



$$- \frac{\hat{\lambda}_\omega}{2\pi} \approx 0.293 \hat{\lambda}_\omega$$

## 2.2 Hörner

Unter einem **Horn** sei stets eine seitlich geschlossene Führung verstanden, deren (variable) Querschnittsausdehnung klein gegenüber der Länge ist.

### 2.2.1 Die WEBSTER-Gleichung

Eine zylindrische Bohrung (Rohr) der Länge  $L$  mit dem Radius  $R$  ergibt sich als Grenzfall

$$x_2 - x_1 = L, \quad \vartheta_0 x_1 = R, \quad x_1 \rightarrow \infty$$

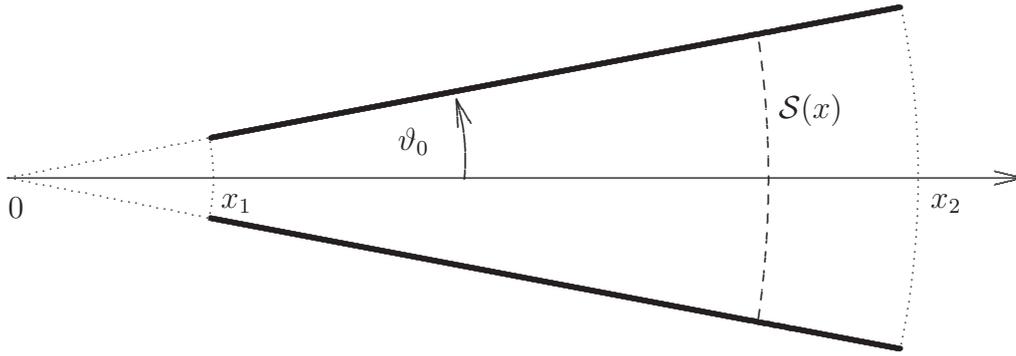
der in Abb. 2.1 skizzierten konischen Bohrung.<sup>23</sup>

---

Version vom 21. November 2009

<sup>22</sup>Die FOURIERSche Integraltransformation ist im allgemeinen Fall eigentlich im distributions-theoretischen Sinne zu verstehen.

<sup>23</sup>Ausgeprägt konische Bohrung haben Oboe, Fagott, Saxophon, Schalmel, Kornett, Serpent, Tarogato, schottische Tenor-Dudelsackpfeife. Natürlich treten am Eingang und am Ende des Horns stets Abweichungen auf.

Abb. 2.1: Konische Bohrung im Längsschnitt<sup>24</sup>

In diesem Sinne sind Ergebnisse für allgemeine konische Bohrunge auch auf zylindrische Bohrunge anwendbar.<sup>25</sup> Für Schallschwingungen in der konischen Bohrung gilt die **WEBSTER-Gleichung**<sup>26</sup>

$$\frac{1}{|\mathcal{S}(x)|} \frac{\partial}{\partial x} \left( |\mathcal{S}(x)| \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{P}(x, t) \right) = \left( \frac{1}{\hat{c}} \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \mathcal{P}(x, t), \quad (2.16)$$

zusammen mit

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{U}(x, t) = -\frac{1}{\langle \mu \rangle} \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{P}(x, t), \quad (2.17)$$

**wenn** die Normalkomponente des Schalldruckgradienten auf der Hornwandung verschwindet,<sup>27</sup> wobei

$$\begin{aligned} |\mathcal{S}(x)| &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{array}{l} \text{Flächeninhalt des } x \text{ entsprechenden} \\ \text{(orientierten) Kugelflächenausschnitts } \mathcal{S}(x), \end{array} \right. \\ \mathcal{P}(x, t) &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{array}{l} \text{über } \mathcal{S}(x) \text{ gemittelter} \\ \text{komplexer Schalldruck zur Zeit } t, \end{array} \right. \\ \mathcal{U}(x, t) &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{array}{l} \text{über } \mathcal{S}(x) \text{ gemittelte Normalkomponente der} \\ \text{komplexen Schallschnelle zur Zeit } t. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (2.18)$$

**Beweisskizze:** Wenn wir mit  $\mathcal{G}_{x,\epsilon}$  jeweils das geschlossene Gebiet bezeichnen, das von<sup>28</sup>  $-\mathcal{S}(x)$ ,  $\mathcal{S}(x + \epsilon)$  und einem entsprechenden Stück der Hornfläche berandet

Version vom 21. November 2009

<sup>24</sup>Bei den druckgesteuerten Blasinstrumenten wird der Schall am engeren, bei der Barockflöte dagegen am offeneren Ende angeregt.

<sup>25</sup>Siehe dazu z.B. (Ayers et al., 1985, Fig. 4).

<sup>26</sup>Bzgl. der ursprünglichen Interpretation siehe (Webster, 1919).

<sup>27</sup>Gemäß (A.12) ist das für ideal schallharte Hornwände garantiert.

<sup>28</sup>Wir benutzen die Schreibweise von (Lücke, ein).

wird, dann können wir schließen:

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{1}{\hat{c}} \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \mathcal{P}(x, t) \\
&= \left( \frac{1}{\hat{c}} \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \frac{1}{|\mathcal{S}(x)|} \int_{\mathcal{S}(x)} \mathcal{P}(\mathbf{x}', t) \, dS_{\mathbf{x}'} \\
&\stackrel{(1.35), (1.38)}{=} \frac{1}{|\mathcal{S}(x)|} \int_{\mathcal{S}(x)} \Delta_{\mathbf{x}'} \mathcal{P}(\mathbf{x}', t) \, dS_{\mathbf{x}'} \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\epsilon |\mathcal{S}(x)|} \int_{\mathcal{G}_{x, \epsilon}} \Delta_{\mathbf{x}'} \mathcal{P}(\mathbf{x}', t) \, dV_{\mathbf{x}'} \\
&\stackrel{\text{GAUSS}}{=} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\epsilon |\mathcal{S}(x)|} \int_{\partial \mathcal{G}_{x, \epsilon}} \nabla_{\mathbf{x}'} \mathcal{P}(\mathbf{x}', t) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}'} \\
&= \frac{1}{|\mathcal{S}(x)|} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\epsilon} \left( \int_{\mathcal{S}(x+\epsilon)} \nabla_{\mathbf{x}'} \mathcal{P}(\mathbf{x}', t) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}'} - \int_{\mathcal{S}(x)} \nabla_{\mathbf{x}'} \mathcal{P}(\mathbf{x}', t) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}'} \right).
\end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{S}(x)} \nabla_{\mathbf{x}'} \mathcal{P}(\mathbf{x}', t) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}'} &= \left( \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\vartheta_0} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left( \frac{\partial}{\partial r} \mathcal{P}(r, \vartheta, \varphi, t) \right) r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \right) \Big|_{r=x} \\
&= \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\vartheta_0} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \mathcal{P}(r, \vartheta, \varphi, t) \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \right) \Big|_{r=x} \\
&= |\mathcal{S}(x)| \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{P}(x, t) \tag{2.19}
\end{aligned}$$

folgt daraus (2.16). (2.17) folgt gemäß

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{U}(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{|\mathcal{S}(x)|} \int_{\mathcal{S}(x)} \mathcal{U}(\mathbf{x}', t) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}'} \\
&\stackrel{(1.37)}{=} \frac{1}{|\mathcal{S}(x)|} \int_{\mathcal{S}(x)} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \mathcal{D}(\mathbf{x}', t) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}'} \\
&\stackrel{(1.35)}{=} \hat{c}^2 \frac{1}{|\mathcal{S}(x)|} \int_{\mathcal{S}(x)} \Delta_{\mathbf{x}'} \mathcal{D}(\mathbf{x}', t) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}'} \\
&\stackrel{(1.36)}{=} \hat{c}^2 \frac{1}{|\mathcal{S}(x)|} \int_{\mathcal{S}(x)} \nabla_{\mathbf{x}'} (\nabla_{\mathbf{x}'} \cdot \mathcal{D}(\mathbf{x}', t)) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}'} \\
&\stackrel{(1.38)}{=} -\hat{c}^2 \langle \kappa \rangle \frac{1}{|\mathcal{S}(x)|} \int_{\mathcal{S}(x)} (\nabla_{\mathbf{x}'} \mathcal{P}(\mathbf{x}', t)) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}'} \\
&\stackrel{(1.23), (2.19)}{=} -\frac{1}{\langle \mu \rangle} \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{P}(x, t). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Man sieht leicht, daß die Gleichungen (2.16) und (2.17) mit (2.18) näherungsweise auch für allgemeinere Hornformen, wie z.B. in Abbildung 2.2 skizziert, gelten, solange die Führung rotationssymmetrisch, schallhart und nicht zu stark gekrümmt ist.

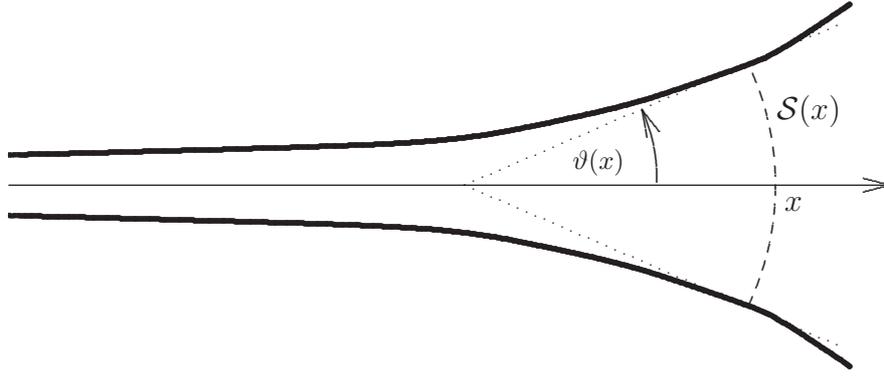


Abb. 2.2: Typische Hornform (Längsschnitt)

**Anmerkung:** Daß exakte Lösungen existieren, für die der Schalldruck im Horninneren auf den Flächen  $\mathcal{S}(x)$  konstant ist, ist nur dann zu erwarten, wenn die Wellengleichung (A.15) (bzw. die HELMHOLTZ-Gleichung (A.32)) in orthogonalen Koordinaten, die diesen Flächen angepaßt sind, separierbar ist. Diese wenigen Koordinatensysteme sind z.B. in (Morse und Feshbach, 1953, Sect. 5.1), (Kratzer und Franz, 1960, §3) und (Moon und Spencer, 1961, Sect. I) abgehandelt.

Mit der Wellenfunktion

$$\Psi(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{|\mathcal{S}(x)|} \mathcal{P}(x, t) \quad (2.20)$$

und dem effektiven Radius

$$a(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{|\mathcal{S}(x)|}{\pi}} \quad (2.21)$$

von  $\mathcal{S}(x)$  gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathcal{S}|} \frac{\partial}{\partial x} \left( |\mathcal{S}| \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{P}(x, t) \right) &= \frac{1}{a^2 \pi} \frac{\partial}{\partial x} \left( a^2 \pi \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\Psi}{a \sqrt{\pi}} \right) \right) \\ &= \frac{1}{a^2 \sqrt{\pi}} \frac{\partial}{\partial x} \left( a \frac{\partial}{\partial x} \Psi - a' \Psi \right) \\ &= \frac{1}{a \sqrt{\pi}} \left( \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \Psi - \frac{a''}{a} \Psi \right). \end{aligned}$$

Die WEBSTER-Gleichung ist also äquivalent zu

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \Psi(x, t) - \frac{a''(x)}{a(x)} \Psi(x, t) = \left( \frac{1}{\hat{c}} \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \Psi(x, t)$$

bzw., im monochromatischen Falle

$$\Psi(x, t) = \Psi(x) e^{-ik\hat{c}t},$$

zu<sup>29</sup>

$$\boxed{\Psi''(x) + \left(k^2 - \frac{a''(x)}{a(x)}\right) \Psi(x) = 0.} \quad (2.22)$$

Eine reellwertige Funktion  $f(x)$  ist streng **konvex** resp. **konkav**, wenn  $f''(x) > 0$  resp.  $f''(x) < 0$  (vgl. Abschn. 3.1.2.1 von (Lücke, mech)). Eine **reelle** Lösung von (2.22) ist also genau dann streng konvex resp. konkav, wenn die **Hornfunktion**

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a''(x)}{a(x)}$$

größer resp. kleiner als  $k^2$  ist.<sup>30</sup> Dementsprechend bezeichnet man  $\hat{c} \sqrt{F(x)}$  im Falle  $F(x) > 0$  als **Abschneidekreisfrequenz** an der Stelle  $x$ .

### 2.2.2 Spezielle Hornformen

Lösungen von (2.16) in Form fortschreitender Wellen

$$\mathcal{P}(x, t) = \frac{\mathcal{A}}{\sqrt{|\mathcal{S}(x)|}} e^{-ik(\hat{c}t - \varphi(x))}, \quad 0 \neq \varphi'(x) \text{ reell,}$$

können nur dann existieren, wenn das zugehörige

$$\Psi(x) = \mathcal{A} e^{ik\varphi(x)}$$

der Gleichung (2.22),  $\varphi(x)$  also der Gleichung

$$ik\varphi''(x) - \left(k\varphi'(x)\right)^2 + \left(k^2 - \frac{a''(x)}{a(x)}\right) = 0 \quad (2.23)$$

genügt. Aus dem Verschwinden des Imaginärteils von (2.23) folgt zunächst

$$\tau \stackrel{\text{def}}{=} \varphi'(x) = \text{const.} \neq 0 \quad (2.24)$$

und damit aus dem Verschwinden des Realteils von (2.23)

$$F(x) = \frac{a''(x)}{a(x)} = k^2(1 - \tau^2).$$

Version vom 21. November 2009

<sup>29</sup>Man beachte, daß (2.22) die gleiche Struktur hat wie die zeitunabhängige SCHRÖDINGER-Gleichung

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d}{dx}\right)^2 + V(x)\right) \Psi(x) = E \Psi(x).$$

<sup>30</sup>Man beachte, daß  $1/F(x)$  für geringe Neigung der Hornmeridiane näherungsweise mit dem äußeren Krümmungsradius der Hornwandung an der  $x$  entsprechenden Stelle übereinstimmt.

Fortschreitende Wellen o.a. Form existieren also nur für<sup>31</sup>

$$k^2 > m^2 \stackrel{\text{def}}{=} F(x) = \text{const.}$$

Für kleinere  $k^2$  gehen diese Lösungen<sup>32</sup>

$$\mathcal{P}(x, t) = \frac{\mathcal{A}}{\sqrt{|\mathcal{S}(x)|}} e^{-i(k\hat{c}t \mp \sqrt{k^2 - m^2} x)}$$

von (2.16) in (in Energiestromrichtung) gedämpfte stehende Wellen über, im Einklang mit der Schlußbemerkung von 2.2.1.

**Spezialfälle konstanter Hornfunktion**  $F(x) = m^2$  :

1. **Konische Hörner** sind durch  $m = 0$  definiert.<sup>33</sup> Hier existieren Konstanten  $x_0, \vartheta_0$  mit

$$a(x) = (x + x_0) \tan \vartheta_0. \quad (2.25)$$

2. **Exponentielle Hörner** sind durch

$$m \neq 0, \quad a(x) = a_0 e^{mx} \quad \text{für geeignetes } a_0 > 0 \quad (2.26)$$

definiert.

3. **Katenoidale Hörner** sind durch

$$m \neq 0, \quad a(x) = a_0 \cosh(mx) \quad \text{für geeignetes } a_0 > 0$$

definiert.<sup>34</sup>

Exponentielle und katenoidale Hörner eignen sich oberhalb der Abschneidefrequenz gut für Lautsprecher.

Eine weitere Klasse von Hörnern, für die sich (2.22) explizit lösen läßt, ist durch die Bedingung<sup>35</sup>

$$a(x) = b x^{-\epsilon}, \quad 0 \neq \epsilon \neq -1, \quad (2.27)$$

mit geeigneten Konstanten  $b, \epsilon$  gegeben. Hier gilt

$$F(x) = \frac{(\epsilon + 1)\epsilon}{x^2}$$

<sup>31</sup>Für  $F < 0$  wäre  $a(x)$  konkav.

<sup>32</sup>Man beachte die Abhängigkeit der Phasengeschwindigkeit von  $m$ .

<sup>33</sup>Für sie gibt es keine Abschneidefrequenz.

<sup>34</sup>Hier ist glatter zylindrischer Anschluß bei  $x = 0$  möglich.

<sup>35</sup>Für  $\epsilon \rightarrow 0$  geht das Horn in eine zylindrische Röhre, für  $\epsilon \rightarrow -1$  in ein konisches Horn über.

und somit für

$$\Phi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Psi(x)}{\sqrt{x}}$$

gemäß (2.22)

$$\Phi''(x) + \frac{1}{x} \Phi(x) + \left( k^2 - \frac{(\epsilon + 1/2)^2}{x^2} \right) \Phi(x) = 0.$$

Die allgemeine Lösung von (2.22) für diesen Fall ist also<sup>36</sup>

$$\Psi(x) = \mathcal{A} \sqrt{x} J_{\epsilon+1/2}(kx) + \mathcal{B} \sqrt{x} N_{\epsilon+1/2}(kx). \quad (2.28)$$

Deshalb bezeichnet man die durch (2.27) charakterisierten Hörner als **BESSEL-Hörner**. Sie sind geeignet zur Approximation von Schallführungsteilen, die bei Blasinstrumenten – insbesondere bei den Schallbechern – tatsächlich realisiert sind. Z.B. sind die meisten Blechblasinstrumente etwa über die Hälfte ihrer Länge zylindrisch und gehen danach in ein Horn über, das bei modernen Instrumenten nahezu von BESSELSchem Typ ist.<sup>37</sup> Flügelhorn, Althorn, Tenorhorn und Tuba sind allerdings, von einem zylindrischen Mittelstück und dem Schallbecher abgesehen, konisch.

Durch schnelle Weitung des Schallbechers (*Stürze*) läßt es sich erreichen, daß die wesentlichsten Frequenzen im Schallbecher gedämpft und folglich (aufgrund der Energieerhaltung) stark genug reflektiert werden, um gute Resonanz zu ermöglichen, während ein angemessener Teil der Schallenergie abgestrahlt wird ('Tunneleffekt').

### 2.2.3 Störungsrechnung

Im folgenden benutzen wir die vereinfachte Schreibweise

$$S(x) \stackrel{\text{def}}{=} |\mathcal{S}(x)|.$$

Für monochromatische Schalldruckwellen

$$\mathcal{P}(x, t) = \mathcal{P}(x) e^{-ikct}$$

ist die WEBSTER-Gleichung (2.16) dann äquivalent zu dem Eigenwertproblem

$$\hat{A}_S \mathcal{P}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{S(x)} \frac{d}{dx} \left( S(x) \frac{d}{dx} \mathcal{P}(x) \right) = -k^2 \mathcal{P}(x), \quad (2.29)$$

Version vom 21. November 2009

<sup>36</sup>Für halbzahliges  $\nu$  sind  $J_\nu$  und  $N_\nu$  elementare Funktionen, z.B.:

$$J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z, \quad N_{1/2}(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z$$

(siehe z.B. (Jahnke et al., 1960, S. 142)).

<sup>37</sup>Bei älteren Instrumenten ist der Hornteil fast über seine gesamte Länge konisch.

dessen Formulierung durch Angabe der physikalischen Randbedingungen zu ergänzen ist. Der Einfachheit halber sei angenommen, daß das Horn bei  $x = x_1$  und  $x_2$  entweder ideal offen oder ideal geschlossen sei.<sup>38</sup> Gemäß (2.17) müssen dann

$$\alpha_1, \alpha_2 \in \{0, 1\}$$

existieren, für die  $\mathcal{P}(x)$  in dem Definitionsbereich

$$D_{\hat{A}_S} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \mathcal{P}(x) \in C^2([x_1, x_2], \mathbb{C}) : \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^{\alpha_j} \mathcal{P}(x_j) = 0 \text{ für } j = 1, 2 \right\}$$

liegt, bzgl. dessen  $\hat{A}_S$  ein symmetrischer Operator in  $L^2([x_1, x_2], S(x)dx)$  ist:

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} \overline{\hat{\mathcal{P}}(x)} \frac{1}{S(x)} \frac{d}{dx} \left( S(x) \frac{d}{dx} \mathcal{P}(x) \right) S(x) dx \\ &= \overline{\hat{\mathcal{P}}(x)} S(x) \frac{d}{dx} \mathcal{P}(x) \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \overline{\hat{\mathcal{P}}(x)} S(x) \frac{d}{dx} \mathcal{P}(x) dx \\ &= \left( \overline{\hat{\mathcal{P}}(x)} S(x) \frac{d}{dx} \mathcal{P}(x) - \frac{d}{dx} \overline{\hat{\mathcal{P}}(x)} S(x) \mathcal{P}(x) \right) \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \overline{\left( S(x) \frac{d}{dx} \hat{\mathcal{P}}(x) \right)} \mathcal{P}(x) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{|S(x)|} \frac{d}{dx} \left( S(x) \frac{d}{dx} \overline{\hat{\mathcal{P}}(x)} \right) \mathcal{P}(x) |S(x)| dx \quad \forall \hat{\mathcal{P}}, \mathcal{P} \in D_{\hat{A}_S}. \end{aligned}$$

Damit läßt sich die übliche quantenmechanische Störungsrechnung anwenden:

Sei  $\mathcal{P}(x)$  der räumliche Anteil einer monochromatischen Lösung der WEBSTER-Gleichung, die die vorgeschriebenen Impedanzwerte aufweist, zur Wellenzahl  $k$ . Die geringfügige Variation  $S \mapsto S + \delta S$  der Hornwandung bewirke die Verschiebung

$$\mathcal{P}(x) \mapsto \mathcal{P}(x) + \delta \mathcal{P}(x), \quad k \mapsto k + \delta k.$$

Zusätzlich zu (2.29) gelte also die Gleichung

$$\left( \hat{A}_S + \delta \hat{A} \right) (\mathcal{P} + \delta \mathcal{P}) = - (k + \delta k)^2 (\mathcal{P} + \delta \mathcal{P}), \quad \delta \hat{A} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{A}_{S+\delta S} - \hat{A}_S, \quad (2.30)$$

d.h.

$$\left( \hat{A}_S + k^2 \right) \delta \mathcal{P} + (\delta \hat{A}) \mathcal{P} = -2k\delta k \mathcal{P} + \text{Terme höherer Ordnung in den Variationen.} \quad (2.31)$$

Da  $\hat{A}$  symmetrisch ist, folgt aus (2.29)

$$\int_{x_1}^{x_2} \overline{\mathcal{P}(x)} \left( (\hat{A}_S + k^2) \delta \mathcal{P} \right) (x) S(x) dx = 0$$

<sup>38</sup>Dabei spielt es keine Rolle, ob das Horn wirklich über den gesamten Bereich  $x_1 \leq x \leq x_2$  realisiert oder nur effektiv fortgesetzt gedacht ist.

und damit aus (2.31)

$$\delta k \approx - \frac{\int_{x_1}^{x_2} \overline{\mathcal{P}(x)} \left( \delta \hat{A} \mathcal{P} \right) (x) S(x) dx}{2k \int_{x_1}^{x_2} |\mathcal{P}(x)|^2 |S(x)| dx},$$

was wegen

$$\begin{aligned} \delta \hat{A} &= - \frac{\delta S}{S^2} \frac{d}{dx} S \frac{d}{dx} + \frac{1}{S} \frac{d}{dx} (\delta S) \frac{d}{dx} + \text{Terme höherer Ordnung in } \delta S \\ &= \frac{1}{S} \left[ \frac{d}{dx}, \frac{\delta S}{S} \right]_- S \frac{d}{dx} + \text{Terme höherer Ordnung in } \delta S \\ &= \left( \frac{d}{dx} \frac{\delta S}{S} \right) \frac{d}{dx} + \text{Terme höherer Ordnung in } \delta S \end{aligned}$$

schließlich

$$\begin{aligned} \delta k &\approx - \frac{\int_{x_1}^{x_2} \overline{\mathcal{P}(x)} \left( \frac{d}{dx} \frac{\delta S(x)}{S(x)} \right) \mathcal{P}'(x) |S(x)| dx}{2k \int_{x_1}^{x_2} |\mathcal{P}(x)|^2 S(x) dx} \\ &= \frac{\int_{x_1}^{x_2} \frac{\delta S(x)}{S(x)} \frac{d}{dx} \left( S(x) \overline{\mathcal{P}(x)} \frac{d}{dx} \mathcal{P}(x) \right) dx}{2k \int_{x_1}^{x_2} |\mathcal{P}(x)|^2 S(x) dx}, \text{ falls } \delta S(x_1) = \delta S(x_2) = 0. \end{aligned} \quad (2.32)$$

liefert.<sup>39</sup>

Als Beispiel sei eine bei  $x_1 = 0$  ideal geschlossene, bei  $x_2 = L$  ideal offene zylindrische Röhre betrachtet, deren Durchmesser um  $x = L/3$  herum variiert werde. Wegen  $S' = 0$  vereinfacht sich (2.32) hier zu

$$\delta k \approx \frac{\int_0^L \delta S(x) \frac{d}{dx} \left( \overline{\mathcal{P}(x)} \frac{d}{dx} \mathcal{P}(x) \right) dx}{2k \int_0^L |\mathcal{P}(x)|^2 S(0) dx}.$$

Die ungestörten Eigenschwingungen sind entsprechend Übungsaufgabe 5 durch

$$\mathcal{P}(x, t) \sim \cos(k_n x) e^{\mp i k_n \hat{c} t}, \quad k_n = \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

gegeben, woraus

$$\delta k_n \approx - \frac{\int_0^L \frac{\delta |S(x)|}{S(0)} k_n^2 \cos(2k_n x) dx}{2k_n \int_0^L \cos^2(k_n x) dx}$$

folgt. Wegen  $\cos(\pi/3) = 1/2$  erniedrigt sich also der Betrag der Wellenzahl der Grundschwingung ( $n = 1$ ) bei Erweiterung der Röhre um  $x = L/3$  herum. Dagegen erhöht sich der Betrag der Wellenzahl der ersten Oberschwingung ( $n = 2$ ) wegen  $\cos(\pi) = -1$ .

<sup>39</sup>Man sieht leicht, daß  $\mathcal{P}(x)$  bei den vorgegebenen Randbedingungen das Vielfache einer reellwertigen Funktion sein muß.