

## 4 Einscheibenmodell

Das Einscheibenmodell<sup>1</sup> zeigt uns Abbildung 4.1. Es handelt sich dabei um eine Scheibe mit vier Zusatzgewichten, die von einem Gleichstrom Servomotor der Firma Maxon angetrieben wird. In unseren Anwendungsfällen repräsentiert die Scheibe eine Achse, die positionsgeregelt wird. Der Vorteil solcher Scheibenmodelle gegenüber Linearmodellen liegt darin, daß diese Scheibenmodelle keinen Einschränkungen, wie z.B. Berücksichtigung von Wegbegrenzungen und Referenzpositionen, unterliegen. Die Istgeschwindigkeit der Scheibe wird mit Hilfe eines direkt an der Welle befestigten Drehgebers ermittelt (in blauer Farbe, aufgesteckt auf den Motor).



Abbildung 4.1: Elektromechanisches Einscheibenmodell

<sup>1</sup> Das in Abbildung 4.1 gezeigte Modell wird in Folge Einscheibenmodell genannt

#### 4.1 Modellbildung und Zustandsraumdarstellung

Zur Modellbildung ist zu sagen, daß das System hier als total starr angesehen wird und damit keine Elastizitäten (z.B. der Welle) berücksichtigt werden. Diese Annahme ist im Falle des Einscheibenmodells sehr gut vertretbar.

Die Darstellung des Ersatzschaltbildes zeigt uns Abbildung 4.2.

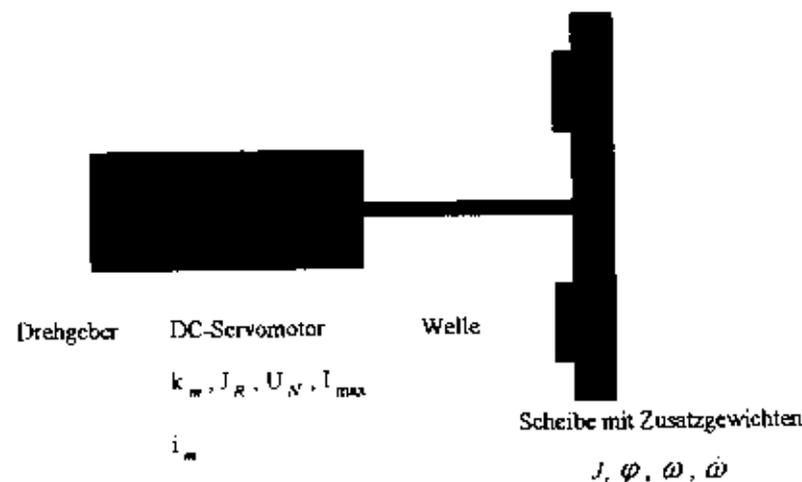


Abbildung 4.2: Ersatzschaltbild des Einscheibenmodells

Ausgangspunkt unserer Modellbildung ist der Drallsatz

$$J_{GES} \cdot \dot{\omega} = \sum M \quad , \quad (4.1)$$

der uns die Bewegungsgleichung formuliert. Dabei ist  $J_{GES}$  das gesamte Massenträgheitsmoment,  $\dot{\omega}$  die Winkelbeschleunigung und  $\sum M$  die Summe der angreifenden Momente.

Durch Verwendung der Beziehung

$$M = k_m \cdot i_m \quad (4.2)$$

( $k_m$  entspricht der Drehmomentkonstanten) und Einsetzen von (4.2) in (4.1) mit  $\dot{\omega} = \dot{\varphi}$ , erhält man

$$J_{GES} \cdot \ddot{\varphi} = k_m \cdot i_m \quad (4.3)$$

In regelungstechnischen Anwendungen ist es häufig zweckmäßig, das System in eine Zustandsraumdarstellung zu bringen. Dazu muß man zunächst Zustandsvariable einführen, die als Gesamtheit den Zustand des Systems charakterisieren. Allgemein läßt sich ein System n-ter Ordnung in ein System mit n-Differentialgleichungen erster Ordnung umformen.

Die Zustandsraumdarstellung in allgemeiner Form lautet

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \cdot \underline{x}(t) + \underline{B} \cdot \underline{u}(t) \quad (4.4)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C} \cdot \underline{x}(t) + \underline{D} \cdot \underline{u}(t), \quad (4.5)$$

wobei  $\underline{x}$  den Zustandsvektor,  $\underline{u}$  den Eingangsvektor,  $\underline{y}$  den Ausgangsvektor,  $\underline{A}$  die Koeffizientenmatrix,  $\underline{B}$  die Eingangsmatrix,  $\underline{C}$  die Ausgangsmatrix und  $\underline{D}$  die Durchgangsmatrix bedeutet.

Für die Zustandsgrößen ergeben sich folgende Zusammenhänge:

$$x_1 = \varphi \quad (4.6)$$

$$x_2 = \dot{\varphi} \quad (4.7)$$

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (4.8)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{k_m}{J_{GES}} \cdot i_m \quad (4.9)$$

Für das System nach Gleichung (4.3) ergeben sich somit folgende Matrizen der Zustandsraumdarstellung

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ k_m \\ J_{GES} \end{pmatrix}$$

$$\underline{C} = (1 \quad 0) \quad \underline{D} = (0), \quad (4.10)$$

wobei der Stellgrößenvektor  $\underline{u}$  dem Motorstrom  $i_m$  entspricht und der Ausgangsvektor  $\underline{y}$  den Winkel  $\varphi$  in rad darstellt.

Nach /3/ ergibt sich aus dieser Zustandsraumdarstellung die Übertragungsfunktion des Systems unter Anwendung der Gleichung

$$G(s) = \underline{C} \cdot (s\underline{I} - \underline{A})^{-1} \cdot \underline{B} + \underline{D} . \quad (4.11)$$

Setzt man die Koeffizienten von Gleichung (4.10) in Gleichung (4.11) ein, so erhält man

$$G_1(s) = \frac{\varphi(s)}{i_m(s)} = \frac{k_m}{J_{GES} \cdot s^2} \quad (4.12)$$

für die Übertragungsfunktion Drehwinkel  $\varphi$  in rad zu Motorstrom  $i_m$  und mit  $\underline{C} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2\pi} \end{pmatrix}$

$$G_2(s) = \frac{n(s)}{i_m(s)} = \frac{k_m}{2\pi J_{GES} \cdot s} \quad (4.13)$$

für die Übertragungsfunktion Drehzahl  $n$  in  $\left[ \frac{\text{Umdr.}}{\text{sec}} \right]$  zu Motorstrom  $i_m$ .

Will man auch den Winkel in der Einheit "Umdrehungen", so muß man in Gleichung (4.10)

für den Ausgangsvektor  $\underline{C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi} & 0 \end{pmatrix}$  einsetzen und erhält somit

$$G_1(s) = \frac{\varphi(s)}{i_m(s)} = \frac{k_m}{2\pi J_{GES} \cdot s^2} \quad (4.14)$$

für die Übertragungsfunktion Drehwinkel  $\varphi$  in [U] zu Motorstrom  $i_m$  in [A].

Im Weiteren wird in der Arbeit der Drehwinkel als Position in Umdrehungen [U] und die Drehzahl in Umdrehungen je Sekunde [U/s] angegeben.

## 4.2 Gewinnung der Modellparameter

Die Modellparameter bzw. die Übertragungsfunktion der Strecke erhält man aus den Motordaten und aus den Abmessungen der Scheibe. Wie aus Gleichung (4.13) bzw. (4.14) zu ersehen ist, bedeutet dies die Bestimmung der Parameter  $k_m$  und  $J$ . Die Drehmomentkonstante erhält man direkt aus den Motordaten, während man das Massenträgheitsmoment des Systems durch eine Berechnung bestimmt.

Die Daten für den Gleichstrommotor zeigt Tabelle 4.1.:

Parameter	Symbol	Wert	Einheit
Drehmomentkonstante	$k_m$	191	mNm/A
Rotorträgheitsmoment	$J_R$	1210	gcm <sup>2</sup>
Nennspannung	$U_N$	48	V
Max. Dauerstrom	$I_{\text{max}}$	1.69	A
Anschlußwiderstand	$R_A$	5.41	Ohm
Anschlußinduktivität	$L_A$	2.03	mH

Tabelle 4.1: Gleichstrommotordaten Maxon Motor F2260.889-51.216-200

Daraus folgt eine Drehmomentkonstante von 191mNm/A.

Das Massenträgheitsmoment  $J_{\text{GES}}$  des Systems ergibt sich aus dem Massenträgheitsmoment der Scheibe  $J_s$ , den Massenträgheitsmomenten der Zusatzgewichte  $J_z$  und dem Rotorträgheitsmoment  $J_R$ . Die Formel zur Berechnung des gesamten Massenträgheitsmomentes zeigt Gleichung (4.15):

$$J_{\text{GES}} = J_s + 4 \cdot J_z + J_R = \frac{m_s \cdot r_s^2}{2} + 4 \cdot \left( \frac{m_z \cdot r_z^2}{2} + m_z \cdot r_a^2 \right) + J_R \quad (4.15)$$

Die Beschreibung der Parameter und der Werte der verwendeten Variablen in obiger Gleichung kann man Tabelle 4.1 und 4.2 entnehmen.

Parameter	Symbol	Wert	Einheit
Masse der Scheibe	$m_s$	1.237	kg
Radius der Scheibe	$r_s$	100	mm
Dicke der Scheibe	$d_s$	5	mm
Masse Zusatzgewicht	$m_z$	0.111	kg
Radius Zusatzgewicht	$r_z$	30	mm
Abstand Zusatzgewicht zur Achse	$r_a$	70	mm
Dicke Zusatzgewicht	$d_z$	5	mm

Tabelle 4.2: Daten der Stahlscheibe mit den Zusatzgewichten

Mit Hilfe der Daten aus Tabelle 4.1 und 4.2 und Gleichung 4.15 erhält man somit folgende Ergebnisse für die einzelnen Massenträgheitsmomente.

Parameter	Symbol	Wert	Einheit
Massenträgheitsmoment der Scheibe	$J_s$	6.2	$\text{gm}^2$
Massenträgheitsmoment eines Zusatzgewichtes	$J_z$	0.6	$\text{gm}^2$
Rotorträgheitsmoment	$J_R$	0.121	$\text{gm}^2$
Gesamtes Massenträgheitsmoment	$J_{GES}$	8.1	$\text{gm}^2$

Tabelle 4.3: Berechnete Massenträgheitsmomente

Somit erhalten wir für die Zustandsraumdarstellung nach Gl. (4.10) bzw. für die beiden Übertragungsfunktionen nach (4.13, 4.14)

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 23.58 \end{pmatrix} \quad \underline{C} = (1 \quad 0) \quad \underline{D} = (0) \quad (4.16)$$

$$G_1(s) = \frac{\varphi(s)}{i_m(s)} = \frac{3.75}{s^2} \left[ \frac{U/s^2}{A} \right] \quad G_2(s) = \frac{n(s)}{i_m(s)} = \frac{3.75}{s} \left[ \frac{U/s}{A} \right] \quad (4.17)$$

### 4.2.1 Simulationsmodell der Strecke

Damit man ein Simulationsmodell der Strecke unter *Matlab-Simulink* erstellen kann, geht man wieder von Gleichung (4.3) aus, wobei aber die Reibung in dieser Gleichung berücksichtigt werden muß. Man erhält somit folgenden Zusammenhang

$$\dot{\omega} = \frac{k_m}{J_{GES}} \cdot i_m - \frac{M_R}{J_{GES}} \cdot \text{sign}(\omega) \quad \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \right], \quad (4.18)$$

wobei  $M_R$  das Reibmoment bedeutet. Abbildung 4.3 zeigt das Simulationsmodell.

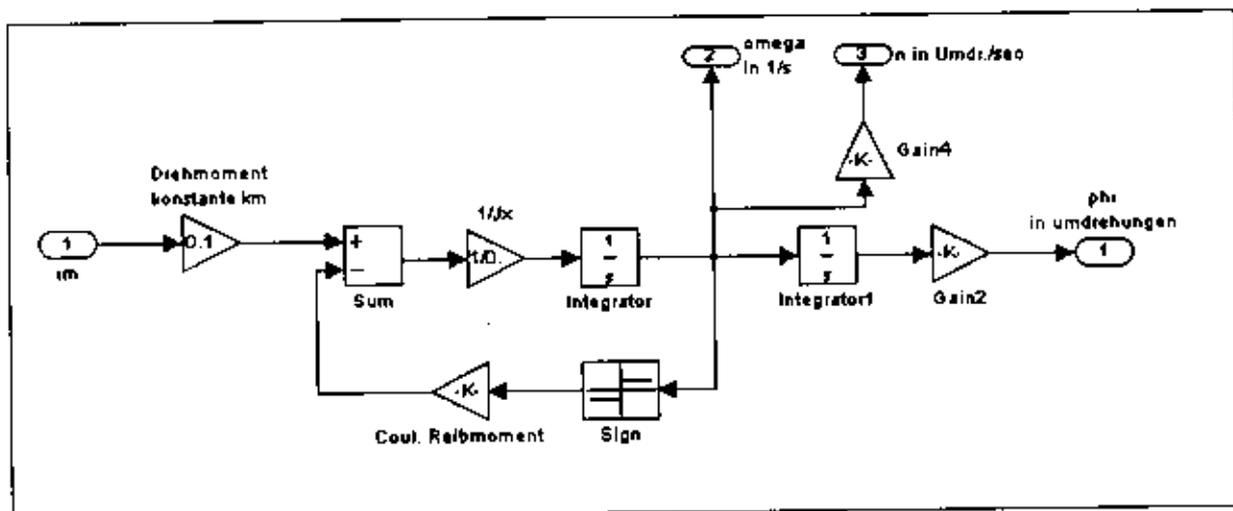


Abbildung 4.3: Simulationsmodell der Einscheibenmodell-Strecke

Dieses Simulationsmodell wurde noch ein wenig geändert, indem die Reibung nicht als Reibmoment sondern als Reibstrom berücksichtigt wurde. Da man das Reibmoment auch als

$$M_R = k_m \cdot i_{reib} \quad (4.19)$$

definieren kann, kann man die  $k_m$ -Multiplikation aus der Abbildung 4.3 zusammen mit der Umrechnung auf Umdrehungen in einen Block hinter der Differenzbildung ziehen und erhält somit ein Simulationsmodell (Abbildung 4.4), in dem die Reibung durch einen Reibstrom berücksichtigt wird.

Diesen Reibstrom kann man direkt messen, indem man die Strecke einfach auf eine bestimmte vernünftige Drehzahl regelt und den dabei sich einstellenden stationären Motorstrom mißt. Dieser stationäre Motorstrom entspricht dann dem Reibstrom. Beim Einscheibenmodell beträgt dieser Wert  $i_{\text{reib}} = 0.15\text{ A}$ , wenn keine weitere künstliche Reibung aufgebracht wird.

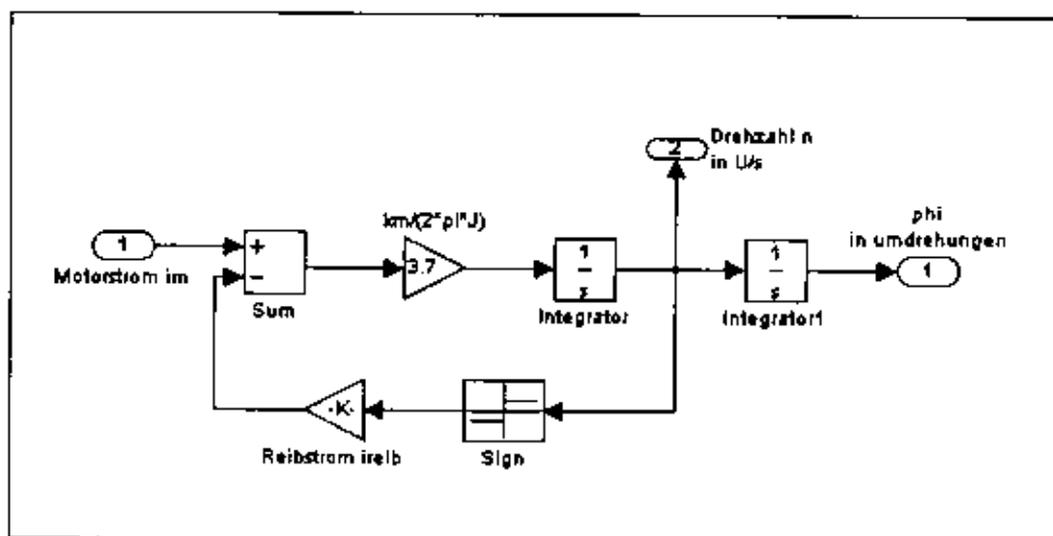


Abbildung 4.4: Verändertes Simulationsmodell der Einscheibenmodell-Strecke

### 4.3 Klassische einachsige Positionsregelung

#### 4.3.1 Reglerentwurf und Regelverfahren

Mit einer einachsigen klassischen Positionsregelung in Kaskadenstruktur, mit unterlagerter Drehzahlregelung, wird unser Einscheibenmodell positionsgeregelt. Zur Drehzahlregelung wird ein digitaler PI-Regler und zur Positionsregelung ein P-Regler verwendet.

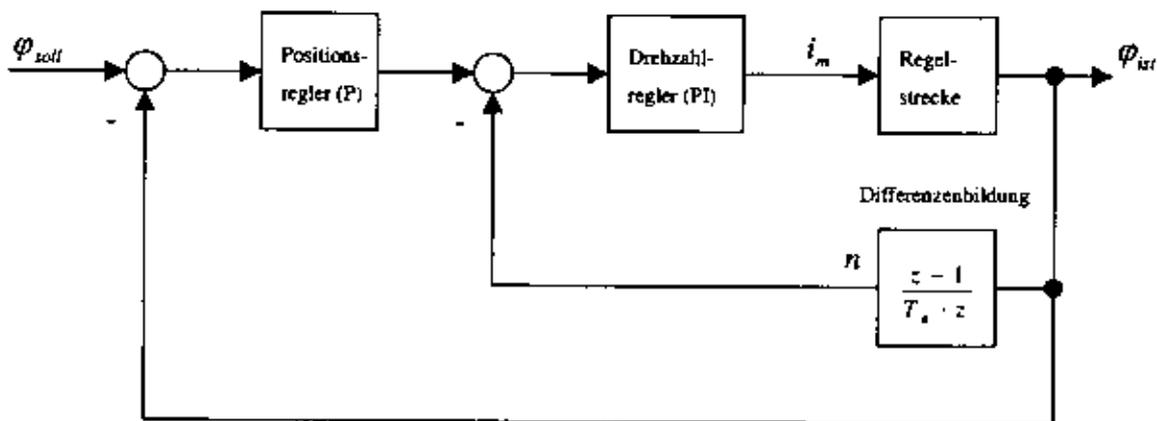


Abbildung 4.5: Positionsregelung in Kaskadenstruktur

Für den Reglerentwurf ist zunächst der innere Drehzahlregelkreis (PI-Regler) zu ermitteln, wobei berücksichtigt werden muß, daß die Istdrehzahl aus der Istposition durch Differenzenbildung erzeugt wird. Nach Ermittlung der Führungsübertragungsfunktion des geschlossenen Drehzahlregelkreises wird schließlich der Positionsregler (P-Regler) bestimmt.

Allgemein ist zum Entwurf zu sagen, daß die beiden Regler im Frequenzbereich ( $q$ -Bereich) ermittelt werden (siehe unter /1/, /2/, /3/ und /6/). Damit man dies bei digitalen Reglern, die im  $z$ -Bereich beschrieben werden, durchführen kann, muß zunächst eine bilineare Transformation angewendet werden. Durch diese bilineare Transformation wird der Einheitskreis aus dem  $z$ -Bereich auf die linke Halbebene im  $q$ -Bereich abgebildet. Dadurch erhält man den Vorteil, daß man bei der Reglerdimensionierung genauso wie bei kontinuierlichen Regelungen vorgehen kann, nur daß man anstatt im  $s$ -Bereich im  $q$ -Bereich arbeitet.

Die Formeln der bilinearen Transformation lauten

$$z = \frac{1 + \frac{T_a}{2} \cdot q}{1 - \frac{T_a}{2} \cdot q} \quad (4.20)$$

bzw. deren Umkehrung

$$q = \frac{2}{T_a} \cdot \frac{z-1}{z+1}, \quad (4.21)$$

wobei  $T_a$  die Abtastzeit bedeutet.

Zur Bestimmung des PI-Drehzahlreglers ist zunächst die Übertragungsfunktion der Strecke  $G_1(s)$  nach Gl. (4.17) in den  $z$ -Bereich zu transformieren. Das Ergebnis lautet

$$G_1(z) = \frac{\varphi(z)}{i_m(z)} = \frac{10^{-3} \cdot 0.1875 \cdot (z+1)}{z^2 - 2z + 1} \quad (4.22)$$

Nach Multiplikation von Gl. (4.22) mit dem Differenzenfaktor (aus Abbildung 4.5, zur Drehzahlgewinnung) erhält man

$$G(z) = \frac{n(z)}{i_m(z)} = G_1(z) \cdot \frac{z-1}{T_a \cdot z} = \frac{0.01875 \cdot (z^2 - 1)}{z \cdot (z^2 - 2z + 1)} \quad (4.23)$$

und nach anschließender  $q$ -Transformation

$$G(q) = \frac{n(q)}{i_m(q)} = \frac{-3.75q^2 + 750q}{q^3 + 200q^2} \quad (4.24)$$

Nach Multiplikation der Gleichung (4.24) mit der Übertragungsfunktion des PI-Reglers

$$K(q) = k_r \cdot \left( 1 + \frac{1}{qT_N} \right) \quad (4.25)$$

ergibt sich die Schleifenübertragungsfunktion des offenen Drehzahlregelkreises im q-Bereich

$$F_o(q) = K(q) \cdot G(q) = \frac{-0.375q^3 + 71.25q^2 + 750q}{0.1q^4 + 20q^3}, \quad (4.26)$$

wobei für die Nachstellzeit  $T_N$  des Reglers unter Vorgabe der Abtastzeit von  $T_a = 0.01s$  ein Wert von  $T_N = 0.1s$  und für die Reglerverstärkung zunächst  $k_r = 1$  gewählt wurde. Durch die Wahl der Nachstellzeit wird der maximale Phasenrand bestimmt (hier für  $T_N = 0.1 \Rightarrow \varphi_{R,\max} \approx 60^\circ$ ). Das Bodediagramm der Gleichung (4.26) zeigt Abbildung 4.6.

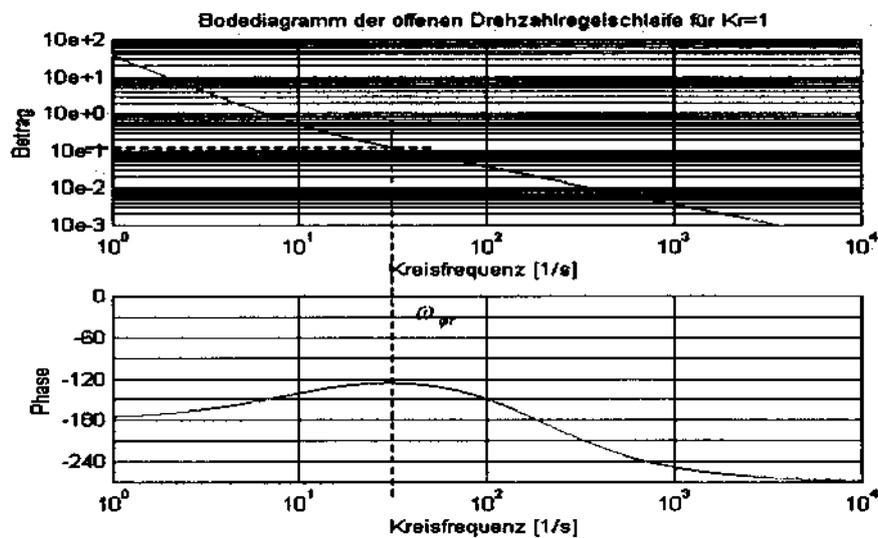


Abbildung 4.6: Bodediagramm der offenen Drehzahlregelschleife

Wählt man den maximalen Phasenrand  $\varphi_{R,\max} \approx 60^\circ$  bei einer Kreisfrequenz von  $\omega_{gf} = 29.981 \text{ 1/s}$ , so erhält man für die Reglerverstärkung  $k_r$ ,

$$k_r = \frac{1}{|F_o|_{\omega_{gf}}} = \frac{1}{0.1318} = 7.6 \quad (4.27)$$

Für den Entwurf des Positionsreglers benötigt man zunächst die Führungsübertragungsfunktion des Drehzahlregelkreises. Diese ergibt sich, wie in Abbildung 4.5 zu ersehen ist, aus der Serienschaltung von Regler und Strecke und der Rückkopplung über das Differenzglied zur Drehzahlgewinnung. Somit ergibt sich die Führungsübertragungsfunktion des Drehzahlregelkreises  $T(z)$

$$T(z) = \frac{\varphi(z)}{n_{\text{SOLL}}(z)} = \frac{K(z) \cdot G_1(z)}{1 + F_o(z)}, \quad (4.28)$$

wobei  $K(z)$  die Übertragungsfunktion des PI-Drehzahlreglers,  $G_1(z)$  die der Strecke und  $F_o(z)$  die Schleifenübertragungsfunktion des Drehzahlregelkreises bedeutet. Anschließend wird dieses  $T(z)$  in den  $q$ -Bereich transformiert. Dieses  $T(q)$  entspricht für einen Wert  $K_p = 1$  des Positionsreglers gleichzeitig der Schleifenübertragungsfunktion des Positionsregelkreises. Das Bodediagramm dieser Schleifenübertragungsfunktion zeigt Abbildung 4.7.

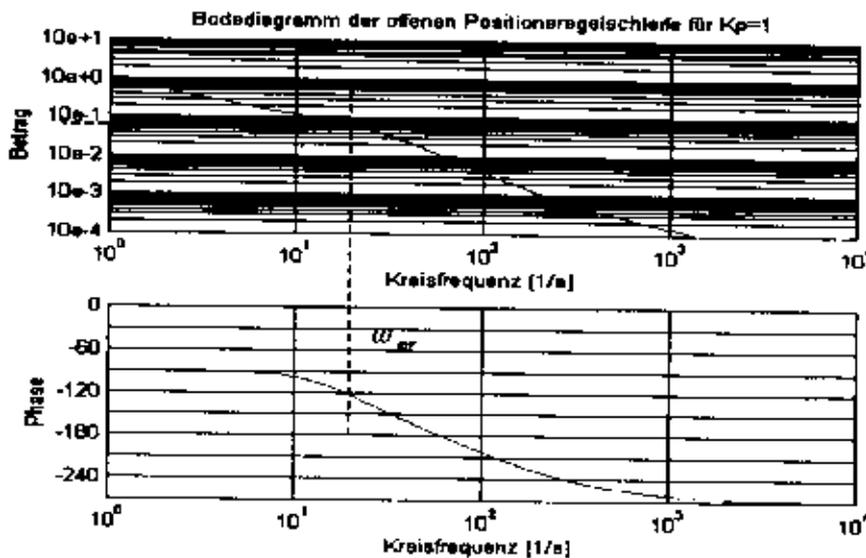


Abbildung 4.7: Bodediagramm der Schleifenübertragungsfunktion des Positionsregelkreises

Dimensioniert man wieder auf einen Phasenrand von ca.  $\varphi_{R,\text{max}} = 60^\circ$ , so erhält man bei einer Kreisfrequenz von  $\omega_{pr} = 18.47$  1/s den Wert der Verstärkung des P-Positionsreglers

$$K_p = \frac{1}{|f_{o,\text{pos schleife}}(q)|_{\omega=\omega_{pr}}} = \frac{1}{|T(q)|_{\omega=\omega_{pr}}} = \frac{1}{0.06885} = 14.5 \quad (4.29)$$

Die Reglerparameter lauten somit:

	Reglerparameter	Wert
Drehzahlregler	$k_r$	7.6
	$T_N$	0.1
Positionsregler	$K_P$	14.5

Tabelle 4.4: Reglerparameter nach Berechnung

In der Simulation unter *Matlab-Simulink* wurden diese Reglerparameter durch Probieren mit dem Ziel weiter optimiert, eine schnellere Regelung mit geringerem Positionsfehler zu erreichen. Dazu wurde zunächst der innere Drehzahlregelkreis optimiert, wobei bei gleichbleibender Nachstellzeit die Verstärkung in Richtung höherer Werte verschoben wurde. Je höher man dabei die Reglerverstärkung des Drehzahlreglers ansetzt, desto geringer wird der Positionsfehler in der Simulation. In der Echtzeit jedoch ergibt sich bei allzu hohen Verstärkungen eine sehr unruhige Stellgröße, sodaß man schließlich einen Kompromiß zwischen den beiden vorher erwähnten Effekten schließen muß. Den selben Effekt beobachtet man bei Erhöhung der Proportionalverstärkung des Positionsreglers. Die optimierten Reglerparameter zeigt Tabelle 4.5.

	Reglerparameter	Wert
Drehzahlregler	$k_r$	12
	$T_N$	0.1
Positionsregler	$K_P$	15

Tabelle 4.5: Optimierte Reglerparameter

Abbildung 4.8 auf der nächsten Seite zeigt das Simulationsblockschaltbild der klassischen Positionsregelung. Der Quantisierer in der Rückführung des Positionswertes stellt dabei die quantisierten Werte des Drehgebers und der anschließenden Auswertelogik entsprechend dem Zählerstand der Zähler dar.

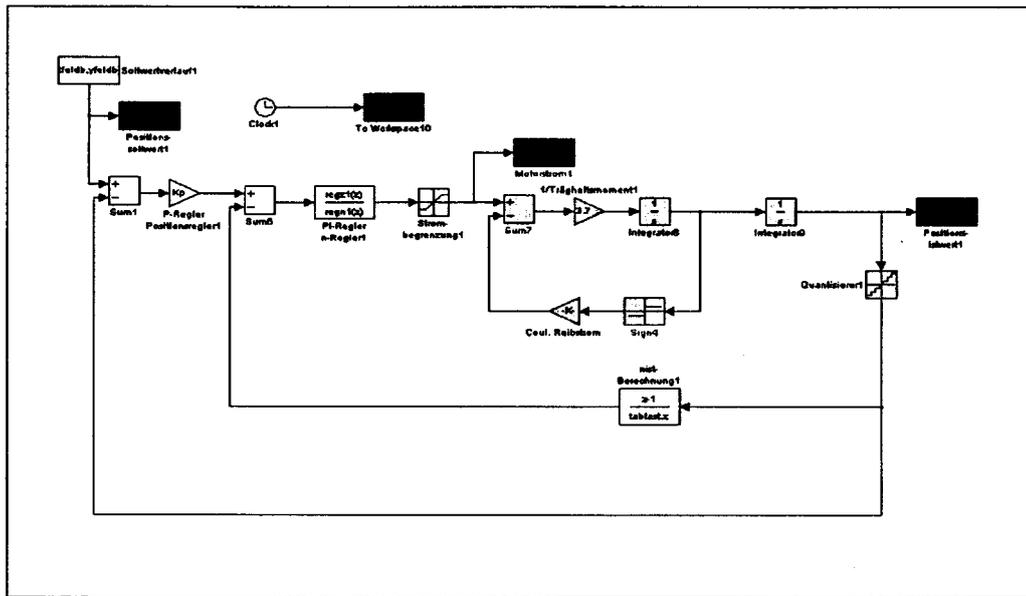


Abbildung 4.8: Matlab-Simulink-Modell der klassischen Positionsregelung

### 4.3.2 Positionsregelung mit Vorsteuerung

Zur Erhöhung der Regeldynamik und Verringerung des Positionsfehlers wird die Positionsregelung mit Vorsteuerung eingesetzt (siehe /5/ und /6/). Bei dieser Vorsteuerung werden entsprechend Abbildung 4.9 zusätzliche Sollwerte für die Drehzahl  $n$  und den Motorstrom  $i_m$  aufgeschaltet.

Hierbei berechnet man aus dem gegebenen Positionssollwert  $\varphi_{soll}$  den Drehzahlsollwert  $n_{soll}$  aus

$$n_{soll} = \frac{z-1}{T_a \cdot z} \cdot \varphi_{soll} \quad \left[ \frac{U}{s} \right], \tag{4.30}$$

wenn  $\varphi_{soll}$  in Umdrehungen angegeben wird, und aus  $n_{soll}$  berechnet man den zur Sollbeschleunigung proportionalen Ankerstrom

$$i_{m,soll} = \frac{z-1}{T_a \cdot z} \cdot n_{soll} \cdot \frac{2\pi \cdot J}{k_m} \quad [A] \tag{4.31}$$

Schaltet man diese beiden Größen als zusätzliche Sollwerte auf, so kommt man zur Positionsregelung mit Drehzahl- und Beschleunigungsvorsteuerung, die wesentliche Verbesserungen in Richtung Positionsfehler und Regeldynamik ergeben, wie wir im folgenden Unterkapitel sehen werden.

Abbildung 4.9 zeigt den grundsätzlichen Aufbau einer Positionsregelung mit Vorsteuerung und Abbildung 4.10 das Simulationsmodell dieses Aufbaus.

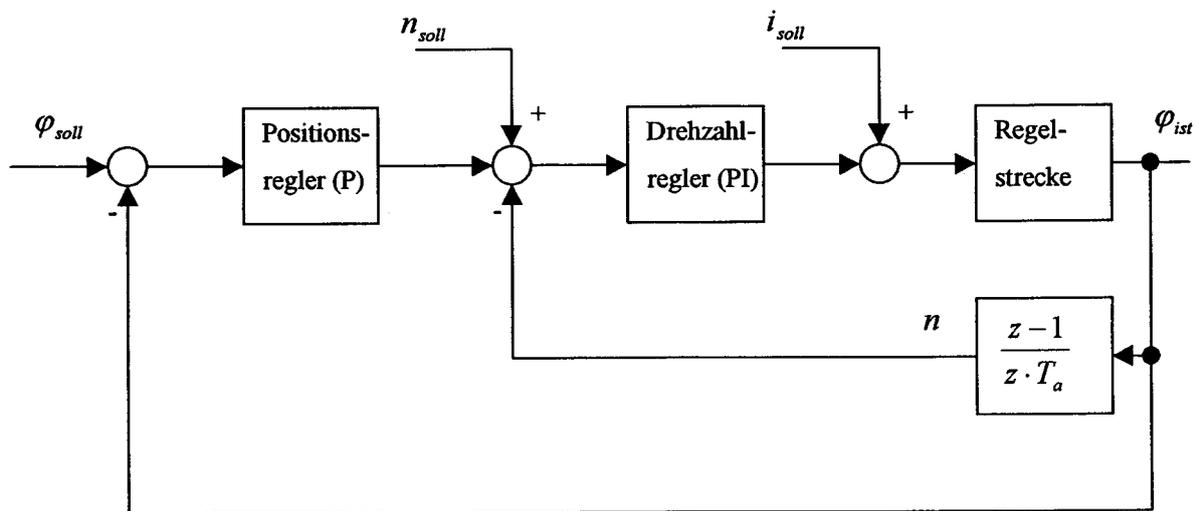


Abbildung 4.9: Positionsregelung mit Drehzahl- und Beschleunigungsvorsteuerung

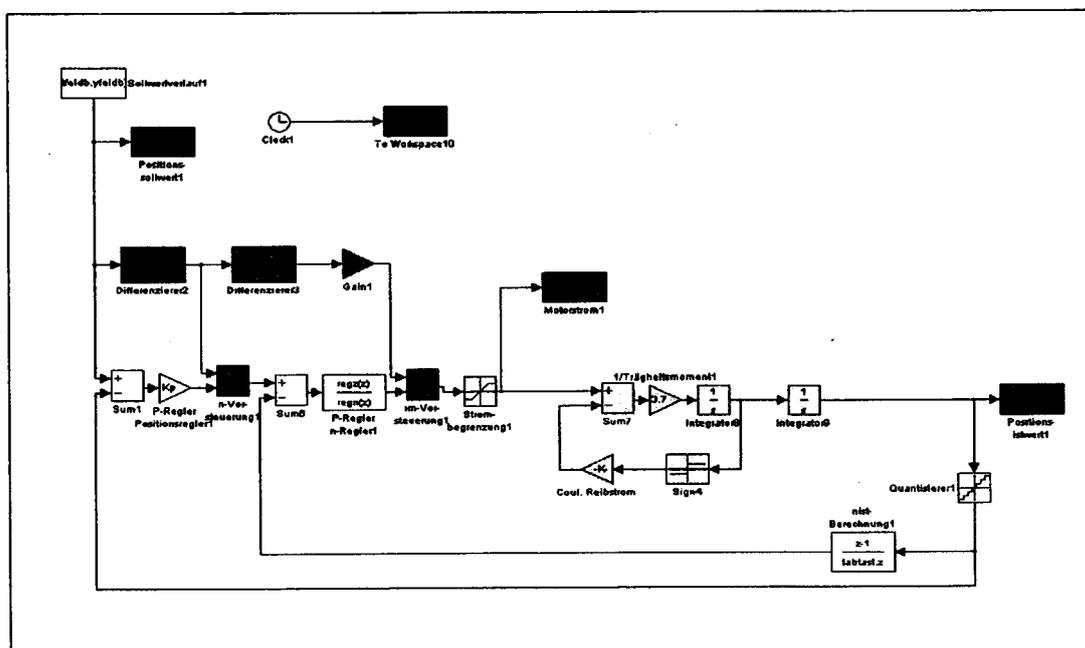


Abbildung 4.10: Matlab-Simulink-Modell der gesamten Vorsteuerung