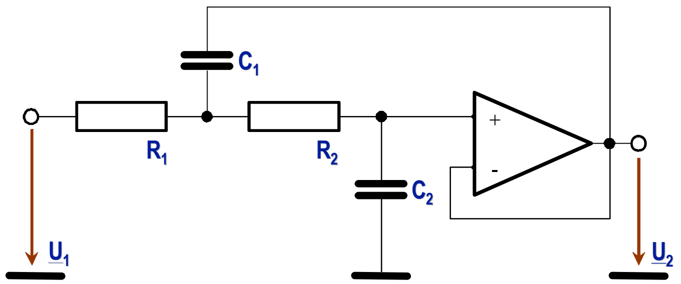
Beispiel 9: Aktiver Tiefpass 2. Ordnung (Mitkopplung)

Gegeben sei der aktive, mitgekoppelte Tiefpassfilter zweiter Ordnung gemäss nachfolgender Abbildung im sekundärseitigen Leerlauf ($\underline{I}_2 = 0$).



$R_1 = 15\,\mathrm{k}\Omega$
$R_2 = 15\,\mathrm{k}\Omega$
$C_1 = 160\,\mathrm{pF}$
$C_2 = 160\,\mathrm{pF}$

a) Übertragungsfunktion f(p)

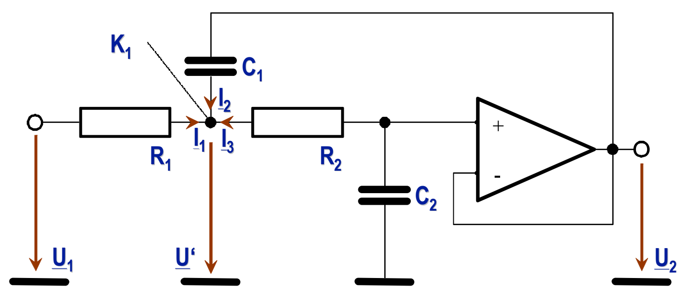
Zu bestimmen ist die Übertragungsfunktion in Abhängigkeit der Grössen p, R_1, R_2, C_1 C_2 ($f(p) = f(p, R_1, R_2, C_1, C_2)$).

b) Darstellung der Übertragungsfunktion

Die in a) errechnete Übertragungsfunktion soll für die in der Aufgabenstellung gegebenen Werte nach Bode in Amplituden und Phasengang dargestellt werden.

a) Berechnen der Übertragungsfunktion f(p)

Zur Bestimmung der Übertragungsfunktion wird der Operationsverstärker idealisiert – gleiches Potential an beiden Eingängen und kein Stromfluss zum OP. Anschliessend werden die Hilfsspannung $\underline{U}'$ und für den Knoten K_1 die zugehörigen Ströme eingeführt. Berechnet wird die Übertragungsfunktion mit Hilfe des Knotenpotenzialverfahrens.



Gemäss der Spannungsteilerregel gilt für die Hilfsspannung $\underline{U}'$:

$$\frac{\underline{U}'}{R_2 + \frac{1}{pC_2}} = \underline{U}_2 pC_2 = \frac{\underline{U}' pC_2}{pR_2C_2 + 1}$$

$$\boldsymbol{\underline{U}' = \underline{U}_2 (pR_2C_2 + 1)}$$ Gleichung ①

Für den Knoten K_1 gilt: $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$

Die Ströme werden durch Ausdrücke mit Spannungen und Impedanzen ersetzt.

$$\frac{\underline{U}_1 - \underline{U}'}{R_1} + \left(\underline{U}_2 - \underline{U}'\right) pC_1 - \frac{\underline{U}'}{R_2 + \frac{1}{pC_2}} = 0$$

$$\frac{\underline{U}_1 - \underline{U}'}{R_1} + \left(\underline{U}_2 - \underline{U}'\right) pC_1 - \frac{\underline{U}' pC_2}{pR_2C_2 + 1} = 0$$

$$-\underline{U}'\left(\frac{1}{R_1} + pC_1 + \frac{pC_2}{pR_2C_2 + 1}\right) + \frac{\underline{U}_1}{R_1} + \underline{U}_2 pC_1 = 0$$

In diesen Ausdruck wird nun Gleichung ① eingesetzt,

$$-\underline{U}_2\left(pR_2C_2+1\right)\left(\frac{1}{R_1}+pC_1+\frac{pC_2}{pR_2C_2+1}\right)+\frac{\underline{U}_1}{R_1}+\underline{U}_2pC_1=0$$

$$-\underline{U}_2\left(\frac{pR_2C_2+1}{R_1}+pC_1\left(pR_2C_2+1\right)+\frac{pC_2\left(pR_2C_2+1\right)}{pR_2C_2+1}-pC_1\right)+\frac{\underline{U}_1}{R_1}=0$$

und daraus anschliessend die Übertragungsfunktion bestimmt.

$$-\underline{U}_2\left(pR_2C_2+1+pR_1C_1\left(pR_2C_2+1\right)+pR_1C_2-pR_1C_1\right)+\underline{U}_1=0$$

$$-\underline{U}_2\left(p^2R_1R_2C_1C_2+p\left(R_2C_2+R_1C_2\right)+1\right)+\underline{U}_1=0$$

$$-\underline{U}_2\left(p^2R_1R_2C_1C_2+p\left(R_2C_2+\tfrac{R_1}{R_2}R_2C_2\right)+1\right)+\underline{U}_1=0$$

$$-\underline{U}_2\left(p^2R_1R_2C_1C_2+pR_2C_2\left(1+\tfrac{R_1}{R_2}\right)+1\right)+\underline{U}_1=0$$

Wir führen ein:

$$T=\sqrt{R_1R_2C_1C_2}$$

Und stellen die Gleichung wie folgt um:

$$-\underline{U}_2\left(\left(pT\right)^2+\alpha\cdot pT+1\right)+\underline{U}_1=0$$

Durch Koeffizientenvergleich bestimmen wir den Faktor α.

$$\alpha\cdot\sqrt{R_1R_2C_1C_2}=R_2C_2\left(1+\tfrac{R_1}{R_2}\right)$$

$$\alpha=\sqrt{\frac{R_2^2C_2^2}{R_1R_2C_1C_2}}\left(1+\tfrac{R_1}{R_2}\right)$$

$$\boldsymbol{\alpha}=\sqrt{\frac{\mathbf{R_2C_2}}{\mathbf{R_1C_1}}}\left(\mathbf{1}+\tfrac{\mathbf{R_1}}{\mathbf{R_2}}\right)$$

Somit gilt für die Übertragungsfunktion:

$$\mathbf{f\left(p\right)=\frac{1}{\left(pT\right)^2+\boldsymbol{\alpha}\cdot pT+1}}\Bigg|_{\substack{\mathbf{T}=\sqrt{\mathbf{R_1R_2C_1C_2}}\\ \boldsymbol{\alpha}=\sqrt{\frac{\mathbf{R_2C_2}}{\mathbf{R_1C_1}}}\left(1+\frac{\mathbf{R_1}}{\mathbf{R_2}}\right)}}$$

b) Darstellen der Übertragungsfunktion

Zur Darstellung der Übertragungsfunktion bestimmen wir anhand der vorgegebenen Werte für die Widerstände und Kondensatoren zuerst den Faktor α

$$\boldsymbol{\alpha}=\sqrt{\frac{R_2C_2}{R_1C_1}}\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)=\sqrt{\frac{15\cdot10^3\cdot160\cdot10^{-12}}{15\cdot10^3\cdot160\cdot10^{-12}}}\left(1+\frac{15\cdot10^3}{15\cdot10^3}\right)=\mathbf{2}$$

und dann die Nullstellen des Nennerpolynoms der Übertragungsfunktion.

$$f\left(p\right)=\frac{1}{\left(pT\right)^2+2pT+1}=\frac{1}{\left(pT+1\right)\left(pT+1\right)}$$

Zur Berechnung der Grundverstärkung und der Güte wird die Übertragungsfunktion normiert:

$$P=j\frac{\omega}{\omega_g}$$

Dabei gilt für die Grundverstärkung A0:

$$f\left(P\right)=A_0\frac{1}{1+\alpha\cdot P+P^2}=1\cdot\frac{1}{1+\alpha\cdot P+P^2}$$

$$\mathbf{A_0=1}$$

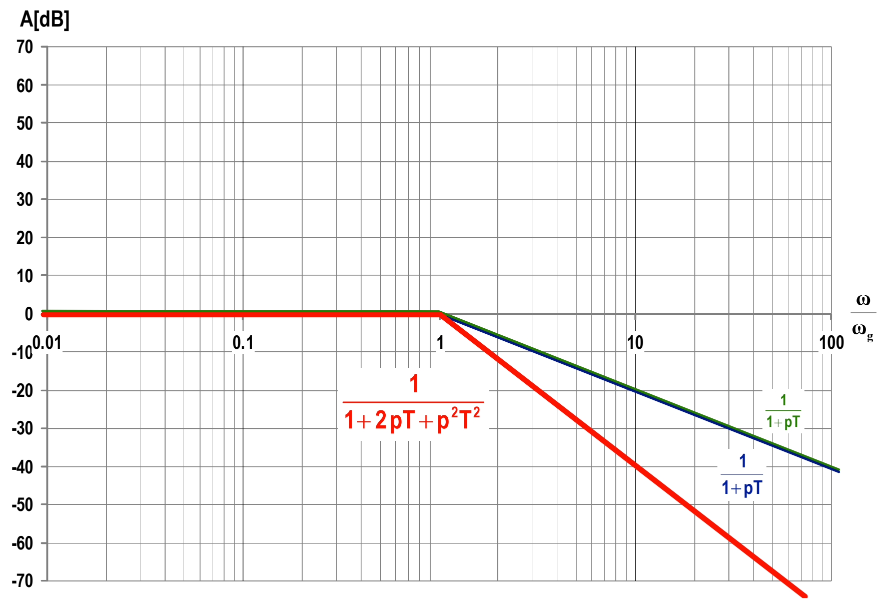
Zur Bestimmung der Güte berechnen wir den Betrag des Amplitudenganges bei der Grenzfrequenz □g.

$$\left|f\left(j\right)\right|=\left|\frac{1}{j^2+\alpha\cdot j+1}\right|=\left|\frac{1}{-1+\alpha\cdot j+1}\right|=\frac{1}{\alpha}$$

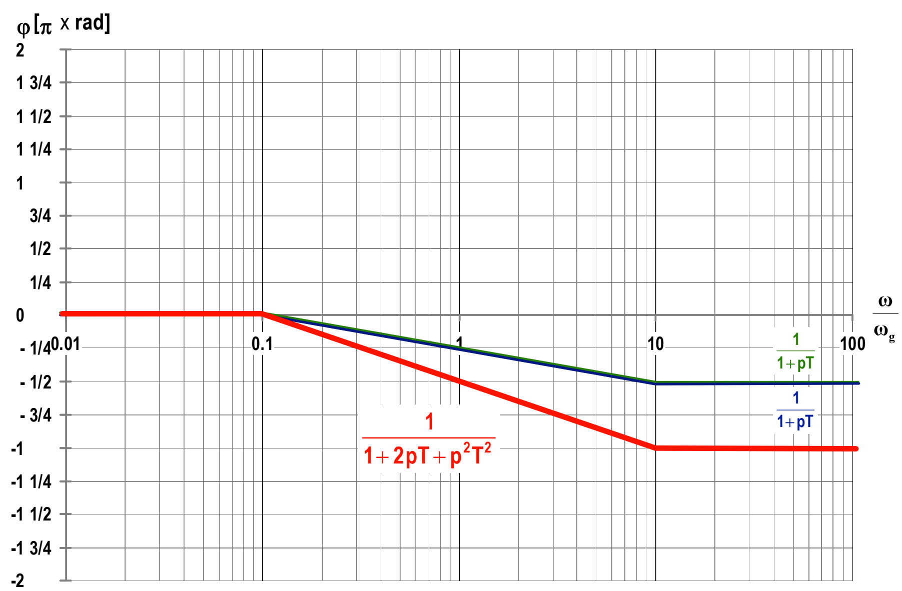
Die Güte Q entspricht dem reziproken Wert dieses Betrages.

$$\mathbf{Q}=\boldsymbol{\alpha}$$

Amplitudengang



Phasengang



Das Filter weist klare Tiefpasscharakteristik auf. Doch im Gegensatz zur gegengekoppelten Schaltung fehlt hier die parasitäre Grundphasendrehung von 180°.