4. Technische Realisierung

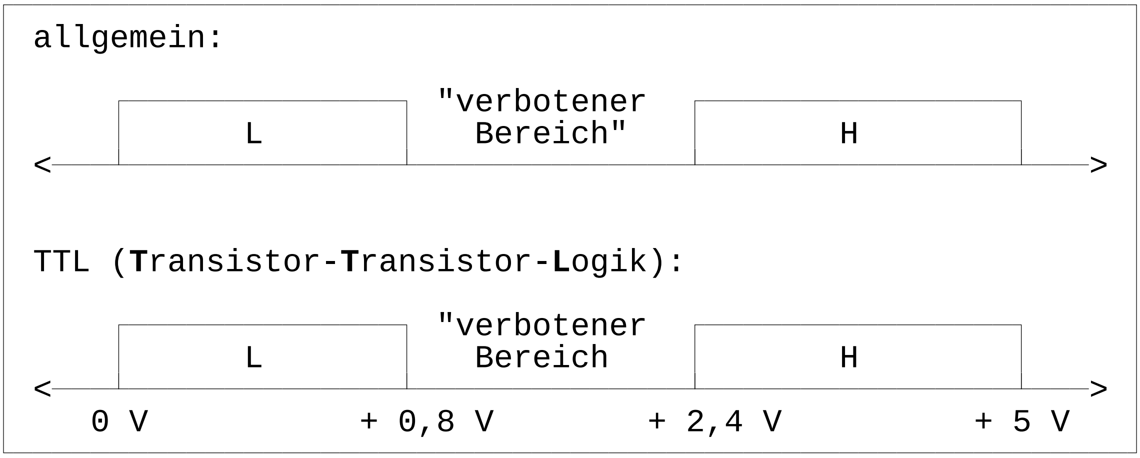
Sie erinnern sich:

Ein Signal ist eine zeitlich veränderliche physikalische Größe, die eine auf sie abgebildete Information trägt.

Hier:

physikalische Größe = elektrische Spannung als Informationsträger
Information = binär kodiert

Es wäre denkbar, jedem Symbol der Menge B = {0,1} einen bestimmten, wohlunterscheidbaren Spannungs**wert** zuzuordnen. Technische Systeme haben es aber an sich, Werte nur innerhalb gewisser Grenzen konstant halten zu können. Aus diesem Grunde ordnet man jedem Symbol einen bestimmten, wohlunterscheidbaren Spannungs**bereich** zu, der auch unter extremen Verhältnissen (Temperatur, Betriebsspannung, Last,...) eingehalten werden kann. Der mathematisch kleinere der beiden Bereiche heißt "LOW" ("L"), der mathematisch größere "HIGH" ("H").



Man unterscheidet zwei Arten der Zuordung der Symbole der Menge B = {0,1} zu den Symbolen der Menge U = {L,H}:

positive Logik:	B <—> U	negative Logik:	B <—> U
	0 <—> L		0 <—> H
	1 <—> H		1 <—> L

Beispiel 4.1 (Vorgriff auf **Logikgatter**)

Gegeben sei ein Logikgatter der Funktion $y = f(x_1,x_2)$. Die technische Funktion $y = f_t(x_1,x_2)$ mit $y,x_1,x_2 \in \{L,H\}$ sei durch die unten in der Mitte angegebene Wahrheitstabelle beschrieben.

x1	x2	y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

logische Funktion in positiver Logik

$y = x1 \wedge x2$

x1	x2	y
L	L	L
L	H	L
H	L	L
H	H	H

technische Funktion

x1	x2	y
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

logische Funktion in negativer Logik

$y = x1 \vee x2$

Interpretiert man die technische Funktion in positiver Logik, so ergibt sich die linke Wahrheitstabelle. Wählt man die Interpretation in negativer Logik, folgt daraus die rechte Wahrheitstabelle. Auslesen der Wahrheitstabellen (Vorgriff auf die BOOLEsche Algebra) liefert für die positive Logik die Konjunktion (AND) $y = x_1 \wedge x_2$ und die negative Logik die Disjunktion (OR) $y = x_1 \vee x_2$.

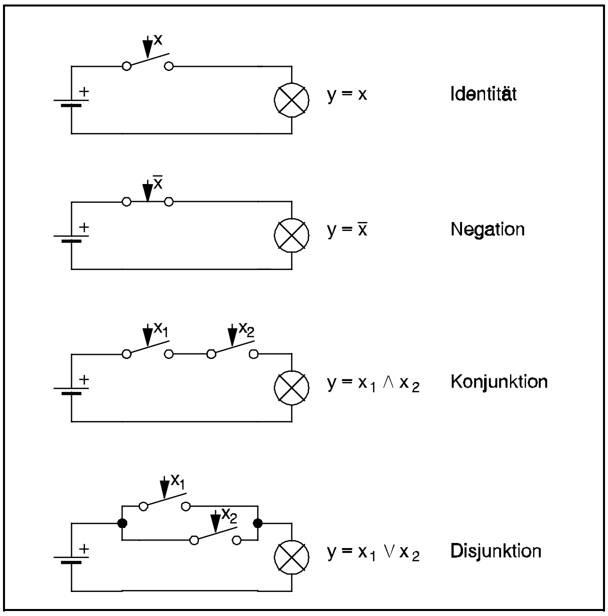
Ein Logikgatter, das - in positiver Logik betrieben - ein AND-Gatter ist, ist - in negativer Logik betrieben - ein OR-Gatter, und umgekehrt. Konjunktion und Disjunktion bilden ein **duales Funktionspaar** (vgl. Dualität der Wellen- und Teilchennatur des Lichts).

Bauelementehersteller, die nicht wissen können, in welcher Logik der Anwender ein Gatter betreiben wird, geben die Wahrheitstabellen deshalb stets in technischen Pegeln U = {L,H} an, obwohl für jede Schaltkreisreihe eine Vorzugszuordnung definiert ist (für TTL ist das die positive Logik). Anwender (und wir in der Lehre) verwenden so gut wie immer die logischen Pegel B = {0,1}. Im Hardwarepraktikum werden wir uns etwas genauer mit TTL-Gattern befassen.

Noch eine Bemerkung zum "Verbotenen Bereich". Ein Logikgatter wird dann korrekt betrieben, wenn der Pegel nicht in den verbotenen Bereich kommt. Die Gatter "bringen" das aber (Hinweis für die "Bastler").

Eine ältere Form der technischen Realisierung ist die mittels elektrischer Schaltkontakte. Diese Realisierung hat den Vorteil, daß sie gut verständlich ist. Die BOOLEsche Algebra wurde früher überhaupt nur "Schaltalgebra" genannt, da die Beschreibung von Relaisschaltungen das erste technisch relevante Anwendungsgebiet der BOOLEschen Algebra war. Informationsträger ist hier der elektrische Strom. Den Symbolen B = {0,1} werden die Stromwerte I = $\{0, I_1\}$ zugeordnet. Meist verwendet man die positive Logik.

Beispiel 4.2:



5. Funktionen und Entwurf digitaler Schaltungen
5.1. Kombinatorische Schaltungen
5.1.1. Grundlagen

Wir sind bisher - eher intuitiv - bereits mit kombinatorischen Systemen umgegangen und wollen nun beginnen, die Betrachtungen theoretisch zu umtermauern und weiterzuführen.

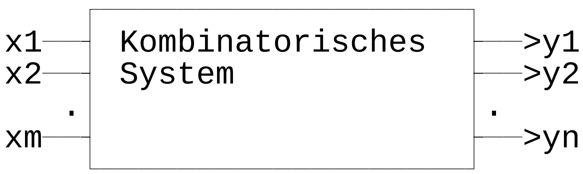
Kombinatorische Systeme sind Systeme, bei denen die Belegung

$$\underline{y} = y_1 y_2 ... y_n$$

an den Ausgängen ausschließlich von den Belegungen an den Eingängen

$$\underline{x} = x_1 x_2 ... x_m$$

zum gleichen Zeitpunkt abhängen.



Das mathematische Mittel zur Beschreibung kombinatorischer Systeme ist die BOOLEsche Algebra (George BOOLE, 1815 - 1864). Ich werde eine auf die technische Anwendung der BOOLEschen Algebra reduzierte Einführung bringen. Sie haben gewise Grundkenntnisse aus der Schule. Außerdem wird die BOOLEsche Algebra auch im Rahmen der Mathematikausbildung behandelt.

5.1.1.1. BOOLEsche Funktionen

Eine BOOLEsche (binäre) Funktion ist eine eindeutige Abbildung

$$f: B^k \to B^1,$$

die jedem Binärvektor

$$\underline{x} \in B^k = \{\underline{x} \mid \underline{x} = (x_1, \ldots, x_k),\ x_i \in \{0,1\},\ i = 1, \ldots, k\}$$

eines der beiden Elemente der Menge

$$B^1 = \{0,1\}$$

zuordnet. Da B^k genau 2^k Elemente besitzt und die Zuordnung der Werte 0 und 1 zu den Binärvektoren unabhängig voneinander geschehen kann, gibt es 2^{2^k} voneinander verschiedene Funktionen. In diese Zahl gehen auch alle Entartungen (Funktionen von k-1, ... , 0 Variablen) ein.

x_1	01		Bezeichnung
f_1	00	0	Konstante Null
f_2	01	x_1	Identität
f_3	10	$\overline{x_1}$	Negation
f_4	11	1	Konstante Eins

Die binären Funktionen über $B^1 = \{\underline{x} \mid (x_1),\ x_1 \in \{0,1\}\}$

x_1	0011		Bezeichnung
x_2	0101		
f_1	0000	0	Konstante 0
f_2	0001	$x_1 \wedge x_2$	Konjunktion, AND
f_3	0010	$x_1 \wedge \overline{x_2}$	Inhibition
f_4	0011	x_1	Identität
f_5	0100	$\overline{x_1} \wedge x_2$	Inhibition
f_6	0101	x_2	Identität
f_7	0110	$x_1 \nsim x_2 = \overline{x_1} \wedge x_2 \vee x_1 \wedge \overline{x_2}$	Antivalenz, XOR
f_8	0111	$x_1 \vee x_2$	Disjunktion, OR
f_9	1000	$\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} = \overline{x_1 \vee x_2}$	NOR
f_{10}	1001	$x_1 \sim x_2 = \overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \vee x_1 \wedge x_2$	Äquivalenz
f_{11}	1010	$\overline{x_2}$	Negation
f_{12}	1011	$x_2 \rightarrow x_1 = \overline{x_2} \vee x_1$	Implikation
f_{13}	1100	$\overline{x_1}$	Negation
f_{14}	1101	$x_1 \rightarrow x_2 = \overline{x_1} \vee x_2$	Implikation
f_{15}	1110	$\overline{x_1} \vee \overline{x_2} = \overline{x_1 \wedge x_2}$	NAND
f_{16}	1111	1	Konstante 1

Die binären Funktionen über $B^2 = \{\underline{x} \mid (x_1,x_2),\ x_1,x_2 \in \{0,1\}\}$

In den dritten Spalten der oben angegebenen Tabellen sind die Funktionen in einer Form dargestellt, bei der neben den Konstanten 0 und 1 nur die Operatoren $\overline{}$ (Negation), $\wedge$ (Konjunktion) und $\vee$ (Disjunktion) verwendet werden. Die Negation, die Konjunktion und die Disjunktion bilden zusammen ein funktionell vollständiges System BOOLEscher Funktionen ("Algebra der Logik"), d. h. alle BOOLEsche Funktionen sind mit ihrer Hilfe darstellbar. Es gibt eine ganze Reihe solcher funktionell vollständiger Systeme BOOLEscher Funktionen:

- Konjunktion, Disjunktion, Negation ("Algebra der Logik")
- Konjunktion, Negation
- Disjunktion, Negation
- Implikation, Negation
- Inhibition, Negation
- NAND
- NOR
- Antivalenz, Konjunktion, Konstante ’1’ ("Shegalkin-Algebra")
- Äquivalenz, Disjunktion, Konstante ’0’

Streng genommen, ist die Algebra der Logik nicht vollständig, da sie nicht minimal ist, d. h. es existiert wenigstens eine Untermenge der Funktionen der Algebra der Logik, die ihrerseits vollständig ist. Von besonderer technischer Bedeutung sind die NAND- und die NOR-Funktion. Die beiden zuletzt aufgeführten Systeme nennt man auch "schwach vollständig", da sie neben BOOLEschen Funktionen auch eine BOOLEsche Konstante enthalten, ohne die nicht alle BOOLEschen Funktionen darstellbar wären.