Übergang zur mathematischen Statistik

Aus einer Menge von N Realisierungen aus der Grundgesamtheit, die als konkrete Stichprobe vom Umfang N bezeichnet wird, wird die Stichprobenfunktion:

$$\varphi = f\left[x_1, x_2, \dots, x_N\right] \qquad (2)$$

gebildet.

①

Schnelle Momentenberechnung

Um die Rechenzeit zur Momentenberechnung erheblich zu verkürzen müssen die Potenzen bzw. Multiplikationen der Momentendefinition auf Additionen zurückgeführt werden. Werden diese Additionen binär durchgeführt, ist man in der Lage mit einer speziellen Momenten-Architektur-Realisierung die Momentenberechnung in Echtzeit durchzuführen.

Dazu wird das Moment der Ordnung p einer eindimensionalen Funktion Gl. (3) mit dem Stichprobenumfang N auf die untere Summationsgrenze $n = 0$ verschoben.

$$m^p = \sum_{n=0}^{N-1} f(x[n])\, n^p \qquad (4)$$

Verwendet man eine Stichprobe vom Umfang N+1 ergibt sich unter der Beachtung des Punktes $n = N$ das Moment der Ordnung p aus:

$$m^p = \sum_{n=0}^{N} f(x[n]) \cdot (N-n)^p \qquad (5)$$

Die Gl. (5) soll zur konkreten Hardwarerealisierung der 2-dimensionalen Momentenberechnung verwendet werden.

Momentenberechnung als Signalmodell

Die Überlegungen für ein Signalmodell sollen davon ausgehen, daß das Übertragungsverhalten eines kontinuierlichen Signals durch die ~~Gewichts~~-funktion des Übertragungsgliedes beschrieben werden kann.

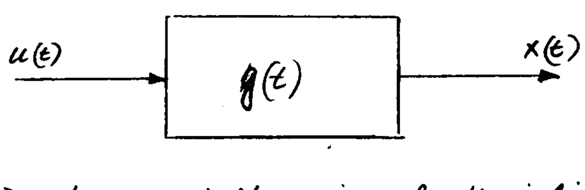

Abb. 2: Übertragungsverhalten eines kontinuierlichen Signals

Mathematisch kann das Übertragungsverhalten als Faltungsintegral berechnet werden:

$$x(t) = g(t) * u(t) \tag{6}$$

Bei einer bekannten Gewichtsfunktion $g(t)$ ergibt das Faltungsintegral für den rechtsseitigen Grenzwert der Ausgangsgröße $x(t+0)$ unter Einschluß von $t=0$:

$$x(t+0) = \int_{-0}^{t+0} g(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau \tag{7}$$

Da die Übergangsfunktion $h(t)$ verwendet werden soll kann unter der Beachtung

$$g(t) = \frac{d\,h(t)}{dt} \tag{8}$$

das Duhamelsche Integral

$$x(t+0) = \int_{-0}^{t+0} h(t-\tau)\, \frac{du(\tau)}{d\tau}\, d\tau \tag{9}$$

berechnet werden.

Für die konkrete digitale Realisierung müssen die kontinuierlichen Eingangssignale $u(t)$ für ihren jeweils aktuellsten Eingangswert bis zu ihrer erneuten Aktualisierung gespeichert bzw. gehalten werden. Somit werden für die weiteren mathematischen Betrachtungen gestufte Eingangssignale verwendet.

Beim technisch realisierten Abtastvorgang im A-D-Wandler (Abtastdauer $\tau \to 0$) werden die zeitdiskreten Signale durch ein ideales Abtastglied gewonnen Abb. 3.

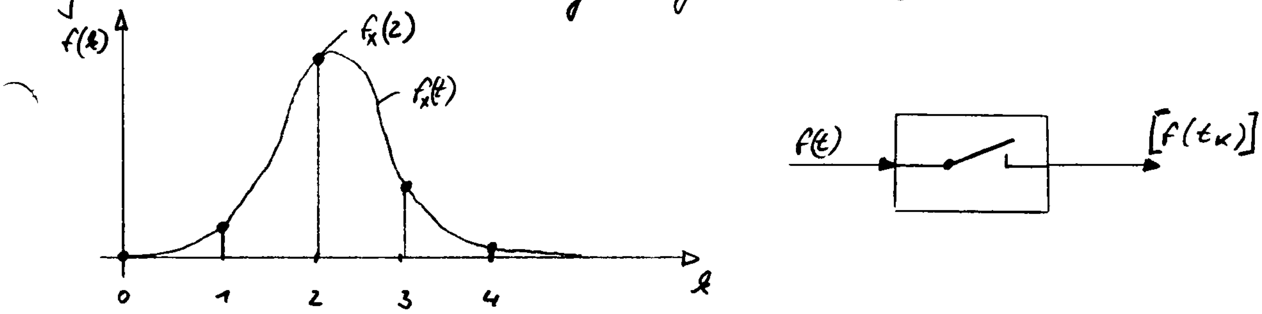

Abb. 3 : zeitdiskrete Signalgewinnung durch ideale Abtastung

Damit stehen zur Weiterverarbeitung die Werte der Ausgangssignalfolge $[f(t_k)]$ zu äquidistanten Zeitpunkten $t_k = kT$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ mit einer konstanten Abtastfrequenz $\omega_T = \frac{2\pi}{T}$ zur Verfügung.

In einer weiterführenden Beschreibung wird die Wertefolge $[f(kT)]$ in eine Impulsfolge $f^*(t)$ überführt, indem die zeitlich verschobenen δ-Funktion mit den jeweiligen Abtastwerten multipliziert werden (δ-Modulation).

$$f^*(t) = f(t) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT) \tag{10}$$

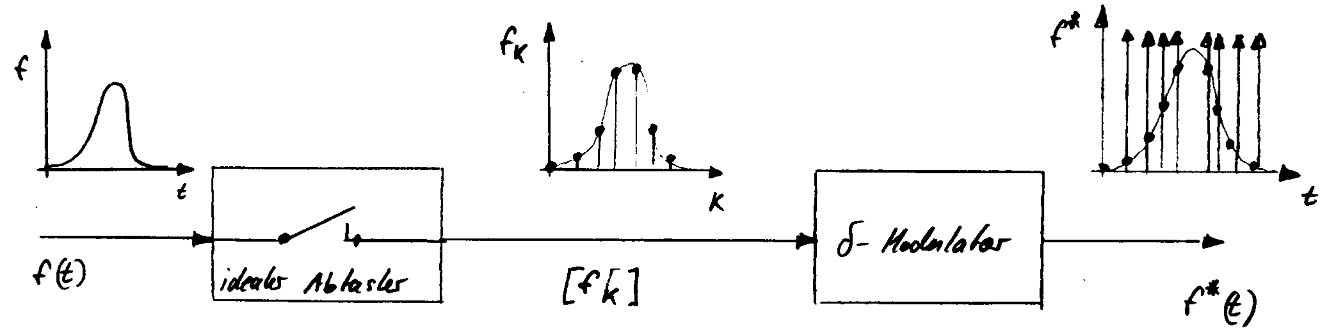

Abb. 4 : δ- Abtastglied

Um zum gestuften Eingangssignal zu kommen muß ~~in einem~~ ~~letzten~~ Schritt noch der Speicher- bzw. Haltevorgang charakterisiert werden.

Ein gestuftes Signal $\bar{f}(t)$ erhält man aus der zeitdiskreten Signalfolge $[f(KT)]$ wenn die Stufenamplituden in den diskreten Zeitpunkten $t_K = KT$ durch die Folgewerte $f(KT) = f_K$ gehalten werden. Sehr anschaulich kann $\bar{f}(t)$ auch dargestellt werden, wenn man die Impulse der Treppenfunktion als Differenz zweier Sprungfunktionen auffaßt Gl. (11).

$$\bar{f}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_K \left[\sigma(t - KT) - \sigma(t - (K+1)T) \right] \tag{11}$$

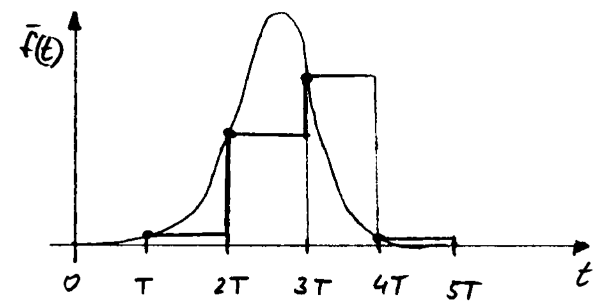

Abb. 5 : gestuftes Signal.

Für die Laplace - Transformierte von Gl. (11) erhält man:

$$\bar{F}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f_K \left[\frac{e^{-ksT}}{s} - \frac{e^{-(k+1)sT}}{s} \right] = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \sum_{k=0}^{\infty} f_k \, e^{-ksT} \tag{12}$$

Der Summenausdruck aus Gl. (12) entspricht der Laplace - Transformierten von Gl. (10). $F^*(s)$. Mit der Einführung von $\bar{F}^*(s)$ kann eine Übertragungsfunktion

$$G_H(s) = \frac{\bar{F}(s)}{F^*(s)} = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \tag{13}$$

das sog. Halteglied 0. Ordnung, zur Erzeugung des gestuften Signals gebildet werden.

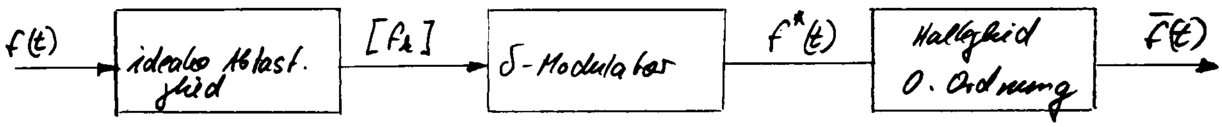

Abb. 6.: Darstellung des Abtast- und Haltevorganges

Da die digitale Realisierung des A-D-Wandlers den Abtast- und Halteprozeß nach Abb. 6 durchführt, muß für die Berechnung des Übertragungsverhaltens über das Faltungsintegral Gl. (7) bzw. das Duhamelsche Integral Gl. (9) die gestufte Eingangsfolge $\bar{u}(t)$ verwendet werden. Damit ergibt sich für das Duhamelsche Integral:

$$x(t+0) = \int_{-0}^{t+0} h(t-\tau)\,\frac{d\bar{u}(\tau)}{\cancel{d\tau}\,dt}\,d\tau \qquad (14)$$

$$\bar{u}(\tau) = \sum_{n}^{\infty} u_n \left[\sigma(\tau-nT) - \sigma(\tau-(n+1)T)\right] \qquad (15)$$

$$\frac{d\bar{u}(\tau)}{d\tau} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \left[\delta(\tau-nT) - \delta(\tau-(n+1)T)\right] \qquad (16)$$

Damit ergibt sich für Gl. (14) mit den Umformungen Gl. (15) und Gl. (16):

$$x(t+0) = \int_{-0}^{t+0} \left[h(t-\tau) - h(t-T-\tau)\right] \cdot \sum_{n=0}^{\infty} u_n\,\delta(\tau-nT)\,d\tau \qquad (17)$$

Die Gl. (17) hat die Struktur eines Faltungsintegrals, das durch eine modifizierte Gewichtsfunktion

$$\bar{g}(t) = h(t) - h(t-T) \qquad (18)$$

mit dem Eingangssignal vom Typ

$$u^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n\,\delta(t-nT) \qquad (19)$$

entsprechend Gl. (10) verknüpft wird Abb. 7.

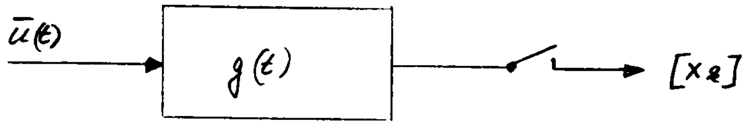

Abb. 7: kontinuierliches Übertragungsglied mit gestuftem Eingangssignal

Für das abgetastete Ausgangssignal aus Abb. 7 erhält man durch Diskretisierung mit $t = \ell T$ aus Gl. (17):

$$x(\ell T) = x_\ell = \int_{-0}^{\ell T+0} \left[h(\ell T-\tau) - h(\ell T - T - \tau)\right] \sum_{n=0}^{\ell} u_n \,\delta(\tau - nT)\, d\tau \qquad (20)$$

Mit den Regeln für Distributionen folgt aus Gl. (20):

$$x_\ell = \sum_{n=0}^{\ell} h(\ell T - nT)\, u_n - \sum_{n=0}^{\ell-1} h(\ell T - nT - T)\, u_n$$

$$x_\ell = h(0)\, u_\ell + \sum_{n=0}^{\ell-1} \left[h(\ell T - nT) - h(\ell T - nT - T)\right] u_n = \cancel{\sum_{n=0}^{\ell} \bar{g}_{\ell-n}\, u_n} \qquad \cancel{(21)}$$

$$x_\ell = \sum_{n=0}^{\ell} \bar{g}_{\ell-n}\, u_n \qquad (21)$$

Das abgetastete Ausgangssignal x_ℓ berechnet sich also aus der Summe der modifizierten Gewichtsfunktion multipliziert mit der Eingangsfolge.

Bezieht man ~~ein~~ weiterhin die Ordnung der Momente p ein, ergibt sich für das Übertragungsverhalten der Ordnung p:

$$x_p[\ell] = u[\ell] * \bar{g}_p[\ell] \qquad (22)$$

analog zu Gl. (6).

Die modifizierte Gewichtsfunktion $\bar{g}_p[n]$ kann auch als Impulsübertragungsfunktion

$$\bar{g}_p[\ell] = ?\, n^p\, \delta[\ell]\,? \quad n^p \delta[\ell] \qquad (23)$$

eines digitalen Filters aufgefaßt werden.

Aus Gl. (21) und Gl. (23) ergibt sich für die Ausgangsfolge $x[\ell]$:

$$x_p[\ell] = u[\ell] * \bar{g}_p[\ell] = \sum_{n=0}^{\ell} \bar{g}[\ell - n]\, u[n] \qquad (24)$$

$$= \sum_{n=0}^{\ell} u[n]\, (\ell - n)^p \qquad (25)$$

Ersetzt man die obere Summengrenze ℓ durch den Stichprobenumfang N, und ~~die Eingangsfolge~~ $u[n]$ durch Verteilungsfunktion $f_x[n]$ so wird aus Gl. (25):

$$\boxed{x_p[\ell] = \sum_{n=0}^{N} f_x[n]\, (N - n)^p = m^p} \qquad (26)$$

Diese Substitution entspricht genau der Momentenberechnung aus Gl. (5).

Es bleibt damit zu untersuchen in welcher Form die Momente der Ordnung p durch die Übertragungsfunktion $\hat{G}_p(z)$ abgebildet werden. Die Kaskadierung Gl. (30) zeigt Abb. 9.

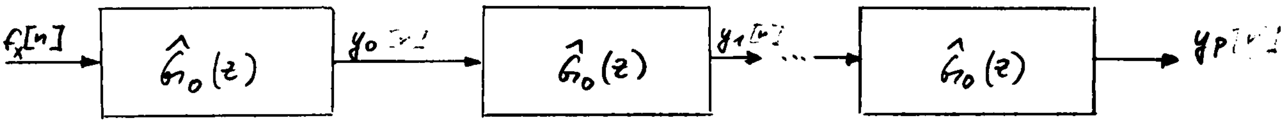

Abb. 9.: Kaskadierung der erweiterten Übertragungsfunktion $\hat{G}_0(z)$

$\hat{G}_0(z)$ kann auch als Differenzengleichung 1. Ordnung mit den Koeffizienten $a_1 = 0$ und $b = 0$ interpretiert werden Abb 10..

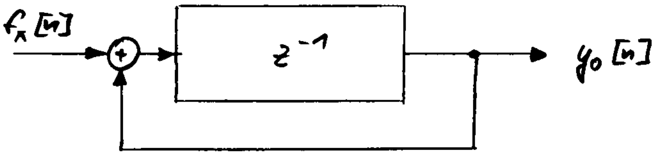

Abb. 10: Blockdiagramm der Differenzengleichung 1. Ordnung

Momentenherstellung durch Linearkombination

Die Momentenberechnung über das Filter (

$$\hat{G}_p(z) = \frac{1}{(z-1)^{p+1}}$$

liefert eine Linearkombination der Momente der Ordnung p. Um die Einzelmomente zu bestimmen müssen die Koeffizienten der Linearkombination bestimmt werden.

1. $p = 0$

$$\hat{G}_0(z) = \frac{1}{z-1}$$

Die Filterantwort der Eingangsfolge $f_x[k]$ berechnet sich aus:

$$y_0[n] = \sum_{k=0}^{n-1} f_x[k] \tag{31}$$

Da die verwendete Stichprobe den Umfang $N+1$ hatte wird

$$y_0[N+1] = \sum_{k=0}^{N} f_x[k] = m_N^0 \tag{32}$$

dem 0-ten Moment der Funktion $f_x[n]$

2. $p = 1$

$$\hat{G}_1(z) = \frac{1}{(z-1)^2}$$

Damit kann man sich die Berechnung des Momentes der Ordnung p so vorstellen, das die Verteilungsfunktion $f_X[n]$ ein Filter mit der ~~Gewichtsfunktion~~ Übertragungsfunktion $\bar{G}_p(z)$ durchläuft (Abb. 8).

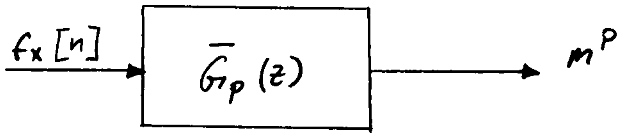

Abb. 8: Berechnung des Momentes p-ter Ordnung durch ein Filter $\bar{G}_p(z)$

Die weitere Aufgabe besteht also darin eine geeignete Filterfunktion $\bar{G}_p(z)$ zu entwerfen.

~~Ausgangspunkt dafür ist Gl. (23) in der Schreibweise:~~

$$\cancel{x[n] = a^n u[n]} \qquad (24)$$

~~Mit der Regel:~~ $\cancel{X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}}$ ~~folgt:~~ (25)

$$\cancel{X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a z^{-1})^n} \qquad (26)$$

Transformiert man die modifizierte Gewichtsfunktion $\bar{g}_p[n]$ in den z-Bereich, erhält man:

$$\bar{G}_p(z) = \lim_{x \to 0} \frac{\partial^p}{\partial x^p} \left(\frac{z}{z - e^{-x}} \right) \qquad (27)$$

Für die Momente $p = 0, 1, 2, 3$ ergeben sich ~~die~~ Übertragungsfunktionen:

$$\bar{G}_0(z) = \frac{z}{z-1} \qquad (28a)$$

$$\bar{G}_1(z) = \frac{z}{(z-1)^2} \qquad b$$

$$\bar{G}_2(z) = \frac{z(z-1)}{(z-1)^3} \qquad c$$

$$\bar{G}_3(z) = \frac{z(z^2+z^4+1)}{(z-1)^4} \qquad (28d)$$

Wie aus den Gl. (28a) bis Gl. (28d) leicht ersichtlich ist wird für jedes Moment eine eigene Übertragungsfunktion benötigt. Diese Eigenschaft ist aber ~~im~~ Sinne einer einfachen und schnellen Hardwarerealisierung ungünstig. Besser ~~ist eine~~ Übertragungsfunktion die durch einfaches Kaskadieren die Momente der Ordnung p liefern würde. Erweitert man die Gl. (28a) mit $\frac{1}{z}$ ergibt sich eine solche Übertragungsfunktion.

$$\hat{G}(z) = \frac{1}{z-1} \qquad (29)$$

Eine Kaskadierung von Gl. (29) ergibt für das Moment der Ordnung p:

$$\hat{G}_p(z) = \frac{1}{(z-1)^{p+1}} \qquad (30)$$

Normale Momente pq-ter Ordnung zweidimensionaler Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Die normalen Momente p-ter Ordnung für zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilungen können für stetige Zufallsvariablen nach:

$$m^{p,q} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^p y^q f(x,y)\, dx\, dy \qquad (39)$$

berechnet werden. Für zweidimensionale diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen gilt:

$$\mu^{p,q} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} x[n]^p\, y[m]^q\, f\big(x[n], y[m]\big) \qquad (40)$$

Werden für p und q die jeweils ersten 4 Momente ($p = 0,1,2,3$; $q = 0,1,2,3$) berechnet, ergeben sich 16 zu berechnende Momente.

Analog zur eindimensionalen Berechnung können die zweidimensionalen Funktionen mit den Stichprobenumfängen N und M auf die unteren Summationsgrenzen $n=0$ bzw $m=0$ verschoben werden.

$$\mu^{p,q} = \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \sum_{m=0}^{M-1} m^q \cdot f\big(x[n], y[m]\big) \right\} n^p \qquad (41)$$

Der Ausdruck in der Klammer stellt dabei das eindimensionale Moment q-ter Ordnung dar. ~~Dieses~~ Berechnung kann durch die Kaskadierung der Filterfunktionen nach Abb. (10) realisiert werden. Wie aus Gl. (41) ersichtlich ist, werden die Ausgänge der Filterfunktionen in der y-Kaskade einer weiteren Momentenberechnung in x-Richtung unterzogen. Damit ergibt sich ein Filterblock nach Abb. 11.

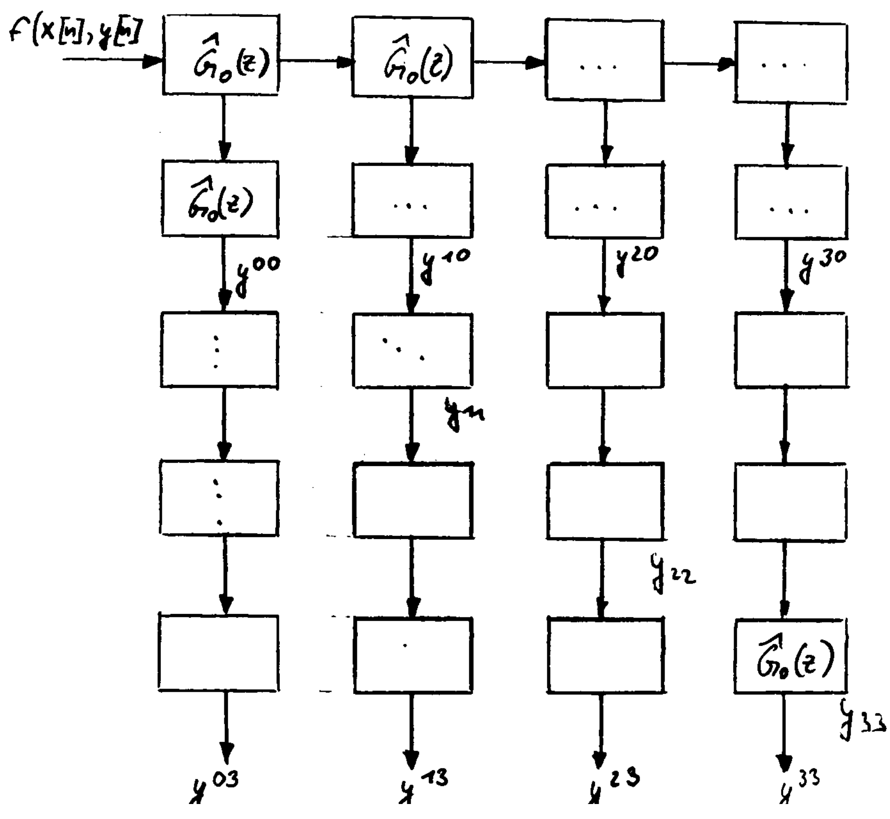

Abb. 11: Filtermatrix zur Berechnung der 16-Momentenkombinationen

Die Filterantwort $y_1[n]$ berechnet sich aus:

$$y_1[n] = \sum_{\ell=0}^{n-2} f_x[\ell]\,(n-2-\ell) + \sum_{\ell=0}^{n-2} f[\ell] \tag{33}$$

Eine Kaskadierung zweier Filter gibt für die Stichprobe mit dem Umfang $N+1$ am Kaskadenausgang $n = N+2$.

$$y_1[N+2] = \sum_{\ell=0}^{N} f_x[\ell]\,(N-\ell) + \sum_{\ell=0}^{N} f_x[\ell] = m_N^1 + m_N^0 \tag{34}$$

3. $p = 2$

$$y_2[N+3] = \frac{1}{2} m_N^2 + \overset{\frac{3}{2}}{\cancel{\frac{1}{3}}} m_N^1 + m_N^0 \tag{35}$$

4. $p = 3$

$$y_3[N+4] = \frac{1}{6} m_N^3 + m_N^2 + \frac{11}{6} m_N^1 + m_N^0 \tag{36}$$

Aus diesen Gleichungen können die Koeffizienten der Linearkombination gewonnen werden.

$$\begin{aligned} m_N^0 &= y_0 \\ m_N^1 &= y_1 - y_0 \\ m_N^2 &= 2y_2 - 3y_1 + y_0 \\ m_N^3 &= 6y_3 - 12y_2 + 7y_1 - y_0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} m_n^0 \\ m^1 \\ m^2 \\ m^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ -1 & 7 & -12 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \tag{37}$$

$$\bar{\mu} = \mathbf{C} \cdot \bar{y} \tag{38}$$

Berechnung der Koeffizienten der Linearkombination

Filter: $\hat{G}_p(z) = \frac{1}{(z-1)^{p+1}}$

1. p = 0

Filter: $\hat{G}_0(z) = \frac{1}{z-1}$

Die Filterantwort im Zeitbereich berechnet sich aus:

$$y_0[n] = \sum_{k=0}^{n-1} f[k]$$

mit dem Stichprobenumfang von $N+1$:

$$\boxed{y_0[N+1] = \sum_{k=0}^{N} f[k] = m_0}$$

Beweis: $\hat{G}_0(z) = \frac{1}{z-1} = \frac{X(z)}{U(z)}$

$$z\,X(z) - X(z) = U(z) \quad \Big| \cdot \frac{1}{z}$$

$$X(z) - z^{-1}X(z) = z^{-1}U(z) \quad \Big|\ \text{Rücktransformation}$$

$$x[k] - x[k-1] = u[k-1] \quad \curvearrowright \quad \boxed{x[k] = u[k-1] + x[k-1]} \quad \boxed{\hat{g}_0[n] = u[n-1]}$$

$k=0$: $x[0] = 0$

$k=1$: $x[1] = u[0]$

$k=2$: $x[2] = u[1] + u[0]$

$$\curvearrowright \quad \boxed{x[k] = \sum_{i=0}^{n-1} u[i]} \quad \text{q.e.d.}$$

2. p = 1

Filter: $\hat{G}_1(z) = \frac{1}{(z-1)^2}$

$$\hat{G}_0(z) = \frac{1}{z-1} \Rightarrow \frac{\partial \hat{G}_0(z)}{\partial z} = -\frac{1}{(z-1)^2} \stackrel{!}{=} -\hat{G}_1(z)$$

$$\hat{G}_1(z) = -\frac{\partial \hat{G}_0(z)}{\partial z} = z^{-1}\left(-z\,\frac{\partial \hat{G}_0(z)}{\partial z}\right) \quad \Big| \cdot \frac{z}{z}$$

Rücktransformation

$$\hat{g}_1(n) = (n-1)\,\hat{g}_0(n-1)$$

$$\hat{g}_1(n) = (n-1)\,u(n-2)$$

$$\hat{g}_1(n) = (n-2+1)\, u(n-2)$$
$$= (n-2)\, u(n-2) + u(n-2)$$
$$y_1(n) = \sum_{k=0}^{n-2} f(k)\cdot(n-2-k) + \sum_{k=0}^{n-2} f(k)$$

mit dem Stichprobenumfang $n = N+2$:

$$y_1[N+2]\ \sum_{k=0}^{N} f(k)\cdot(N-k) + \sum_{k=0}^{N} f(k)$$

$$\boxed{y_1[N+2] = m_1 + m_0}$$

3. $p = 2$

Filter $\hat{G}_2(z) = \dfrac{1}{(z-1)^3}$

$$\hat{G}_1(z) = \frac{1}{(z-1)^2} \Rightarrow \frac{\partial \hat{G}_1(z)}{\partial z} = -\frac{2}{(z-1)^3}$$

$$\hat{G}_2(z) = \frac{1}{(z-1)^3} = -\frac{1}{2}\cdot -\frac{2}{(z-1)^3} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \hat{G}_1(z)}{\partial z} \quad \Big|\cdot \frac{z}{z}$$

$$\hat{G}_2(z) = \frac{1}{2} z^{-1}\left(-z\frac{\partial \hat{G}_1(z)}{\partial z}\right)$$

Rücktransformation:

$$\hat{g}_2(n) = \frac{1}{2}(n-1)\,\hat{g}_1(n-1)$$
$$\hat{g}_2(n) = \frac{1}{2}(n-1)\big[(n-3)\,u(n-3) + u(n-3)\big]$$
$$= \frac{1}{2}(n-3+2)\big[(n-3)\,u(n-3) + u(n-3)\big]$$
$$= \frac{1}{2}(n-3)^2 u(n-3) + \frac{1}{2}(n-3)\,u(n-3) + (n-3)\,u(n-3) + u(n-3)$$

$$\hat{g}_2(n) = \frac{1}{2}(n-3)^2 u(n-3) + \frac{3}{2}(n-3)\,u(n-3) + u(n-3)$$

$$y_2(n) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-3} f(k)\,(n-3-k)^2 + \frac{3}{2}\sum_{k=0}^{n-3} f(k)\,(n-3-k) + \sum_{k=0}^{n-3} f(k)$$

mit dem Stichprobenumfang $n = N+3$:

$$y_2[N+3] = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N} f(k)\,(N-k)^2 + \frac{3}{2}\sum_{k=0}^{N} f(k)\,(N-k) + \sum_{k=0}^{N} f(k)$$

$$\boxed{y_2[N+3] = \frac{1}{2} m_2 + \frac{3}{2} m_1 + m_0}$$

4. $p = 3$

Filter $\hat{G}_3(z) = \frac{1}{(z-1)^4}$

$$\hat{G}_2(z) = \frac{1}{(z-1)^3} \Rightarrow \frac{\partial \hat{G}_2(z)}{\partial z} = -\frac{3}{(z-1)^4}$$

$$\hat{G}_3(z) = \frac{1}{(z-1)^4} = -\frac{1}{3} \cdot -\frac{3}{(z-1)^4} = -\frac{1}{3} \frac{\partial \hat{G}_2(z)}{\partial z}$$

$$\hat{G}_3(z) = \frac{1}{3} z^{-1} \left(-z \frac{\partial \hat{G}_2(z)}{\partial z}\right)$$

Rücktransformation:

$$\hat{g}_3(n) = \frac{1}{3}(n-1)\,\hat{g}_2(n-1)$$

$$\hat{g}_3(n) = \frac{1}{3}(n-1) \cdot \left[\frac{1}{2}(n-4)^2 u(n-4) + \frac{3}{2}(n-4)u(n-4) + u(n-4)\right]$$

$$= \frac{1}{3}(n-4+3) \cdot [\cdots\cdots]$$

$$= \frac{1}{6}(n-4)^3 u(n-4) + \frac{1}{2}(n-4)^2 u(n-4) + \frac{1}{3}(n-4)u(n-4)$$

$$+ \frac{1}{2}(n-4)^2 u(n-4) + \frac{3}{2}(n-4)u(n-4) + u(n-4)$$

$$\hat{g}_3(n) = \frac{1}{6}(n-4)^3 u(n-4) + (n-4)^2 u(n-4) + \frac{11}{6}(n-4)u(n-4) + u(n-4)$$

mit dem Stichprobenumfang $n = N+4$:

$$\boxed{y_3[N+4] = \frac{1}{6} m_3 + m_2 + \frac{11}{6} m_1 + m_0}$$

5. $p = 4$

Filter $\hat{G}_4(z) = \frac{1}{(z-1)^5}$

$$\hat{G}_3(z) = \frac{1}{(z-1)^4} \Rightarrow \frac{\partial \hat{G}_3(z)}{\partial z} = -\frac{4}{(z-1)^5}$$

$$\hat{G}_4(z) = \frac{1}{(z-1)^5} = -\frac{1}{4} \cdot -\frac{4}{(z-1)^5} = -\frac{1}{4} \frac{\partial \hat{G}_3(z)}{\partial z}$$

$$\hat{G}_4(z) = \frac{1}{4} z^{-1} \left(-z \frac{\partial \hat{G}_3(z)}{\partial z}\right)$$

Rücktransformation:

$$\hat{g}_4(n) = \frac{1}{4}(n-1)\,\hat{g}_3(n-1)$$

$$\hat{g}_4(n) = \frac{1}{4}(n-1)\left[\frac{1}{6}(n-5)^3 u(n-5) + (n-5)^2 u(n-5) + \frac{11}{6}(n-5)u(n-5) + u(n-5)\right]$$

$$\hat{g}_4(n) = \frac{1}{4}(n-5+4)\,[\cdots\cdots]$$

(4)

$$\hat{g}_4(n) = \frac{1}{24}(n-5)^4 u(n-5) + \frac{1}{4}(n-5)^3 u(n-5) + \frac{11}{24}(n-5)^2 u(n-5) +$$

$$\frac{1}{4}(n-5)\, u(n-5) + \frac{1}{6}(n-5)^3 u(n-5) + (n-5)^2 u(n-5) + \frac{11}{6}(n-5)\, u(n-5) +$$

$$u(n-5)$$

$$\hat{g}_4(n) = \frac{1}{24}(n-5)^4 u(n-5) + \frac{5}{12}(n-5)^3 u(n-5) + \frac{35}{24}(n-5)^2 u(n-5) +$$

$$\frac{25}{12}(n-5)\, u(n-5) + u(n-5)$$

mit dem Stichprobenumfang $n = N+5$:

$$\boxed{y_4[N+5] = \frac{1}{24} m_4 + \frac{5}{12} m_3 + \frac{35}{24} m_2 + \frac{25}{12} m_1 + m_0}$$

$$m_0 = y_0$$

$$m_1 = y_1 - y_0$$

$$m_2 = 2y_2 - 3y_1 + y_0$$

$$m_3 = 6y_3 - 12y_2 + 7y_1 - y_0$$

$$m_4 = 24y_4 - 60y_3 + 50y_2 - 15y_1 + y_0$$