

Das binomiale digitale Filter

von
Alfred Marganitz

Abstract

The binomial digital filter is an N-th order FIR filter whose coefficients equals the normalized coefficients of an N-th order binom. Therefore the binomial filter shows low pass characteristic with a linear phase and is applicable for smoothing discrete-time data series. In comparison to a moving average filter the binomial filter shows a flat amplitude response and a higher attenuation in the stopband region.

Das binomiale digitale Filter ist eine FIR-Struktur, deren Filterkoeffizienten mit den normierten Koeffizienten eines Binoms N-ter Ordnung übereinstimmen. Ein derartiges Filter zeigt eine linearphasige Tiefpasscharakteristik und wird zur Glättung von diskreten Datensignalen eingesetzt. Gegenüber einem gleitenden Mittelwertfilter zeigt das binomiale Filter einen insgesamt glatten Amplitudengang und weist im Sperrbereich eine höhere Dämpfung auf.

1. FIR-Filter mit binomialen Filterkoeffizienten

Für ein FIR-Filter (Bild 1) ergibt sich das Filterausgangssignal $y(k)$ zu:

$$y(k) = \sum_{v=0}^N a_v \cdot x(k-v)$$

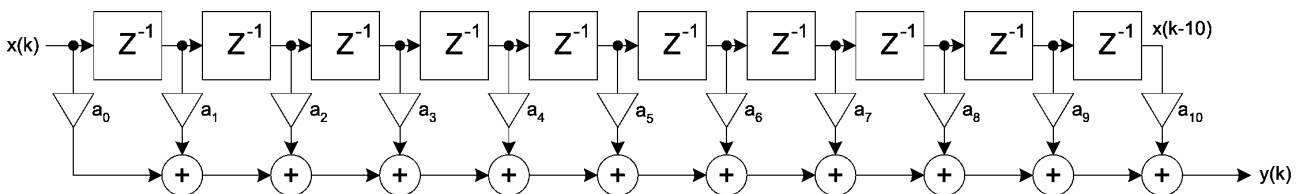


Bild 1. FIR-Filter 10. Ordnung

Werden die $N+1$ Filterkoeffizienten durch die normierten Koeffizienten eines Binoms N-ter Ordnung bestimmt; wenn also gilt:

$$a_v = 2^{-N} \cdot \binom{N}{v}; 0 \leq v \leq N$$

so bezeichnet man eine derartige FIR-Struktur als binomiales Filter. Dabei wird der Faktor 2^{-N} zur Normierung eingesetzt, damit der Amplitudengang bei $\Omega = 0$ den Wert 1 zeigt. In Abhängigkeit von der Filterordnung lassen sich die Koeffizienten eines binomialen Filters in Form eines modifizierten Pascalschen Dreiecks darstellen.

N	Koeffizienten						
1		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$			
2		$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$			
3		$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$		
4		$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$	
5		$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

Tabelle: Pascalsches Dreieck der Koeffizienten eines binomialen Filters

Wegen

$$a_v = 2^{-N} \cdot \binom{N}{v} = 2^{-N} \cdot \binom{N}{N-v} = a_{N-v}$$

sind die Filterkoeffizienten symmetrisch, womit das binomiale Filter einen linearen Phasengang aufweist zu:

$$\varphi(\Omega) = -\frac{1}{2} \cdot N \cdot \Omega; \text{ mit } \Omega = 2 \cdot \pi \cdot \frac{f}{f_a}.$$

2. Frequenzgang eines binomialen Filters

Mit den binomialen Filterkoeffizienten ergibt sich die Übertragungsfunktion eines binomialen FIR-Filters zu:

$$\underline{H}(z) = \sum_{v=0}^N a_v \cdot z^{-v} = 2^{-N} \cdot \sum_{v=0}^N \binom{N}{v} \cdot z^{-v} = 2^{-N} \cdot (1 + z^{-1})^N$$

die mit dem Polynom eines Binoms N-ter Ordnung übereinstimmt.

Setzt man darin für $z = e^{j\Omega}$; mit $\Omega = 2 \cdot \pi \cdot \frac{f}{f_a}$, so ergibt sich der Frequenzgang des binomialen Filters zu:

$$\underline{H}(\Omega) = 2^{-N} \cdot (1 + e^{-j\Omega})^N = 2^{-N} \cdot e^{-j\frac{1}{2}N\Omega} \cdot (e^{j\frac{1}{2}\Omega} + e^{-j\frac{1}{2}\Omega})^N = e^{-j\frac{1}{2}N\Omega} \cdot \cos^N\left(\frac{1}{2} \cdot \Omega\right)$$

Hieraus folgt für den Amplitudengang:

$$H(\Omega) = \left| \cos^N\left(\frac{1}{2} \cdot \Omega\right) \right|$$

Dieser zeigt eine Tiefpasscharakteristik (Bild 2) mit einer 3-dB-Grenzfrequenz von:

$$\Omega_g = 2 \cdot \arccos \frac{1}{\sqrt[2N]{2}}$$

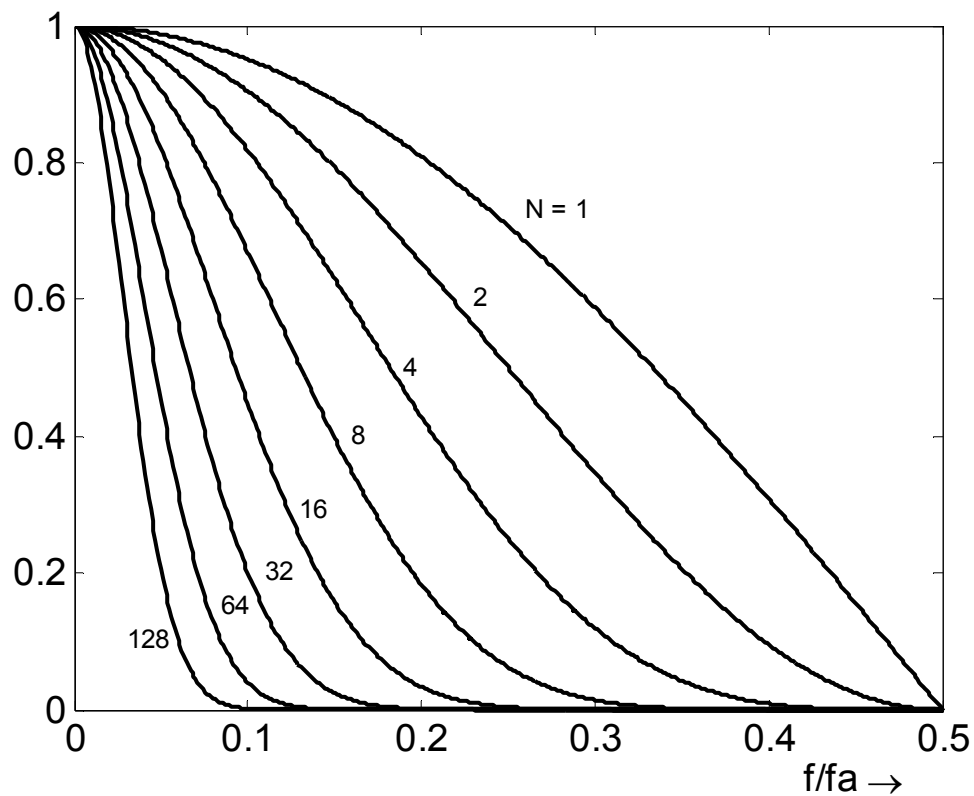


Bild 2. Amplitudengang eines binomialen Filters

Aufgrund seines schmalbandigen Durchlassbereichs hat das binomiale Filter die typische Eigenschaft eines Glättungsfilters.

Vergleich man das Verhalten des binomialen Filters mit dem des gleitenden Mittelwertbilders (MA: moving averager):

$$y_{\text{MA}}(k) = \frac{1}{N+1} \cdot \sum_{v=0}^N x(k-v)$$

mit einem Amplitudengang gemäß:

$$H_{\text{MA}}(\Omega) = \frac{1}{N+1} \cdot \left| \frac{\sin \frac{1}{2} \cdot (N+1) \cdot \Omega}{\sin \frac{1}{2} \cdot \Omega} \right|$$

so zeichnet sich das binomiale Filter durch einen insgesamt glatten Amplitudengang aus und weist darüber hinaus für Frequenzen $f \rightarrow \frac{1}{2} \cdot f_a$ eine höhere Sperrdämpfung auf (Bild 3).

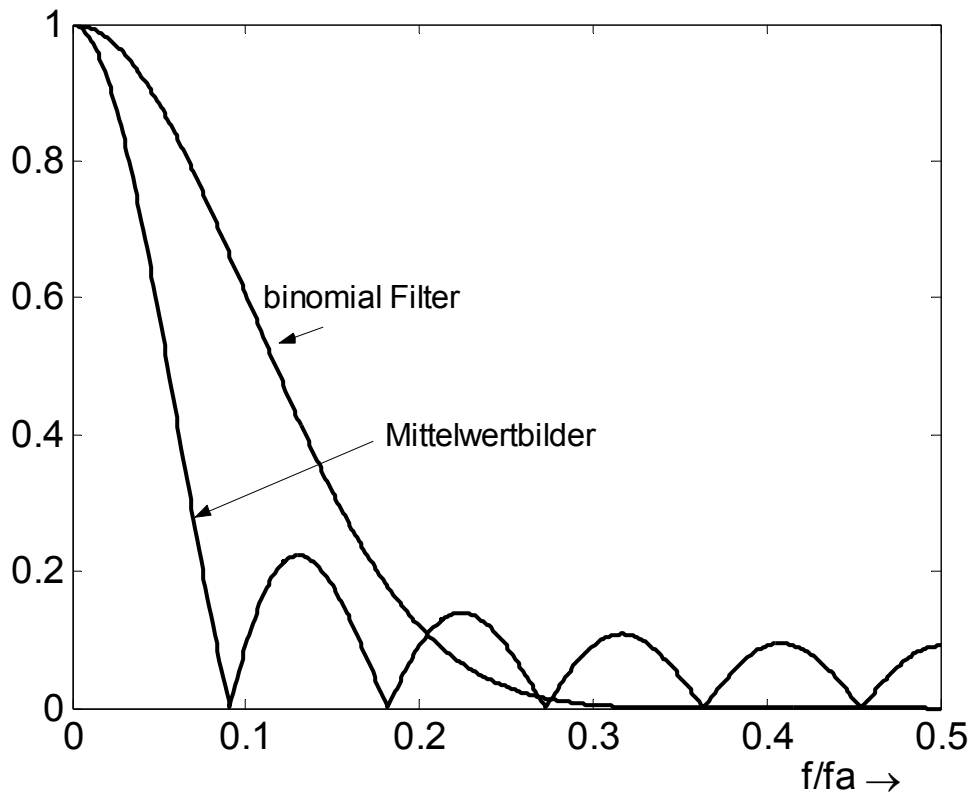


Bild 3. Amplitudengang eines binomialen Filters und Mittelwertbilders 10. Ordnung

Verfasser:

Prof. Dr.-Ing. Alfred Marganitz
TFH Berlin
Fachbereich VII – Elektrotechnik und Feinwerktechnik