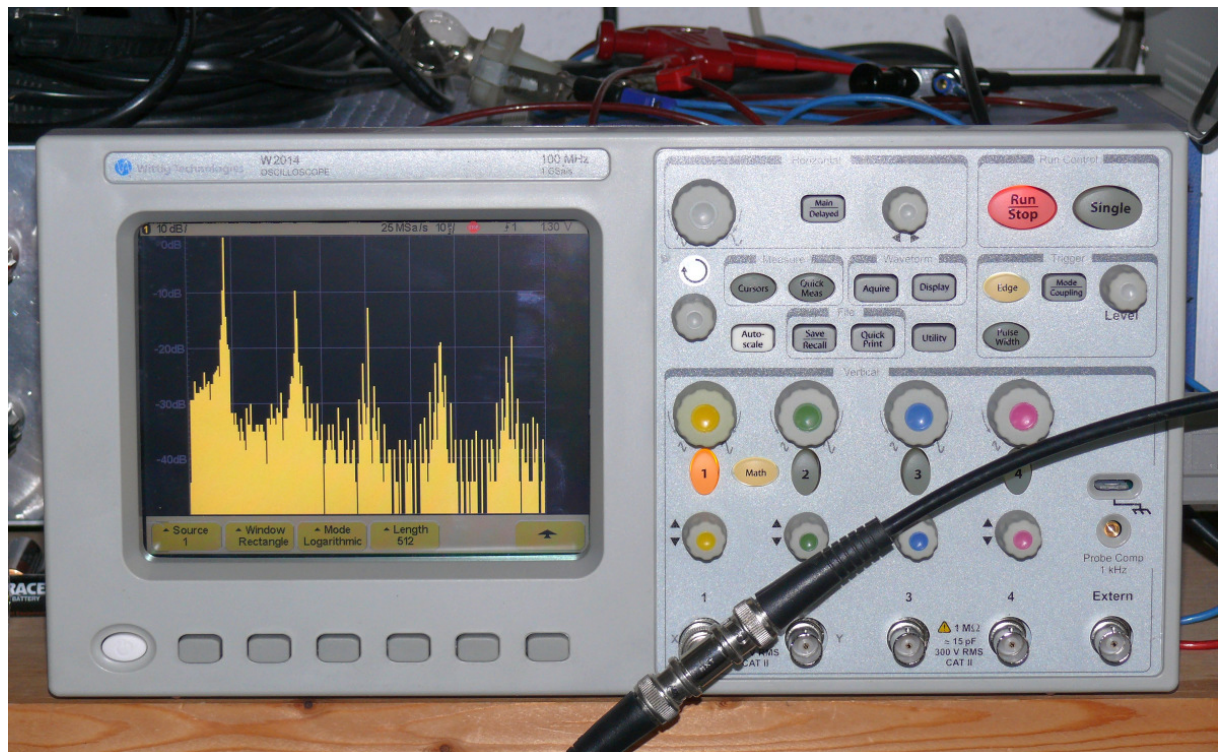


Spektralanalyse mit dem WELEC W20xxA



Inhaltsverzeichnis

1	DIE SPEKTRALANALYSE	- 3 -
1.1	Einleitung.....	- 3 -
1.2	Der digitale Spektrumanalyser	- 3 -
1.2.1	Meßbereich	- 4 -
1.2.2	Sampling Rate und Abtasttheorem	- 5 -
1.2.3	Spektrale Auflösung	- 8 -
1.2.4	Fensterung	- 9 -
1.2.5	Spektrum mit logarithmischen Amplituden.....	- 13 -
2	DIE FFT-FUNKTION.....	- 14 -
3	FENSTERFUNKTIONEN	- 19 -
3.1	Parameter einiger Fensterfunktionen	- 19 -
3.2	Formeln einiger Fensterfunktionen	- 19 -

1 Die Spektralanalyse

1.1 Einleitung

Seit der Version 1.2.BF.0.80 verfügt das W20xxA über eine Spektralanalysefunktion. Je nach Einstellung und anliegendem Signal sieht man eine Menge bunte Striche über den Bildschirm geistern die es zu deuten gilt. Wie immer bei Messungen kommt es zum Einen auf die korrekten Einstellungen der Messbereiche und zum Anderen auf die richtige Interpretation des Messergebnisses an. Weiterhin sollte man die Grenzen seines Messgerätes kennen. Daher hier eine kurze Einführung in die Spektralanalyse am Beispiel des WELEC W20xxA.

1.2 Der digitale Spektrumanalyser

Der Spektrumanalyser berechnet das dem abgetasteten Zeitsignal zugehörige Spektrum mittels Fast-Fourier-Transformation¹ (FFT). In der Standardeinstellung wird das Spektrum im linearen Amplitudenmaßstab dargestellt. Es besteht jedoch auch die Möglichkeit der einfach logarithmierten Darstellung und der Fensterung des Zeitsignals.

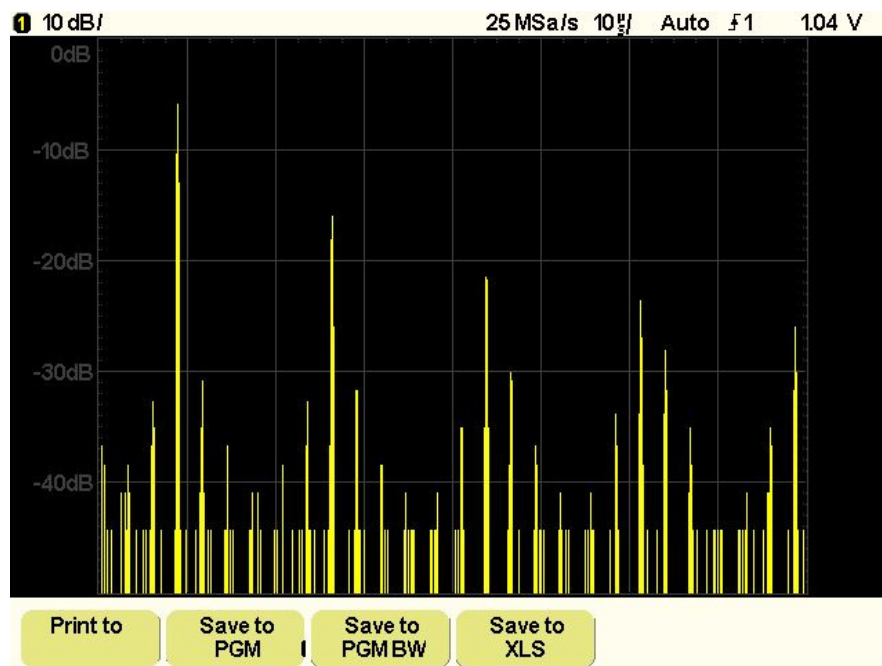


Abbildung 1: Digitaler Spektrumanalyser

¹ Sonderform der diskreten Fourier-Transformation, optimiert für den Einsatz auf Rechnersystemen.

1.2.1 Meßbereich

Es ist darauf zu achten, daß das Signal nicht durch die Wahl eines zu kleinen Meßbereiches in der Amplitude beschnitten wird, da dann evtl. Spektralanteile dargestellt werden, die in Wirklichkeit nicht im Signal enthalten sind (nichtlineare Verzerrungen, engl. distortion).

Um dies zu überprüfen, bietet sich es sich an, zur Zeitdarstellung umzuschalten und hier gegebenenfalls eine Korrektur vorzunehmen.

Bei einem Signal mit nur einer Frequenzkomponente (Sinus, Cosinus) entspricht die Höhe der Spektrallinie der Amplitude des Zeitsignals. Für den linearen Betrieb wurde die Skalierung daher so gewählt, das bei voller Ausnutzung der Gridhöhe im Zeitbereich auch im Spektrumanalyser die Gridhöhe voll genutzt wird, was einer Halbierung des Spannungsbereichs entspricht bzw. einer Verdoppelung der Spektrallinienhöhe.

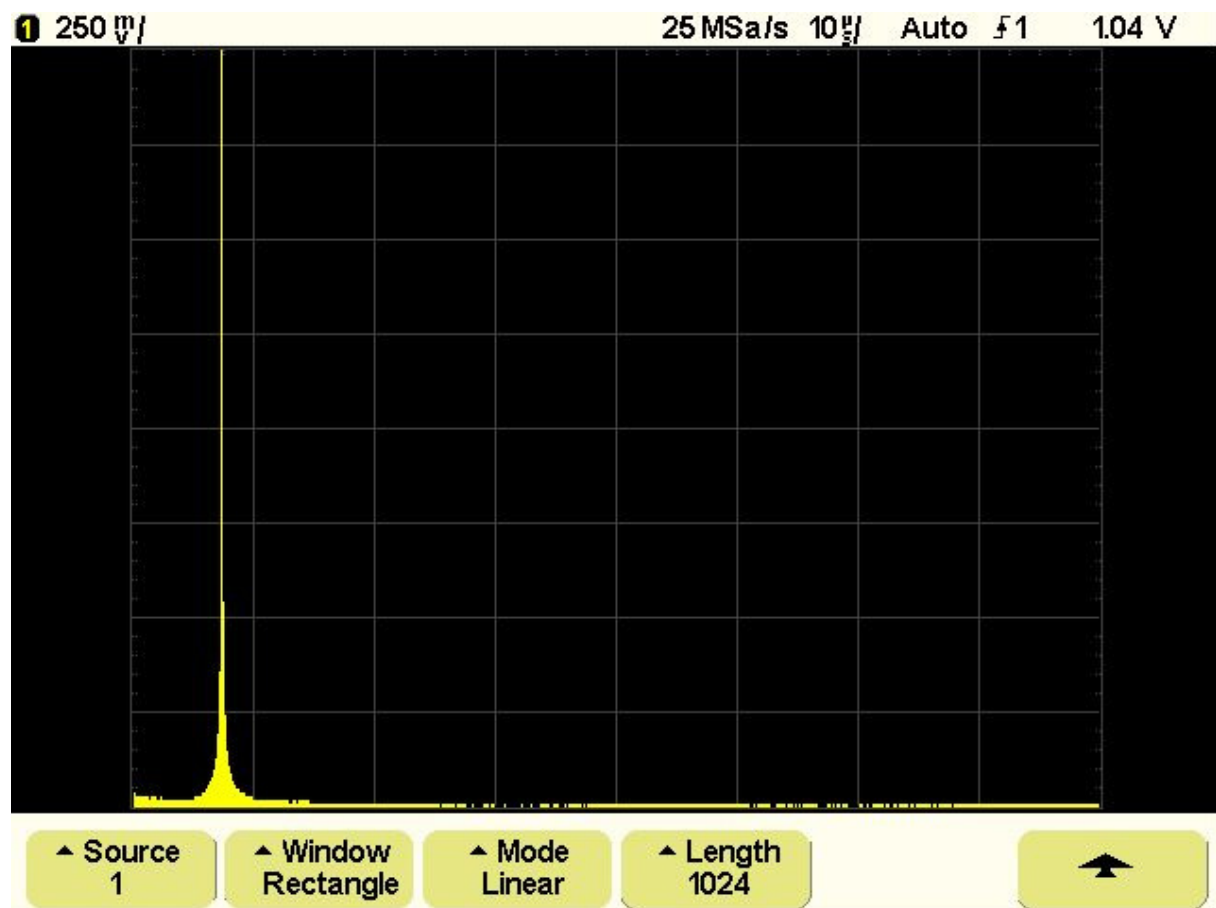


Abbildung 2: 1 MHz Sinussignal bei 25 Msps

1.2.2 Sampling Rate und Abtasttheorem

Es können grundsätzlich nur Spektralanteile bis zur halben Abtastfrequenz² (Nyquistfrequenz) korrekt dargestellt werden. Höhere Spektralanteile führen zur Entstehung von Scheinfrequenzen (Aliasfrequenzen, Abb. 3 rote Linie), die man bei kontinuierlicher Erhöhung der Signalfrequenz daran erkennen kann, daß sie nicht wie die tatsächlichen Spektrallinien von links nach rechts in Richtung höherer Frequenzen wandern, sondern umgekehrt in Richtung niedriger Frequenzen.

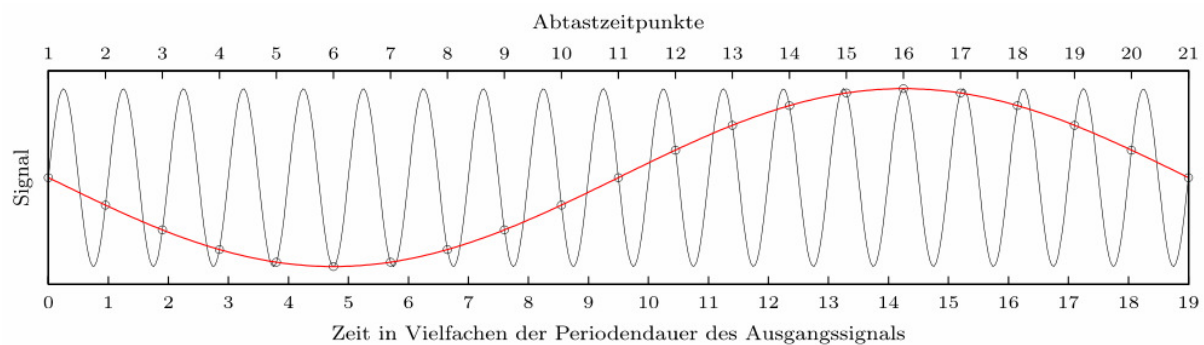


Abbildung 3: Entstehung von Scheinfrequenzen

Da in den Eingängen keine Bandbegrenzungsfiler (Antialiasingfilter) integriert sind, muß der Anwender hier selbst dafür Sorge tragen, daß das Signal bandbegrenzt ist.

Die Frequenzachse beginnt auf der linken Seite mit der Frequenz Null, bzw. dem Gleichanteil. Hat ein Signal einen DC-Offset, so erscheint hier eine Linie, deren Höhe dem Gleichspannungsanteil des Signals entspricht. Ist ein Signal AC-gekoppelt, erscheint hier keine Linie.

Auf der rechten Seite befindet sich die maximal anzeigbare Frequenz, die der halben Abtastrate entspricht. Bei einer Abtastrate von 25 Msps entspricht der rechte Grid-Rand also einer Frequenz von 12,5 MHz.

Bei einem Signal mit nur einer Frequenzkomponente (Sinus, Cosinus) ist Aliasing kein Problem, solange die Frequenz des Signals das Abtasttheorem erfüllt (Abbildung 2).

² Abtasttheorem nach Nyquist, $f_{\max} = 0.5/T_A$ mit $T_A = 1/f_A$

Anders ist das bei den meisten anderen Signalen, die weitere höherfrequente Signalanteile enthalten. Hier ist für die Hauptlinie des Spektrums nur das linke Drittel der Frequenzachse nutzbar, da sonst die höheren Frequenzkomponenten das Abtasttheorem verletzen und als Scheinfrequenzen das echte Spektrum überlagern.

Am Beispiel eines Rechtecksignals läßt sich das mit dem W20xxA sehr schön nachvollziehen.

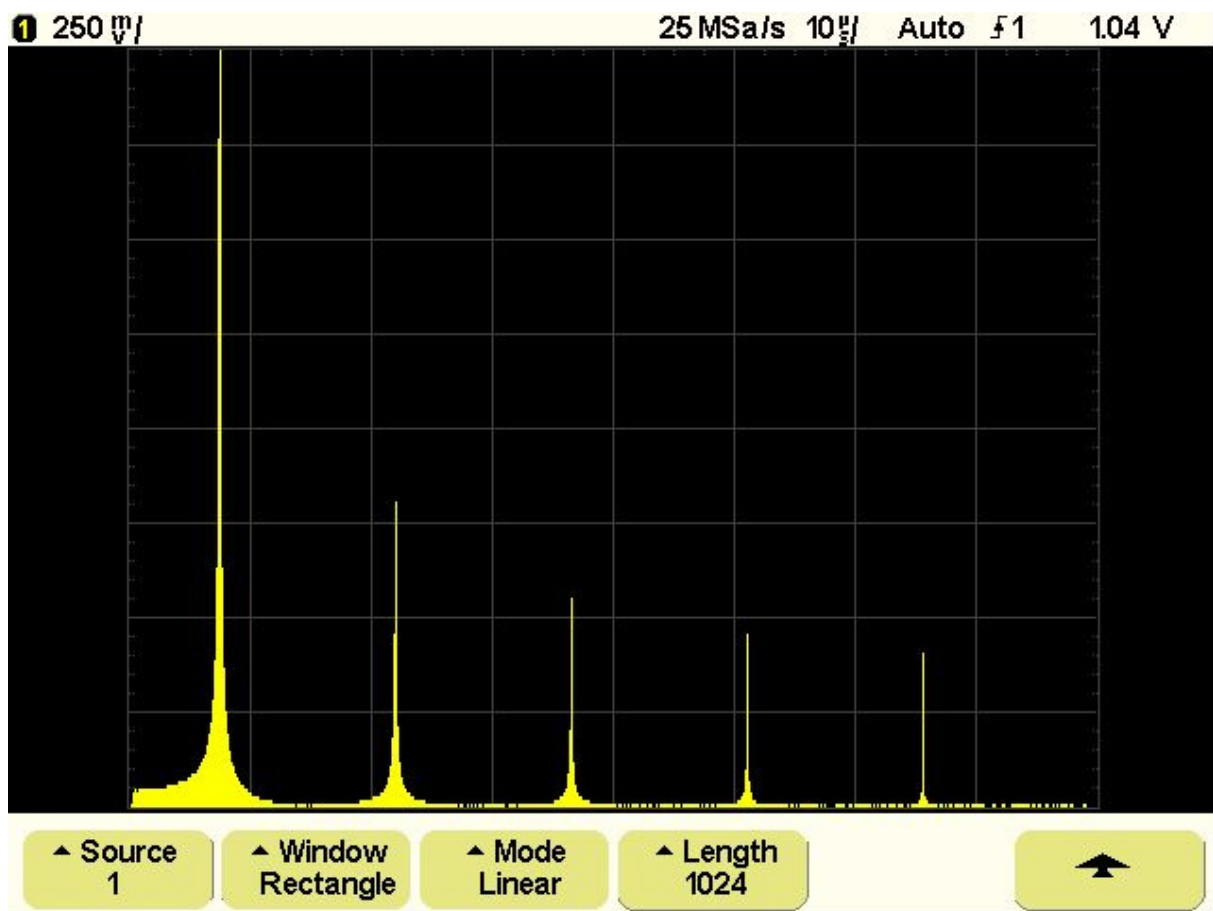


Abbildung 4: 1 MHz Rechtecksignal bei 25 Msps

In Abbildung 4 sieht man die Hauptlinie bei 1 MHz (H1) und die Oberwellen (Harmonische) bei jeweils dem ungeradzahligen Vielfachen der Grundfrequenz (H3, H5, H7, H9). Eine Besonderheit des Rechtecksignals ist die gegenüber der Amplitude des Zeitsignals um das 1,27-fach höhere Spektrallinie der Grundschiwingung (H1).

Erhöht man jetzt die Grundfrequenz des Signals kontinuierlich, so kann man beobachten wie die Linien der Oberwellen zum rechten Bildschirmrand wandern und dann verschwinden. Schon ab 1 MHz aufwärts kann man zusätzlich beobachten wie weitere Spektrallinien vom rechten Rand nach links wandern, ebenfalls mit einer Differenzfrequenz zwischen den Linien die dem 2 fachen der Grundfrequenz entspricht.

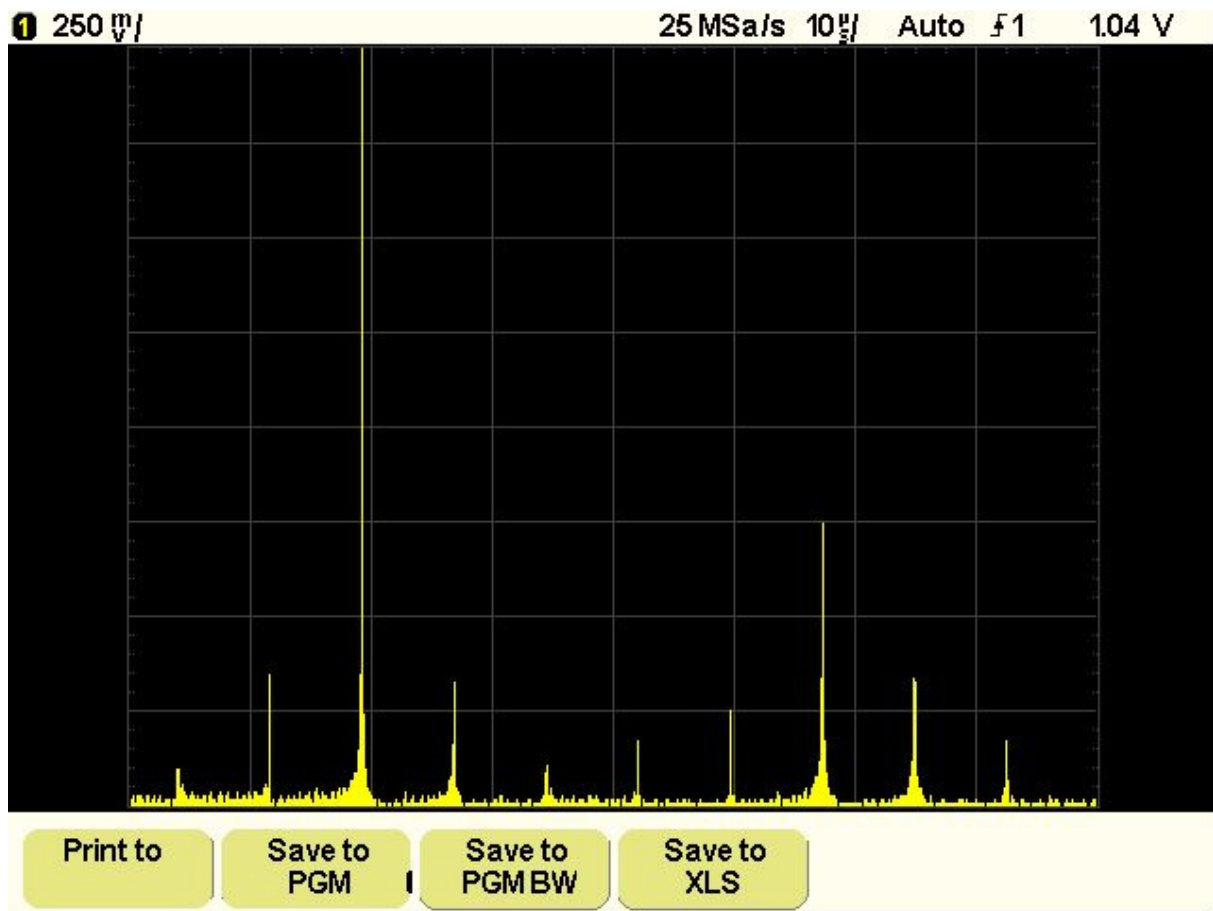


Abbildung 5: 3 MHz Rechtecksignal mit Aliasing

Hierbei handelt es sich um die Scheinfrequenzen (Aliasfrequenzen) der Oberwellen, deren Frequenz schon über der halben Abtastrate liegt.

In Abbildung 2 sehen wir die Grundschiwingung (H1) bei 3 MHz. Die nächste Oberwelle (H3) liegt bereits bei 9 MHz und die Harmonische H5 liegt mit 15 MHz schon außerhalb des darstellbaren Frequenzbereichs von 12,5 MHz. Was wir hier sehen sind also nur zwei reale Spektrallinien (H1, H3) und etliche Aliasfrequenzen der Harmonischen $\geq H5$.

1.2.3 Spektrale Auflösung

Die niedrigste Frequenz, die durch eine FFT-Analyse erfaßt werden kann, ist durch die zeitliche Aufzeichnungslänge T_R des vollständigen Datensatzes bestimmt. Die erste Frequenzlinie entspricht dem Kehrwert der Aufzeichnungslänge.

Bei $N = 1024$ Werten und einer eingestellten Abtastrate von 25 Msps ergibt sich eine spektrale Auflösung von 24,414 KHz pro Linie. Die als Default eingestellte FFT mit 512 Werten kommt hier nur auf 48,414 KHz pro Linie.

Um eine feinere Auflösung zu erzielen hat man demnach zwei Möglichkeiten:

1. Man vergrößert die Aufzeichnungslänge der FFT. Der Nachteil ist ein erhöhter Rechenaufwand (siehe Kapitel 2) mit entsprechend niedrigen Wiederholraten. Zudem ist die spektrale Auflösung auch durch die Anzahl der darstellbaren Bildschirmpixel in horizontaler Richtung begrenzt. Um eine FFT mit 1024 Punkten darzustellen braucht man also einen Bildschirm mit mindestens 512 Pixeln in horizontaler Richtung. Viele günstige DSOs (z.B. aus China, OWON etc.) haben aber nur 320 Pixel Horizontalauflösung, was die sinnvolle Aufzeichnungslänge auf ≤ 512 Werte einschränkt. Das W20xxA bietet bei einer Bildschirmauflösung von 640 x 480 Pixeln eine FFT mit Aufzeichnungslängen von 512 und 1024 Werten.
2. Man verringert die Abtastrate. Dadurch wird die Auflösung besser, aber die nutzbare Bandbreite kleiner.

Will man z.B. Messungen an Audiosignalen vornehmen, ist eine Abtastrate von 25 Msps also viel zu hoch, da die Breite einer Spektrallinie schon breiter ist als der hörbare Frequenzbereich. Hier gilt es letztlich die Abtastrate an das zu messende Signal optimal anzupassen.

Für Audiosignale bietet sich z.B. eine Abtastrate von 50 bis 100 Ksps (5ms/div oder 2ms/div) an. Die spektrale Auflösung beträgt dann z.B. bei 1024 FFT-Werten und 50 Ksps 48,8 Hz pro Linie.

1.2.4 Fensterung

Beim FFT-Algorithmus wird grundsätzlich davon ausgegangen, dass das abgetastete Zeitsignal periodisch ist, da sonst nur bei unendlich langer Abtastung im Zeitbereich ein unverzerrtes Spektrum errechnet werden kann. Periodizität ist aber nur dann gegeben, wenn der Wandlungstakt des ADC genau mit der Frequenz des Eingangssignals übereinstimmt, was jedoch in der Praxis nur die Ausnahme ist. Ist das Zeitsignal daher nicht periodisch, so berechnet der FFT-Algorithmus das Spektrum eines verzerrten periodischen Signals, was zu verfälschten Werten führt.

Man kann sich das im Zeitbereich wie ein über das Signal gestülptes Rechteck vorstellen (daher auch Rechteckfenster). Ein Rechteck ergibt in den Frequenzbereich transformiert eine $\text{Sin}(x)/x$ Funktion (Abb. 6), die wiederum das Spektrum überlagert (Faltung) und je nach Lage der Maxima und Minima bestimmte Spektralanteile verstärkt bzw. dämpft (Abb. 7).

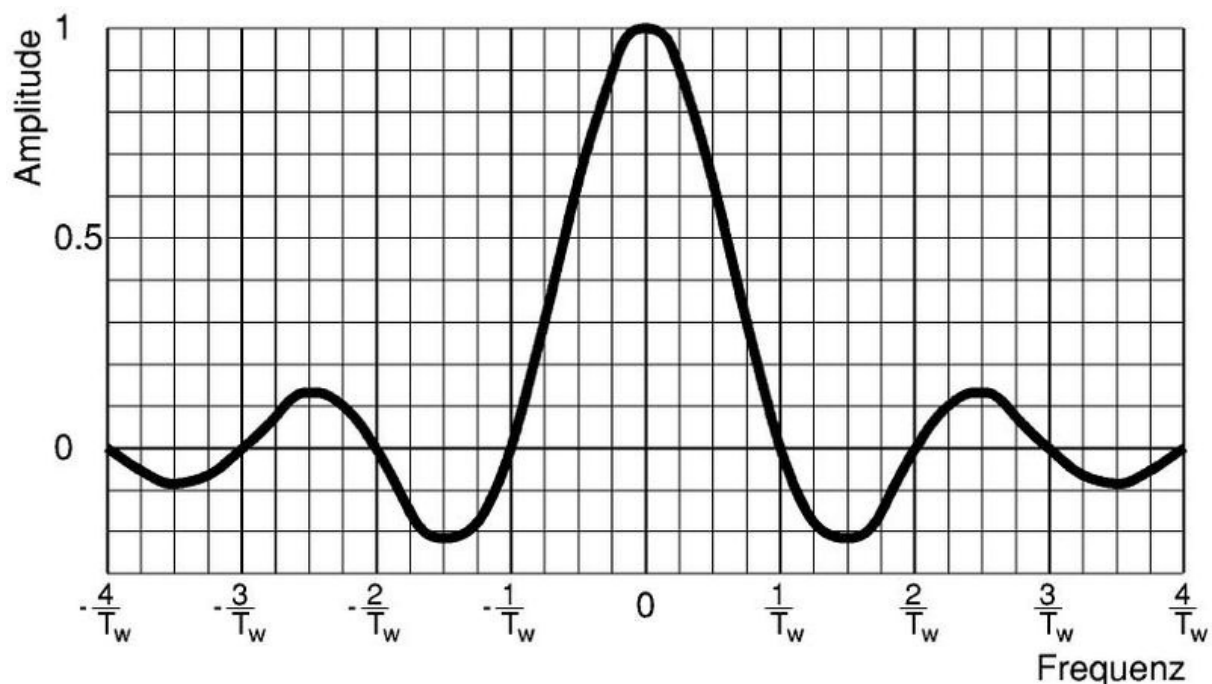


Abbildung 6: Spektrum eines Rechteckfensters

Diese Verfälschung aufgrund eines endlich abgetasteten nicht periodischen Signals wird spektrale Verbreiterung genannt oder auch Leckeffekt (leakage effect). Spektrale Verbreiterungen können ein gravierendes Problem darstellen, da sie schwache Spektralanteile u.U. völlig verdecken.

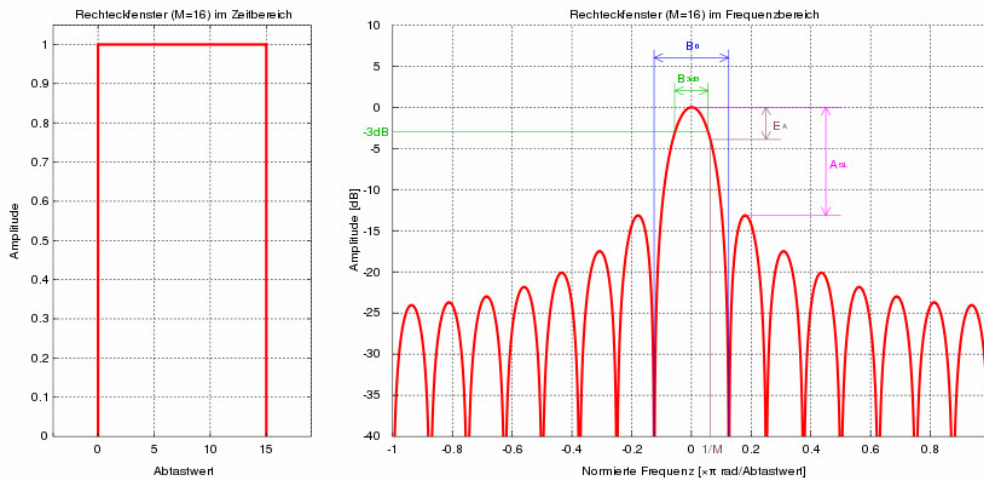


Abbildung 7: Gewichtung im Frequenzbereich

Die **>Window<**-Funktion hat die Aufgabe, die spektrale Verbreiterung auf ein unkritisches Maß zu reduzieren. Gänzlich verhindern läßt sie sich jedoch nicht. Durch die Multiplikation des abgetasteten Zeitsignals mit der Fensterfunktion wird die Periodizität näherungsweise wiederhergestellt.

Grundsätzlich bewirkt die Fensterung eine starke Dämpfung der zuerst und zuletzt abgetasteten Werte im Zeitbereich, während die Werte in der Mitte weniger bis gar nicht gedämpft werden. Eine sehr einfache Möglichkeit ist z.B. ein Dreieckfenster. Aufwändigere Funktionen in Glockenform führen jedoch zu besseren Ergebnissen.

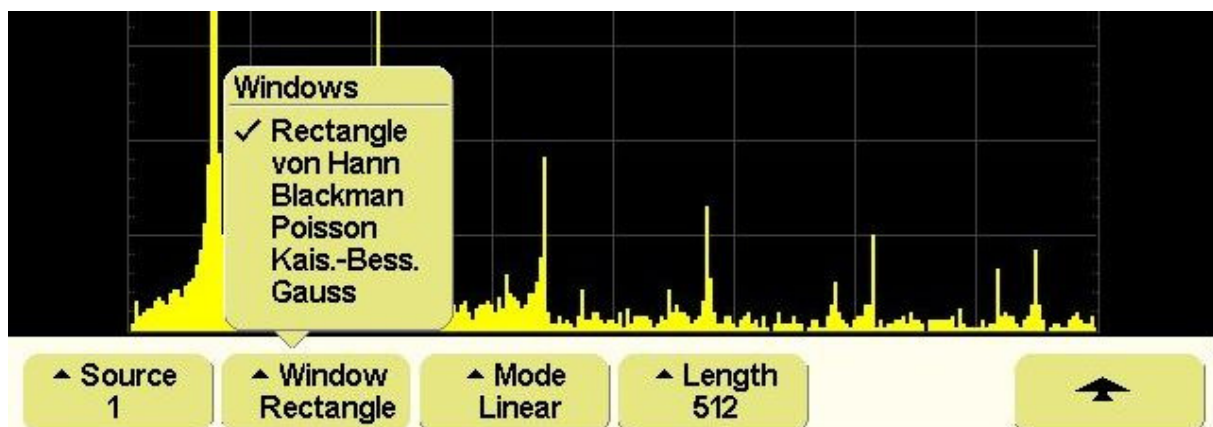


Abbildung 8: Fensterauswahl-Menü

Um z.B. Spektralanteile mit geringer Amplitude nachweisen zu können, wählt man eine Fensterfunktion mit hoher Nebenliniendämpfung im Spektralbereich, was aber zu einer Verbreiterung der Hauptlinie führt.

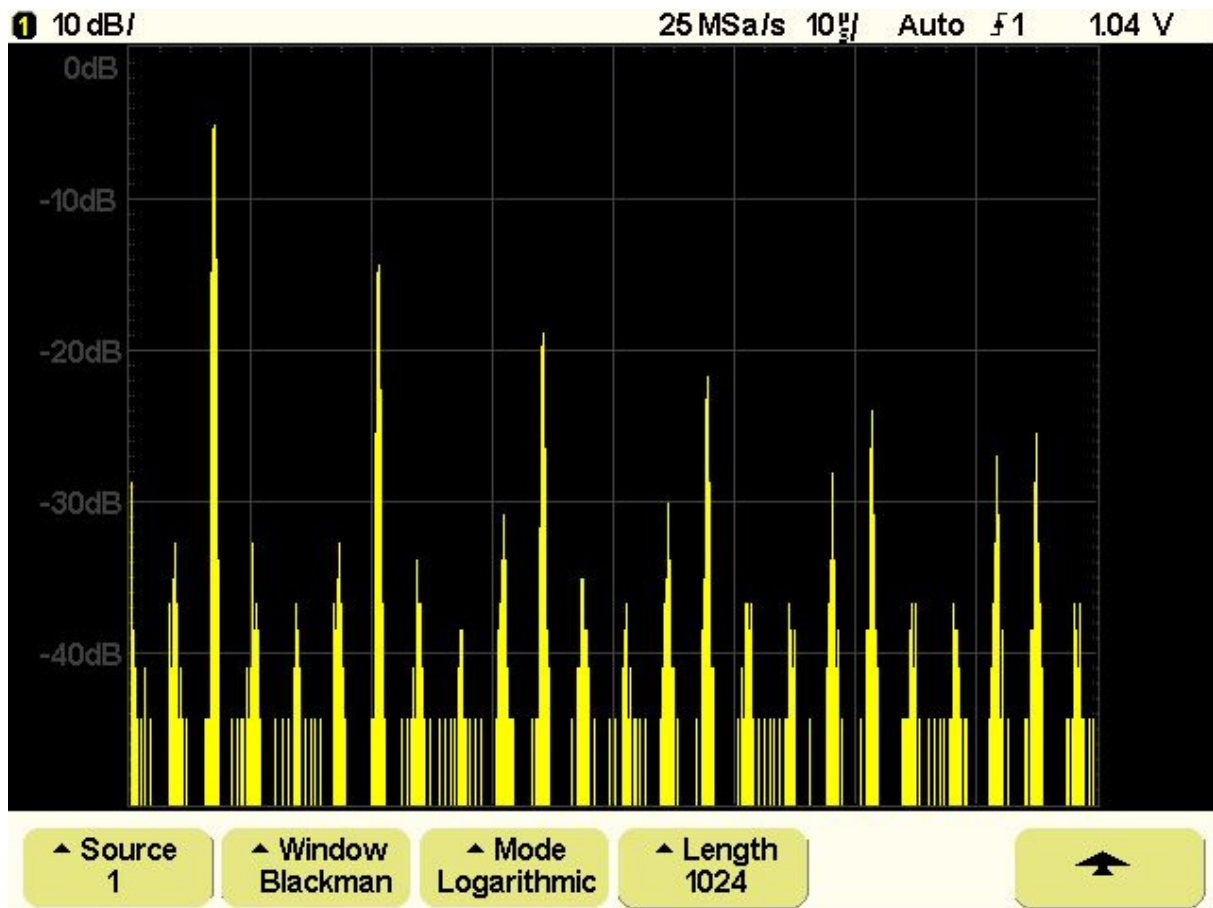


Abbildung 9: Blackman-Fenster bei Rechtecksignal

In Abbildung 9 kann man die Wirkung eines stark dämpfenden Fensters gut sehen. Während bei einem Rechteckfenster (Abb. 10) die durch die Logarithmierung hervorgehobenen niedrigeren Spektralanteile verdeckt werden, kann man hier sowohl die realen Harmonischen (H1 – H11) als auch die als Aliasfrequenz sichtbaren Harmonischen (H13 – H23) von rechts nach links abfallend gut erkennen.

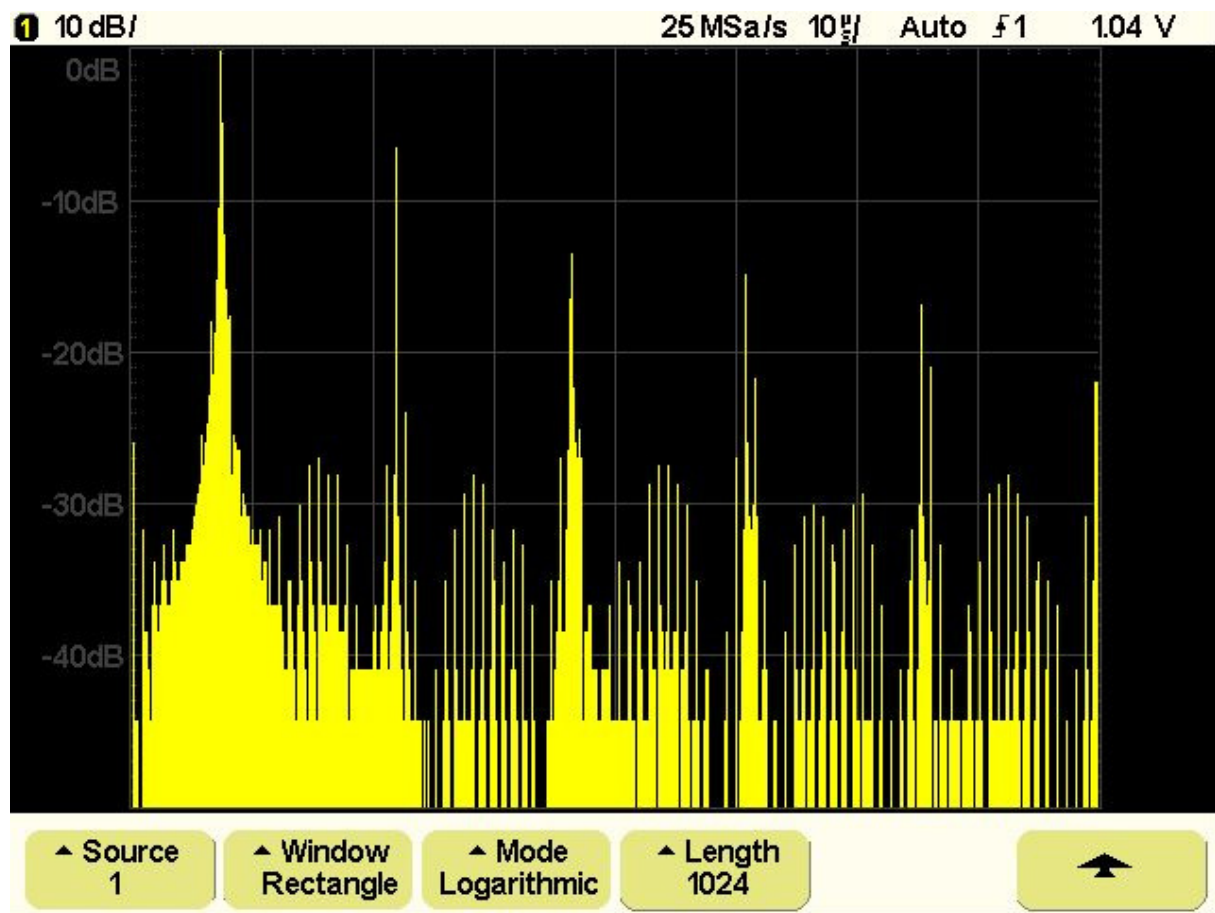


Abbildung 10: Rechtecksignal logarithmiert

Eine Übersicht über die Parameter einiger wichtiger Fensterfunktionen ist im Kapitel 3 zu finden.

1.2.5 Spektrum mit logarithmischen Amplituden

Die Option **>Logarithmic<** erlaubt es, die Amplituden des Spektrums logarithmiert darzustellen (Abb. 10). Der darstellbare Dynamikbereich (DR = dynamic range) ist von der Auflösung des Wandlers abhängig und berechnet sich wie folgt:

$$\text{DR (dB)} = 20 * \log 2^n = 6,02 * n \quad (n = \text{Auflösung in Bit})$$

Für die hier verwendeten 8-Bit-Wandler ergibt sich daher im Idealfall ein Dynamikbereich von 48,2 dB (~50dB).

Da das W20xxA seinen Fullscalewert je nach Messbereich weit ausserhalb des sichtbaren Gridbereichs hat ist es etwas schwierig hier den vollen Dynamikumfang zu nutzen. Bei Aussteuerung des Zeitsignals auf volle Gridhöhe steht bedeutend weniger Dynamikumfang zur Verfügung als der theoretisch mögliche Wert.

Insbesondere die 2er und 1er Messbereiche sind hier sehr ungünstig da sie nur einen Dynamikumfang von etwa 25 dB erreichen bei voller Gridausnutzung im Zeitbereich.

Um den vollen Bereich nutzen zu können muß man das Zeitsignal also fast auf das doppelte des sichtbaren Bereichs aussteuern (Faktor 1,98), was man am besten im nächst höheren Messbereich macht und dann wieder zurückschaltet.

Bei den 5er Messbereichen liegt der Fullscalewert (FS) nur um Faktor 1,28 über dem Gridmaximalwert was einem ungefähren Dynamikumfang von 39 dB bei voller Gridaussteuerung im Zeitbereich entspricht. Auch hier gilt es die Amplitude des Signals im nächst höheren Spannungsbereich einzustellen und dann herunterzuschalten. Auf keinen Fall darf die Amplitude in die Begrenzung laufen (>FS), da sonst das Spektrum verfälscht wird.

2 Die FFT-Funktion

Bei der Fast-Fourier-Transformation handelt es sich um einen Algorithmus, der es erlaubt, den Rechenaufwand und damit die Berechnungszeit der diskreten Fourier-Transformation (DFT) erheblich zu reduzieren.

Dazu werden die Symmetrieeigenschaften der Sinus- und Cosinusfunktion ausgenutzt.

Die DFT läßt sich berechnen mit

$$F_m = \sum_{n=0}^{N-1} f_n \cdot e^{-j(2\pi mn/N)} \quad \text{für } m = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Der invariante Teil des Exponentialterms wird zur Vereinfachung durch W_N ersetzt. Dabei handelt es sich um einen komplexen drehenden Zeiger, der daher auch Twiddle-Faktor³ genannt wird.

$$W_N = e^{-j(2\pi/N)} = \cos(2\pi/N) - j\sin(2\pi/N)$$

Daraus ergibt sich:

$$F_m = \sum_{n=0}^{N-1} f_n \cdot W_N^{nm} \quad \text{für } m = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Jeder Term F_m kann als Linearkombination des Wertesatzes $[f_n]$ mit den Koeffizienten $[W_N^{nm}]$ aufgefaßt werden.

³ Drehfaktor

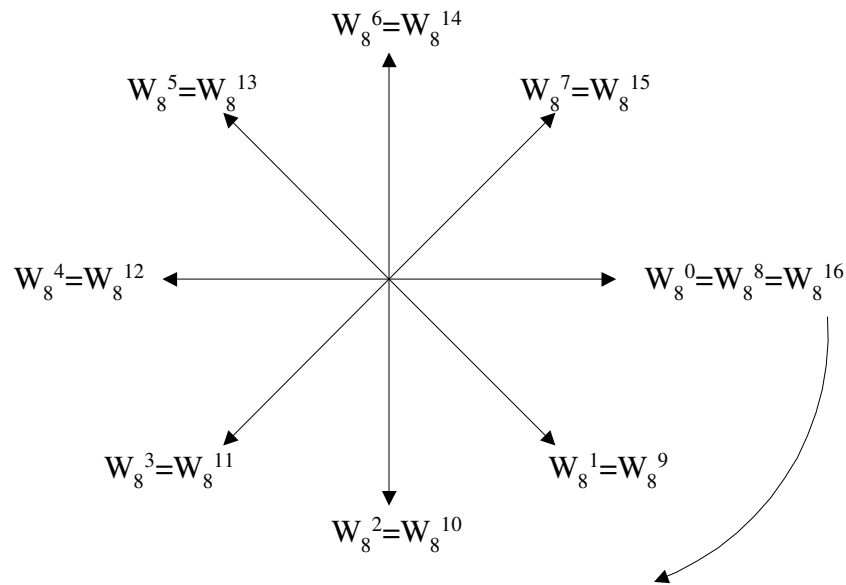


Abbildung 11: Zyklizität des Twiddle-Faktors

Die zyklische Eigenschaft von W_N^{nm} führt dazu, daß einige der N^2 Produkte aus der Gleichung entfallen können.

Dazu läßt sich der Wertesatz $[F_n]$ in zwei Teilsätze zerlegen, von denen einer die geradzahligen Abtastwerte und der andere die ungeradzahligen Abtastwerte enthält.

$$F_m = \sum_{n=0}^{N/2-1} f_{2n} \cdot W_N^{2nm} + W_N^m \cdot \sum_{n=0}^{N/2-1} f_{2n+1} \cdot W_N^{2nm} \quad \text{für } m = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Jede der beiden Summen hat für sich die Form einer DFT, so daß man je eine DFT für die geradzahligen und eine für die ungeradzahligen Abtastwerte erhält.

$$A_m = \sum_{n=0}^{N/2-1} a_n \cdot W_{N/2}^{nm} \quad \text{für } m = 0, 1, 2, \dots, N/2-1$$

$$B_m = \sum_{n=0}^{N/2-1} b_n \cdot W_{N/2}^{nm} \quad \text{für } m = 0, 1, 2, \dots, N/2-1$$

mit $[a_n] = [f_{2n}]$ und $[b_n] = [f_{2n+1}]$

Daraus ergibt sich:

$$F_m = A_m + W_N^m \cdot B_m \quad \text{für } m = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

mit $W_N = e^{-j(2\pi/N)} = \cos(2\pi/N) - j\sin(2\pi/N)$

Die Voraussetzung für diesen Algorithmus ist allerdings eine hochgradige Teilbarkeit der Anzahl N an Abtastwerten. Die zulässigen Werte für N errechnen sich aus $N = B^x$ mit $B = (2,4)$. B wird als Radix oder Basis des Algorithmus bezeichnet.

Bei dem hier verwendeten Algorithmus handelt es sich um eine Radix-2 FFT, so daß $N = 2^x$ Abtastwerte zulässig sind. Die Breite des Anzeigefensters auf dem Bildschirm ist 512 Punkte. Da aber die zweite Hälfte des berechneten Spektrums eine Spiegelung der ersten Hälfte ist und daher nur die erste Hälfte für die Anzeige verwendet wird, muß eine $1.024 = 2^{10}$ Punkte FFT berechnet werden um 512 Spektrallinien darzustellen. Im Falle der 512 Punkte FFT werden 256 Werte berechnet und dann jeweils als Doppellinie dargestellt.

Ein grundlegender Bestandteil des FFT-Algorithmus ist die wiederholte Zerlegung des Abtastwertesatzes in Werte mit geradem und ungeradem Index bzw. die Anordnung der Indizes über Kreuz. Da die Reduzierung des Rechenaufwands vor der Transformation im Zeitbereich stattfindet, wird der Algorithmus auch DIT⁴-Algorithmus genannt.

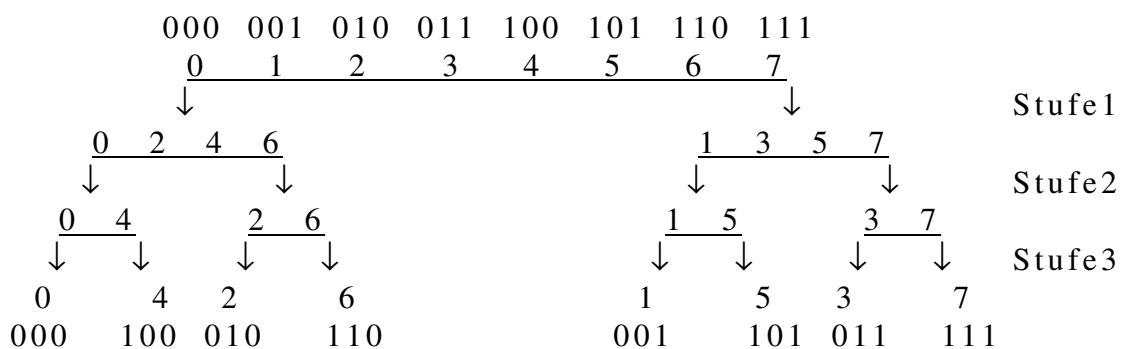


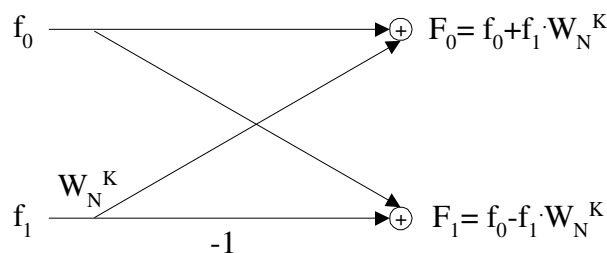
Abbildung 12: Zerlegung des Wertesatzes $N = 8$

Bei einem Wertesatz mit $N = 2^x$ Werten sind x Stufen für eine vollständige Zerlegung notwendig, für $N = 8$ also 3 Zerlegungsstufen und für $N = 1.024$ sind es 10 Stufen. Wenn man die Indizes in binärer Notation schreibt, läßt sich feststellen, daß der jeweils zugehörige Index der ersten und letzten Reihe bitrevers zueinander sind.

Dieses Phänomen der Bitumkehr kann im Programm genutzt werden, um die Zerlegung des Wertesatzes vorzunehmen. Dazu werden die Indizes in einer Tabelle bitrevers vorsortiert, um dann die Werte im Speicher mit bitreverser Indizierung anordnen zu können.

⁴ decimation in time

Nach einer vollständigen Zerlegung erhält man in der untersten Stufe jeweils nur noch zwei Werte. Diese beiden Werte bilden die Eingangswerte (duales Knotenpaar) für die kleinste vorkommende DFT bei der Radix-2 FFT. Dabei handelt es sich um eine DFT 2.Ordnung, die sich in einem Signalflußplan folgendermaßen darstellen läßt:



Quelle: Proakis/Manolakis

Abbildung 13: Radix-2 Butterfly

Dieser Teil des Algorithmus wird wegen der kreuzweise angeordneten Rechenschritte und der damit verbundenen Schmetterlingsform auch als Radix-2 Butterfly bezeichnet.

Während ein normaler DFT-Algorithmus N^2 komplexe Multiplikationen und $N \cdot (N-1)$ komplexe Additionen benötigt, reduziert sich der Rechenaufwand beim FFT-Algorithmus auf $(N/2) \cdot \lg(N)$ komplexe Multiplikationen und $N \cdot \lg(N)$ komplexe Additionen. Diese Reduzierung des Rechenaufwandes macht sich mit steigender Anzahl der Werte immer stärker bemerkbar.

Um die Berechnung noch weiter zu beschleunigen, werden die Sinus- und Cosinuswerte nicht jedesmal, wenn sie benötigt werden, neu berechnet, sondern beim Start des DSO und beim Wechsel der FFT Länge als Tabelle angelegt, auf die sehr schnell zugegriffen werden kann.

Das hier abgebildete Flußdiagramm stammt noch aus der Dokumentation meines damaligen Projekts und zeigt auch in etwa den Ablauf im W20xxA. Allerdings werden die trigonometrischen Tabellen nicht erst beim Start der FFT-Funktion angelegt, sondern schon beim Start der Firmware.

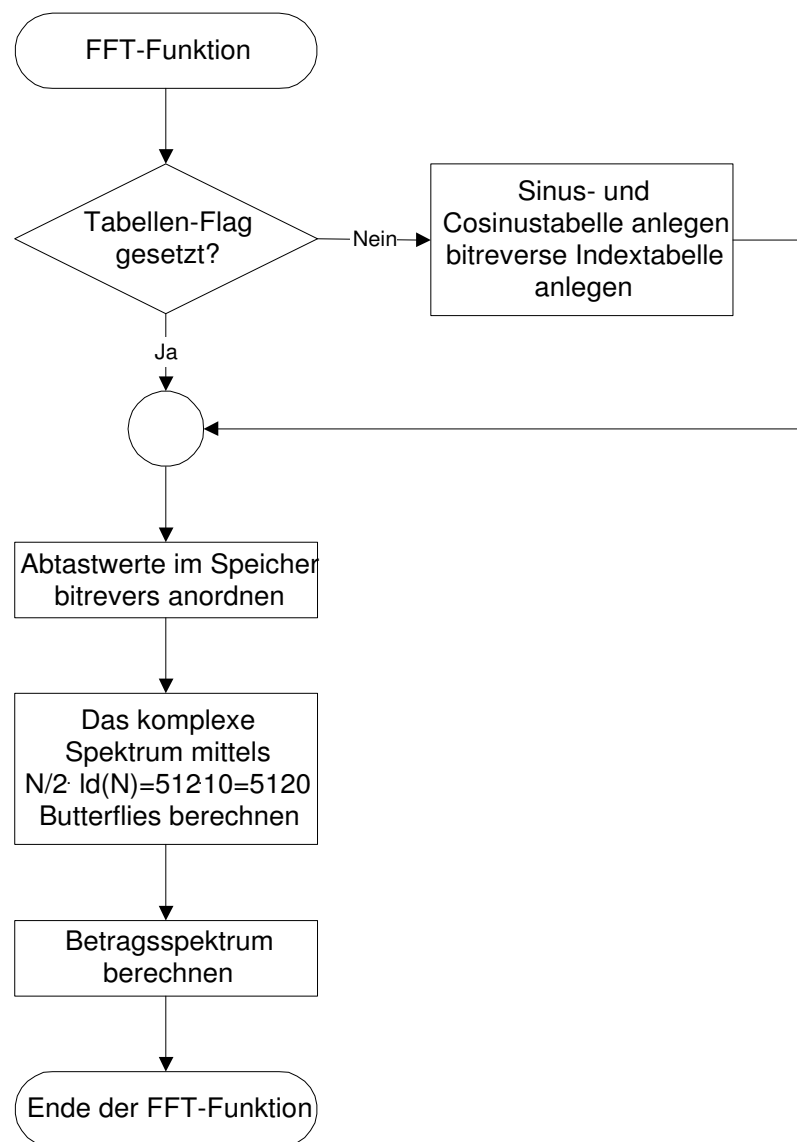


Abbildung 14: Flußdiagramm der FFT-Funktion

3 Fensterfunktionen

3.1 Parameter einiger Fensterfunktionen

Fensterfunktion	Höchste Nebenlinie	Abfallrate der Nebenlinien [dB/Oktave]	3 dB Grenze der Hauptlinie	Maximaler Abtastfehler
Rechteck	-13 dB	-6	$1 * \Delta f^5$	3,92 dB
Blackman	-58 dB	-18	$1,68 * \Delta f$	1,10 dB
Hamming	-43 dB	-6	$1,36 * \Delta f$	1,78 dB
Von Hann	-31 dB			1,42 dB
Kaiser-Bessel				
$\alpha = 2,0$	-46 dB	-6	$1,43 * \Delta f$	1,46 dB
$\alpha = 2,5$	-57 dB	-6	$1,57 * \Delta f$	1,20 dB
$\alpha = 3,0$	-69 dB	-6	$1,71 * \Delta f$	1,02 dB
$\alpha = 3,5$	-82 dB	-6	$1,83 * \Delta f$	0,89 dB
Poisson				
$\alpha = 2,0$	-19 dB	-6	$1,21 * \Delta f$	2,09 dB
$\alpha = 3,0$	-24 dB	-6	$1,45 * \Delta f$	1,46 dB
$\alpha = 4,0$	-31 dB	-6	$1,75 * \Delta f$	1,03 dB

3.2 Formeln einiger Fensterfunktionen

Rechteckfenster

$$x_n = 1,0 \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

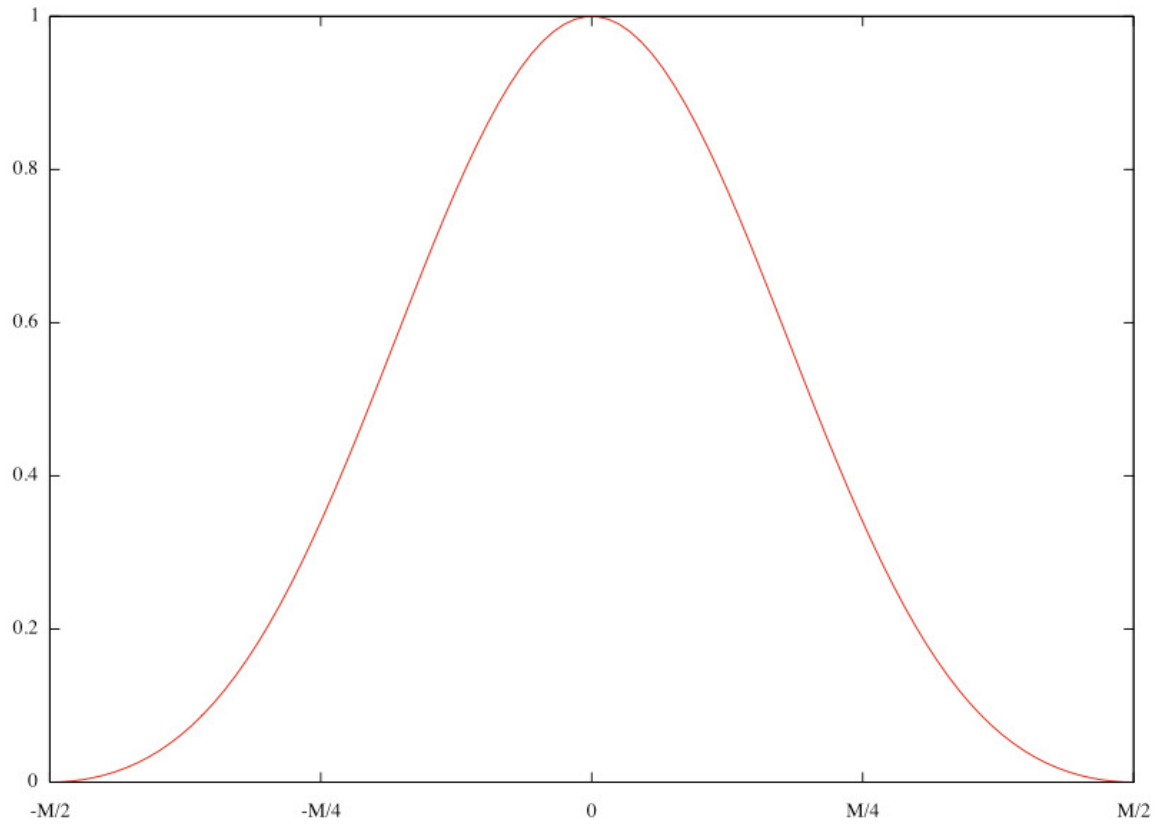
Hamming-Fenster

$$x_n = 0,54 - 0,46 * \cos(2\pi/N * n) \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

⁵ Δf = Spektrallinienabstand, Auflösung

Blackman-Fenster (3-Term)

$$x_n = 0,42 - 0,5 \cdot \cos(2\pi/N \cdot n) + 0,08 \cdot \cos(2\pi/N \cdot 2n) \text{ für } n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

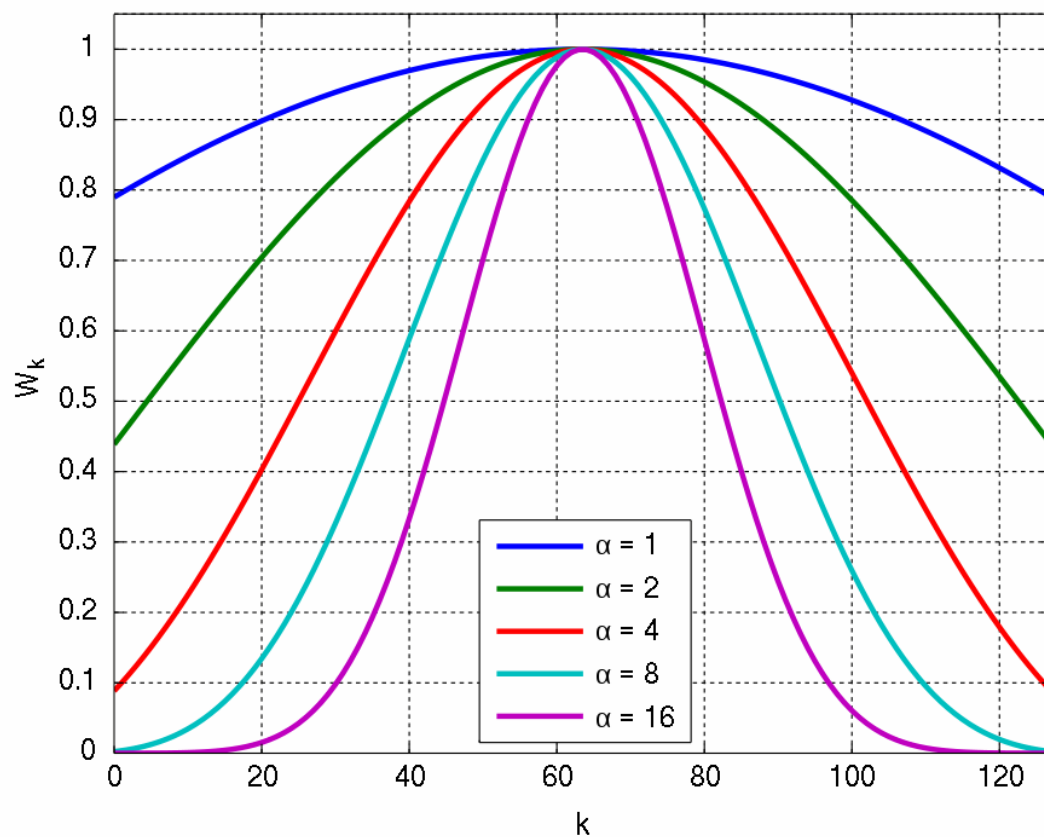


Kaiser-Bessel-Fenster

$$W_n = \frac{I_0 \left[\alpha \sqrt{\left(\frac{N-1}{2} \right)^2 - \left(n - \frac{N-1}{2} \right)^2} \right]}{I_0 \left[\alpha \frac{N-1}{2} \right]} \quad \text{für } n=0,1,2,\dots,N-1$$

$I_0(x)$ ist die modifizierte Besselfunktion erster Art nullter Ordnung.
Diese Funktion läßt sich mit folgender Reihenentwicklung darstellen:

$$I_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k}}{(k!)^2}$$



Poisson-Fenster (Exponential-Fenster)

$$W_n = e^{\left(-\alpha \frac{|n-N/2|}{N/2}\right)}$$

für $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ **Von Hann-Fenster (Cosinus-Fenster)**