aufgabe damals eingeführt wurde:

«Jedem Elektroniker ist es geläufig: zur Verstärkung eines Signals braucht es einen aktiven Vierpol, der mit Röhren oder heute meist mit Transistoren ausgerüstet ist. Reine Spannungsverstärkung ist aber auch erreichbar mit passiven Vierpolen, wenn sie Spulen und Kondensatoren enthalten, z. B. in der Form eines Serienschwingkreises. Ist Verstärkung auch möglich mit einem Vierpol, der ausschliesslich Widerstände und Kondensatoren enthält? Dies behauptet der obengenannte Einsender und stellt die Aufgabe Nr. 35:

Aus zwei Widerständen und zwei Kondensatoren soll ein Vierpol gebildet werden, dessen Leerlauf-Ausgangsspannung U_{aus} grösser ist als die Eingangsspannung U_{ein}. Wie sieht die Schaltung aus, welche Verstärkung $|v_u|$ kann theoretisch erreicht werden?»

Und in Nr. 1/1986 des «Elektronikers» ist dann die Lösung vorgestellt worden (Bild 1). Wieder sei zitiert:

«Der Vierpolkenner erblickt darin ein nicht längssymmetrisches überbrücktes T-Glied.

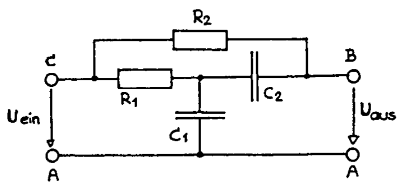

Bild 1 Vierpol in Problem Nr. 35: überbrücktes T-Glied.

Das Maximum von $|v_u|$ erhalten wir mit

$$R_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\omega C_1}$$

und

$$R_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\omega C_2}$$

Um die Belastung des ersten Gliedes klein zu halten, wählen wir mit grossem Faktor k

$$R_2 = k \cdot R_1 \quad \text{und} \quad C_2 = \frac{1}{k} \cdot C_1.$$

Mit $k \to \infty$ ergibt sich das Maximum zu $|v_u| = 1{,}1547$. Mit $k = 10$ ist noch $|v_u| = 1{,}1426$ zu erhalten.»

Diese Aufgabe und ihre Lösung haben Herrn Kurt Steudler, Dozent an der Ingenieurschule Bern HTL, dazu angeregt, dieses Problem eingehend zu analysieren. Hier nun seine Überlegungen:

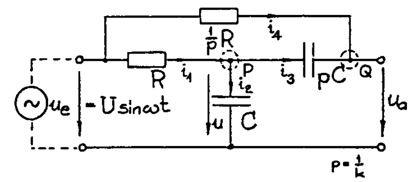

Bild 2 Vierpol nach Bild 1, umgezeichnet. Der Faktor k ist ersetzt mit 1/p.

Frequenzgang, Amplitudengang, Phasengang

Am Vierpol (nach Bild 2) seien gesucht der Frequenzgang u_a/u_e und daraus der Amplitudengang und der Phasengang. Mit den Kirchhoffschen Regeln und mit $j = \sqrt{-1}$ werden in den Knoten P und Q:

$$P: \frac{u_e - u}{R} = u \cdot j\omega C + (u - u_a) \cdot j\omega pC$$

$$|i_1 = i_2 + i_3$$

$$Q: (u - u_a) \cdot j\omega pC + \frac{u_e - u_a}{R} \cdot p = 0$$

$$|i_3 + i_4 = 0$$

Wir ersetzen den Ausdruck $\omega RC = 2\pi fRC = K \cdot f$ mit der normierten Kreisfrequenz $\Omega = f \cdot 2\pi RC$ und erhalten, geordnet, das lineare Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{l} [1 + j(1+p)\Omega] \cdot u - \quad jp\Omega \cdot u_a = u_e \\ \quad -j\Omega \cdot u + \quad (1 + j\Omega) \cdot u_a = u_e \end{array} \right|$$

mit den Unbekannten u und u_a.

Aufgelöst nach Sarrus (Cramersche Regel, Determinantenlösung) wird der Frequenzgang:

$$\boxed{\frac{u_a}{u_e} = \frac{1 + j \cdot (2+p)\Omega}{(1 - \Omega^2) + j(2+p)\Omega}} \qquad (1)$$

Daraus werden für den Amplitudengang

$$a = 20 \lg \left|\frac{u_a}{u_e}\right| \mathrm{dB}$$

der Betrag

$$\boxed{\left|\frac{u_a}{u_e}\right| = \sqrt{\frac{1 + (2+p)^2 \Omega^2}{(1 - \Omega^2)^2 + (2+p)^2 \Omega^2}}} \qquad (2)$$

und für den Phasengang $\varphi \left\{\frac{u_a}{u_e}\right\}$

$$\boxed{\varphi = -\arctan \frac{(2+p)\Omega^3}{1 + [(2+p)^2 - 1] \cdot \Omega^2}} \qquad (3)$$

Das Maximum für $|u_a/u_e|$ stellt sich dort ein, wo

$$\frac{d}{d\Omega} \left(\left|\frac{u_a}{u_e}\right| (\Omega) \right) \Bigg|_{\Omega_M} = 0 \text{ wird.}$$

Aus dieser Bestimmungsgleichung ergibt sich

$$(2+p)^2 \Omega_M^4 + 2\Omega_M^2 - 2 = 0 \qquad (4a)$$

und daraus

$$\Omega_M = \frac{\sqrt{\sqrt{1 + 2(2+p)^2} - 1}}{(2+p)} \qquad (4b)$$

Mit $p = 0{,}1$ ($k = 10$) liegt das Maximum für $|u_a/u_e|$ bei $\Omega_M = 0.69\,558$. Es wird dann $|u_a/u_e|_{Max} = 1{,}1426 \mathrel{\hat{=}} +1{,}158$ dB.

Praktische Dimensionierung

Mit den Bauelementen $R = 18\,\mathrm{k\Omega}$ und $C = 820$ pF wird dieses Maximum erreicht bei einer Frequenz von

$$f_M = \frac{\Omega_M}{2\pi \cdot RC} = \frac{0{,}69558}{2 \cdot \pi \cdot 18 \cdot 10^3 \cdot 820 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{s}} = 7{,}5\,\mathrm{kHz}.$$

Keine Dämpfung ergibt sich für $\Omega = 0$ und aus $|u_a/u_e||_{\Omega_1} = 1$ bei $\Omega_1 = \sqrt{2}$.

Mit den gewählten Bauelementen ist das bei

$$f_1 = \frac{\Omega_1}{2\pi RC} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi RC} = 15{,}25\,\mathrm{kHz}$$

der Fall.

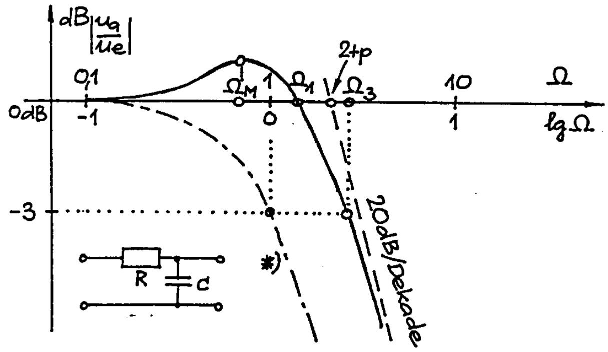

Bild 3 Qualitativer Amplitudengang

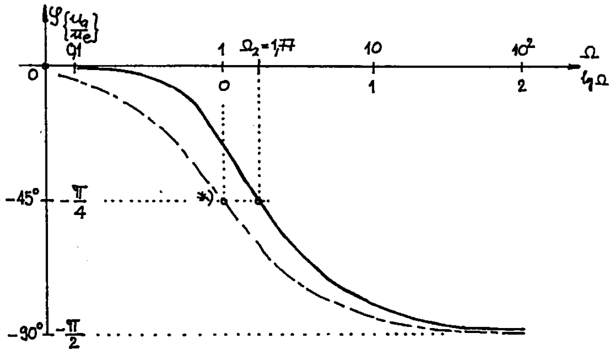

Bild 4 Qualitativer Phasengang

Die Dämpfung

$$-3\,\text{dB} \mathrel{\hat{=}} \left|\frac{u_a}{u_e}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

stellt sich aus

$$\left|\frac{u_a}{u_e}\right|_{\Omega_3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ein bei } \Omega_3 = 2{,}56172$$

$$\text{mit } \Omega_3^4 - [(2+p)^2 + 2]\,\Omega_3^2 - 1 = 0 \tag{5a}$$

und daraus

$$\Omega_3 = \sqrt{\frac{[(2+p)^2+2] + \sqrt{[(2+p)^2+2]^2+4}}{2}} \tag{5b}$$

Mit weiterhin p = 0,1 (k = 10) liegt der −3-dB-Punkt bei f_3 = 27,623 kHz.
Im theoretischen Fall mit p = 0 (k → ∞) stellen sich ein

Ω	$\left\|\frac{u_a}{u_e}\right\|$	dB $\left\|\frac{u_a}{u_e}\right\|$	φ in °	φ in rad
0	1	0	0	0
0,69558	1,1426	+1,158	−14,934	−0,2606
1	1,108	+0,89	−25,463	−0,4444
$\sqrt{2}$ ≈ 1,4142	1	0	−37,219	−0,6496
2,56172	$\frac{1}{\sqrt{2}}$ ≈ 0,707	−3	−56,487	−0,9859
10	0,208	−13,65	−80,750	−1,4094
100	0,021	−33,56	−89,070	−1,5546
1000	0,002	−53,56	−89,907	$\approx -\frac{\pi}{2}$

Tabelle 1

Mit *) ist der Frequenzgang für ein einfaches R-C-Glied angedeutet.
Der Phasengang ist qualitativ in Bild 4 dargestellt. Der Winkel φ = −π/4 (≙ −45°) ergibt sich aus (3) an der Stelle Ω_2 = 1,77 mit $(2+p)\Omega_2^3 - [(2+p)^2 - 1]\Omega_2^2 - 1 = 0$

Falls die Spannungsüberhöhung von +1,158 dB ohne Belang ist lässt sich mit dem Zusatz von 1/p · R (kR = R_2) und pC (1/k · C = C_2) eine höhere Grenzfrequenz f_3 verwirklichen.

Messanordnung

Für eine Messung kann die Anordnung nach Bild 5 dienen. Mit den angegebenen Werten liegen die gemessenen Frequenzen 10mal tiefer als die vorangehend berechneten Werte (dies wegen C = 8,2 nF statt 820 pF).
Die Ortskurve ist die grafische Darstellung der komplexen Zahl u_a/u_e mit dem Parameter Ω nach (1) in der Gaussschen Zahlenebene.
Konjugiert komplex erweitert wird aus (1)

$$\left|\frac{u_a}{u_e}\right|_{Max} \text{ nach (4b) bei } \Omega_M = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707 \text{ mit } \left|\frac{u_a}{u_e}\right| = \frac{2\sqrt{3}}{3} = 1{,}154$$

$$\text{und } \left|\frac{u_a}{u_e}\right| = -3\,\text{dB nach (5b) bei } \Omega_3 = \sqrt{3+\sqrt{10}} = 2{,}4824$$

$$\frac{u_a}{u_e} = \underbrace{\frac{(1-\Omega^2) + (2+p)^2\Omega^2}{(1-\Omega^2)^2 + (2+p)^2\Omega^2}}_{\text{Realteil Re}} + j \cdot \underbrace{\frac{-(2+p)\cdot\Omega^3}{(1-\Omega^2)^2 + (2+p)^2\Omega^2}}_{\text{Imaginärteil Im}} \tag{6}$$

Amplitudengang und Phasengang mit p = 0,1 (k = 10) sind in Tabelle 1 aufgelistet.

Der Amplitudengang ist qualitativ in Bild 3 dargestellt mit der Asymptote

$$\left|\frac{u_a}{u_e}\right|_A = \frac{2+p}{\Omega}$$

aus (2) für hohe Frequenzen.

In den Bildern 3 und 4 sind der gegebene Vierpol und das einfache R-C-Glied einander gegenübergestellt.
Amplitudengang und Phasengang schieben sich im gegebenen spannungsverstärkenden Vierpol zu höheren Frequenzen hin. Der −3-dB-Punkt wird bei der 2,56fachen, der Phasenwinkel −π/4 (≙ −45°) bereits bei der 1,8fachen Frequenz erreicht.

Die Ortskurve des eigenartigen Vierpols mit Spannungsüberhöhung $|v_u| > 1$ ist in Bild 6 qualitativ gezeigt.

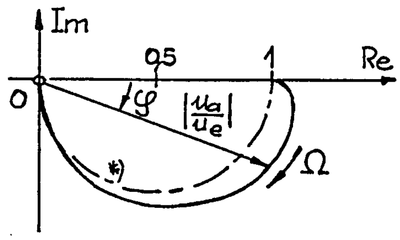

Bild 6 Der Frequenzgang, qualitativ als Ortskurve dargestellt.

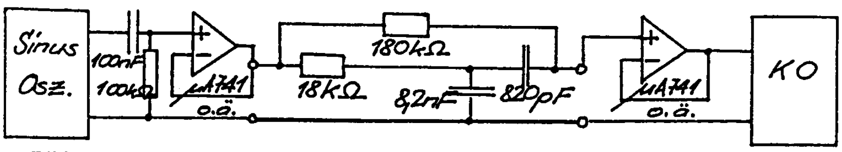

Bild 5 Mögliche Messschaltung mit OpAmp-Ein- und -Auskopplung.