

***Experimenteller Nachweis der Ampèreschen
Molekularströme;***

von A. Einstein und W. J. de Haas.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

(Vorgetragen in der Sitzung vom 19. Februar 1915.)

(Vgl. oben S. 63.)

(In erweiterter Form eingegangen am 10. April 1915.)

Seitdem durch OERSTEDT entdeckt worden war, daß magnetische Wirkungen nicht nur von permanenten Magneten, sondern auch von elektrischen Strömen ausgehen, gab es zwei voneinander scheinbar vollkommen unabhängige Erzeugungsweisen des magnetischen Feldes. Diese Sachlage brachte das Bedürfnis mit sich, die Wesensverschiedenheit dieser beiden felderzeugenden Ursachen als eine bloß scheinbare aufzufassen, zu versuchen, mit einer einzigen Ursache für die Erregung des Magnetfeldes auszukommen. So wurde AMPÈRE, kurz nach OERSTEDTs Entdeckung, zu seiner bekannten Hypothese von den Molekularströmen geführt, welche die magnetischen Eigenschaften (paramagnetischer und ferromagnetischer Substanzen) auf in den Molekülen gelagerte Ströme zurückzuführen gestattete.

Auch die Elektronentheorie, wie sie insbesondere von H. A. LORENTZ ausgebildet wurde, hielt — in dem Bedürfnis nach einer einheitlichen Auffassung von der Entstehung elektromagnetischer Felder — im wesentlichen an AMPÈRES Auffassung fest. Nach dieser Theorie sind aber die Molekularströme wie überhaupt alle elektrischen Ströme durch bewegte Elementarladungen gebildet.

Trotzdem diese Auffassungen von im Atom bzw. Molekül kreisenden Elementarladungen (meist als negative Elektronen gedacht) das Festhalten an einer einheitlichen Erzeugungsursache des elektromagnetischen Feldes ermöglichten, blieb die Auffassung doch mit den ernstesten prinzipiellen Bedenken behaftet. Schon zur Zeit AMPÈRES mußte die Voraussetzung widerstandsloser Ströme Bedenken erregen. Hierzu kam bei der elektronentheoretischen Ausgestaltung der Hypothese der Umstand, daß nach MAXWELLS Gleichungen kreisende Elektronen bzw. Elektronen-

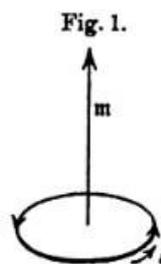
systeme stets ausstrahlen müssen, so daß ein paramagnetisches Atom sein magnetisches Moment nach und nach verlieren müßte, was sicherlich nicht der Fall ist. Da ferner aus dem CURIE-LANGEVINSchen Gesetz hervorgeht, daß das magnetische Moment des Moleküls temperaturunabhängig ist, also auch bei $T = 0$ existiert, so wäre die Energie der kreisenden Elektronenbewegung eine sogenannte „Nullpunktsenergie“, deren Annahme viele Physiker begrifflichen Widerstand entgegensetzen.

Da sich somit die Gründe für und wider AMPÈRES Hypothese die Wage halten, und da nach dem Gesagten vom Zutreffen der AMPÈRESchen Hypothese unsere Stellungnahme gegenüber fundamentalen Fragen der Theorie abhängig ist, wird der im folgenden gegebene experimentelle Nachweis dafür, daß das magnetische Moment der Eiseumoleküle durch kreisende Elektronen bewirkt wird, als wertvoller Fortschritt begrüßt werden. Die Möglichkeit des experimentellen Nachweises beruht darauf, daß nach der Theorie jedem kreisenden Elektron ein Impulsmoment zukommt, das gleichgerichtet ist dem Vektor seines magnetischen Momentes, und das zu ihm in einem festen, von den geometrischen Verhältnissen und der Frequenz des Umlaufes unabhängigen Verhältnis steht; das magnetische Molekül verhält sich mechanisch wie ein Kreisel, dessen Achse stets mit der magnetischen Achse zusammenfällt. Ändert sich der magnetische Zustand eines Körpers, so ändert sich die Orientierung jener Kreisel und damit das Impulsmoment der Magnetisierungselektronen des Körpers. Nach dem Satz von der Erhaltung des Impulsmomentes muß dieser Änderung des inneren Impulsmomentes das Auftreten eines kompensierenden Impulsmomentes anderer Art entsprechen, dessen Sinn und Größe durch die Theorie bestimmt ist, dies letztere wird ein grob mechanisches Impulsmoment sein, d. h. der Körper wird bei einer Änderung seiner Magnetisierung in Drehung versetzt werden. Dieser Effekt ist es, dessen Existenz im folgenden nachgewiesen wird.

Es sei noch bemerkt, daß sich der dargelegte Versuch zu einer neuen, exakten Methode zur Bestimmung des Verhältnisses $\frac{\epsilon}{\mu}$ für Elektronen wird ausbilden lassen.

§ 1. Magnetisches Moment und Impulsmoment des Moleküls. Ein geschlossener Strom ist bezüglich seiner magne-

tischen Fernwirkung nach AMPÈRE einem Magneten äquivalent, dessen magnetisches Moment m gleich ist dem Produkt aus der elektromagnetisch gemessenen Stromstärke i und der Größe der umschlossenen (ebenen) Fläche F . In unserem Falle eines um-



laufenden Elektrons ist die Stromstärke gleich der mit der Anzahl n der sekundlichen Umläufe multiplizierten (elektromagnetisch gemessenen) elektrischen Ladung ϵ der umlaufenden elektrischen Masse. Es ist also

$$m = iF = \epsilon n F. \quad 1)$$

Als Vektor aufgefaßt, steht dies magnetische Moment senkrecht zur Ebene des Kreisstromes; der Sinn dieses Vektors ist der in Fig. 1 angegebene oder der umgekehrte, je nachdem ϵ positiv oder negativ ist.

Das Impulsmoment \mathfrak{M} des umlaufenden Teilchens von der Masse μ ist seiner Größe nach, wie leicht zu zeigen ist, durch die Gleichung

$$\mathfrak{M} = 2\mu n F \quad 2)$$

gegeben. Als Vektor aufgefaßt, stimmt \mathfrak{M} nach Richtung und Sinn mit dem in der Figur angegebenen Pfeile stets überein.

Aus 1) und 2) folgt

$$\mathfrak{M} = \frac{2\mu}{\epsilon} m. \quad 3)$$

Nach dem Gesagten gilt Gleichung 3) auch dann, wenn sie als Vektorgleichung aufgefaßt wird. Ist die umlaufende Masse negativ, so ist ϵ mit seinem negativen Vorzeichen in 3) einzusetzen.

Sind in dem Molekül mehrere umlaufende Elementarladungen vorhanden, die alle gleich großes ϵ und gleich großes μ haben, so gilt für das Molekül

$$\Sigma \mathfrak{M} = \frac{2\mu}{\epsilon} \Sigma m. \quad 3a)$$

Dieselbe Gleichung gilt auch für magnetisierbare Körper beliebiger Ausdehnung, wenn die Summe über alle umlaufende Elektronen erstreckt wird, welche der Körper enthält. In diesem Falle ist $\Sigma \mathfrak{M}$, wofür wir wieder \mathfrak{M} schreiben wollen, das gesamte Impulsmoment seiner Elektronenbewegung; Σm ist das Volumintegral seines Magnetisierungsvektors oder der Vektor J seiner

Gesamtmagnetisierung. Wir erhalten also die für uns fundamentale Gleichung

$$\mathfrak{M} = \frac{2\mu}{\varepsilon} J \quad 3b)$$

oder, falls die umlaufenden Elementarladungen negative Elektronen sind,

$$\mathfrak{M} = -1,13 \cdot 10^{-7} J. \quad 4)$$

§ 2. Folgerungen aus der Existenz des Impulsmomentes der Magnetisierung. Jede Abnahme des Impulsmomentes \mathfrak{M} eines magnetisierten Körpers ist mit dem Auftreten eines Drehmomentes \mathfrak{D} verknüpft gemäß der Vektorgleichung

$$\mathfrak{D} = -\frac{d\mathfrak{M}}{dt} = 1,13 \cdot 10^{-7} \frac{dJ}{dt}. \quad 5)$$

Diese Gleichung wird im folgenden experimentell bestätigt werden. Einstweilen wollen wir zeigen, daß der hier gefundene Effekt sich nicht durch seine Kleinheit der Beobachtung entzieht. Der Körper sei ein Eisenzylinder vom Radius R , der um seine Achse drehbar angeordnet sei; wir berechnen die Winkelgeschwindigkeit ω , welche er nach 5) annimmt, wenn er axial vollständig ummagnetisiert wird. Man erhält

$$Q\omega = \int \mathfrak{D} dt = 1,13 \cdot 10^{-7} \cdot 2J_s,$$

wobei

$$Q = \frac{1}{2} MR^2$$

das Trägheitsmoment des Stäbchens,

$$J_s = \frac{M}{7,8} \cdot 1100$$

die Sättigungsmagnetisierung desselben bedeutet. Wählt man $R = 0,1$ cm, so erhält man etwa

$$\omega = 0,6 \cdot 10^{-2},$$

also eine bequem nachweisbare Winkelgeschwindigkeit.

Die Gleichung 5) gilt auch in dem Falle, daß die zeitliche Änderung des Magnetisierungsvektors im Raume nicht durch eine Änderung des magnetischen Zustandes des Körpers, sondern durch Bewegung (Drehung) desselben zustande kommt. In diesem Falle ist, wenn man mit v den Vektor der Drehgeschwindigkeit des Körpers bezeichnet:

$$\frac{dJ}{dt} = [v, J],$$

so daß man hat

$$\mathfrak{D} = 1,13 \cdot 10^{-7} [v, J]. \quad 6)$$

Es ist dies ein Drehmoment, welches gleichartig ist mit demjenigen Drehmoment in der Kreiseltheorie, welches bei der Präzessionsbewegung ausschlaggebend ist. Gemäß Gleichung 6) müßte ein pendelnd aufgehängter Magnet eine Präzessionsbewegung ausführen, wie ein um seinen Aufhängefaden rotierendes Pendel.

Gleichung 6) ist einer besonders anschaulichen Interpretation fähig. Befände sich nämlich der Körper, dessen Magnetisierung J ist, in einem homogenen magnetischen Felde \mathfrak{h} , so würde das Drehmoment

$$-[\mathfrak{h}, J]$$

auf ihn wirken. Ein Vergleich dieses Ausdrucks mit 6) zeigt, daß die Drehung des Körpers vermöge der Kreiselnatur der magnetischen Moleküle eine Wirkung ausübt, wie ein Magnetfeld gemäß der Formel

Fig. 2.

$$\mathfrak{h} = -1,13 \cdot 10^{-7} v. \quad 7)$$

Wir können in diesem Sinne von einer magnetomotorischen Kraft der Rotation reden, welche übrigens nicht nur auf den Körper als Ganzes, sondern auch auf seine Moleküle — d. h. magnetisierend — wirkt.

Dieser Effekt könnte ebenfalls, wenn auch weniger bequem als der oben angegebene, zur Prüfung der Theorie dienen.

Es ergibt sich ferner, daß der Erddrehung ein der Erdachse paralleles magnetomotorisches Feld entspricht, welches die Richtung Nord—Süd aufweist, und dessen Intensität etwa 10^{-11} ist. Möglicherweise ist dieses die Ursache der annähernden Koinzidenz der magnetischen und der Rotationsachse der Erde.

§ 3. Darlegung der Versuchsmethode. Gleichung 5) läßt sich prinzipiell in folgender Weise prüfen. Man hängt (Fig. 2) einen Zylinder Z aus weichem Eisen mit seiner Achse vertikal an einem dünnen Faden F konzentrisch auf, derart, daß die Schwingungsdauer mehrere Sekunden beträgt. Der Zylinder Z hängt dabei konzentrisch in einer Spule S , mittels welcher der Eisenzylinder parallel zu seiner Achse magnetisiert werden kann. Es wären die Schwingungen zu beobachten, welche der Zylinder Z aus-

führt, wenn die Stromrichtung in S kommutiert, d. h. die Magnetisierung im Zylinder umgedreht wird.

Einer derartigen Methode steht die Schwierigkeit entgegen, daß die von der Spule auf das Eisenstäbchen ausgeübten magnetischen Kräfte sehr stark und gleichzeitig geometrisch nicht ganz regelmäßig verteilt sind, so daß das Stäbchen beim Stromwenden die abenteuerlichsten Bewegungen ausführt und von einer Beobachtung des uns interessierenden, verhältnismäßig kleinen Effektes keine Rede sein kann.

Man vermeidet diese Schwierigkeiten, indem man durch Resonanz ein Multiplizieren des Effektes erzielt. Zu diesem Zwecke hat man nur S mit Wechselstrom zu erregen und den Aufhängefaden F so zu wählen, daß die Torsionsschwingungen des Zylinders dieselbe Frequenz haben wie der erregende Wechselstrom.

Die Schwingungen des unter der Einwirkung des Drehmomentes \mathfrak{D} um die Vertikale stehenden Stäbchens erfolgen gemäß der Gleichung

$$\mathfrak{D} = Q\ddot{\alpha} + \Theta\dot{\alpha} + P\alpha, \quad 8)$$

wobei α den variablen Ausschlagswinkel, Q das Trägheitsmoment, Θ die Torsionskonstante des Aufhängefadens und P einen (kleinen) Reibungsfaktor bedeutet. Statt Θ und P führen wir auch die 2π fache Frequenz (Eigenfrequenz) ω und den Dämpfungsexponenten κ ein. Es ist

$$e^{j(\omega + j\kappa)t} \quad (j = \sqrt{-1}),$$

dann eine Lösung von

$$0 = Q\ddot{\alpha} + \Theta\dot{\alpha} + P\alpha,$$

wenn (falls die Quadrate von P und κ vernachlässigt werden) die Beziehungen

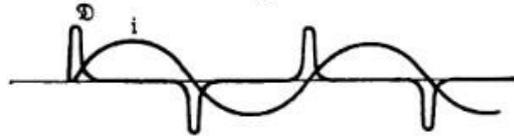
$$\left. \begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{\Theta}{Q}} \\ \kappa &= \frac{P}{2Q} \end{aligned} \right\} \quad 9)$$

erfüllt sind.

Um Gleichung 8) zu lösen, haben wir das Drehmoment \mathfrak{D} als Zeitfunktion in eine Fourierreihe zu entwickeln. Nach Gleichung 5) hat \mathfrak{D} die Phase von $\frac{dJ}{dt}$. Wäre die Magnetisierung stets dem Strome proportional, so würde also \mathfrak{D} nach einer Sinus-

funktion variieren, welche derjenigen des erregenden Stromes i um $\frac{\pi}{2}$ voraneilt. Je größer aber die Amplitude des erregenden Stromes gewählt wird, desto mehr wird das Sättigungsphänomen von Einfluß sein auf die Gestalt der Magnetisierungskurve. Bei sehr großer Amplitude von i wird die Magnetisierung fast plötzlich von einem Sättigungswert in den entgegengesetzten um-

Fig. 3.



schlagen in einem Augenblick, welcher bis auf eine kleine Phasenverspätung mit dem der Stromumkehr zusammenfällt¹⁾. In

diesem Grenzfall, auf den wir unsere Rechnung beziehen wollen, verläuft das Drehmoment gemäß folgender Skizze (Fig. 3), wobei für die einzelne Zacke gemäß Gleichung 5) ist:

$$\int \mathfrak{D} dt = \pm 1,13 \cdot 10^{-7} \cdot 2 J_r \quad 10)$$

Ist nun der Spulenstrom durch

$$i = A \sin \omega t \quad 11)$$

gegeben, so existiert für ϑ eine Entwicklung

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{n=\infty} B_n \cos n \omega t. \quad 12)$$

Von dieser Entwicklung interessiert uns nur das erste Glied, weil nur dieses auf die beobachtbare Schwingung unseres Zylinders von Einfluß ist, indem nur dieses durch Resonanz verstärkt wird. Durch Multiplikation von Gleichung 12) mit $\cos \omega t$ und Integration über eine Periode $T (= \frac{2\pi}{\omega})$ erhält man mit Rücksicht auf Gleichung 10):

$$1,13 \cdot 10^{-7} \cdot 4 J_r = B_1 \frac{\pi}{\omega}. \quad 13)$$

Nach dem Gesagten tritt nun an Stelle von Gleichung 8) die Gleichung

$$B_1 \cos \omega t = Q \ddot{\alpha} + \Theta \dot{\alpha} + P \alpha, \quad 8a)$$

¹⁾ Davon, daß diese Bedingung bei den im § 6 zur quantitativen Prüfung benutzten Daten genügend erfüllt ist, haben wir uns durch Oszillogramme überzeugt, die mit freundlicher Hilfe von Herrn Dr. Rogowski aufgenommen wurden.

deren periodische Lösung mit Rücksicht auf die Gleichungen 9) die Form annimmt:

$$\alpha = \frac{B_1}{2\pi Q\omega} \sin \omega t. \quad 14)$$

Für die Amplitude $|\alpha|$ von α erhält man also mit Rücksicht auf Gleichung 13):

$$|\alpha| = \frac{2}{\pi} \cdot 1,13 \cdot 10^{-7} \frac{J_1}{\pi Q}. \quad 15)$$

Damit haben wir für den Grenzfall starker erregender Ströme die Aufgabe gelöst. Es sei für das Folgende noch besonders hervorgehoben, daß das maßgebende erste Glied in der Entwicklung, Gleichung 12), für das nach der Theorie zu erwartende Drehmoment, der Phase nach gegenüber dem erregenden Strom um $\frac{\pi}{2}$ voraneilt.

§ 4. Die Versuchsanordnung (Fig. 4). Das zylindrische Stäbchen S aus weichem Eisen von 7 cm Länge und 1,8 mm Durchmesser hing in dem vertikalen magnetischen Wechselfelde, welches durch die gleich beschaffenen Spulen A_1 und A_2 erzeugt wurde. Letztere wurden durch drei Distanzklötzchen im Abstände von etwa 1 cm parallel gehalten und ruhten auf einem Dreifuß, dessen Neigung durch drei Fußschrauben geändert werden konnte. Das Stäbchen S hing zentrisch an dem Glasfaden G , der in eine an der oberen Stirnseite des Stäbchens befindliche Bohrung eingekittet war. Der Glasfaden G von etwa 0,2 mm Durchmesser war oben an einem Querstäbchen befestigt, das in die breite, von einem Stativ getragene Messingröhre E eingesetzt war. Zur Veränderung der wirksamen Länge des Aufhängefadens G bzw. zur Einstellung der Resonanz diente folgende Einrichtung. Die breite Röhre E trug unten den engeren Rohransatz D , welcher der vertikal verschiebbaren, durch Schraube P feststellbaren Messingröhre C als Führung diente. Letztere trug an ihrem unteren Ende die Klemmbacken B , deren eine durch die Messingfeder F gegen die andere angedrückt wurde. Durch einen am unteren Ende der einen Klemmbacke horizontal angelöteten Querdraht wurde dafür gesorgt, daß der Aufhängefaden in einer wohl definierten Höhe geklemmt wurde. An dem Stäbchen S waren einander gegenüber zwei aus Mikroskopdeckgläschen angefertigte Spiegelchen in der Höhe des die Spulen A_1 und A_2 trennenden Schlitzes

angeordnet, welches ein als Zeiger dienendes Lichtbündel auf eine 45 cm entfernte Skala reflektierte.

Die Spulen A_1 und A_2 waren einander parallel geschaltet und von solcher Windungszahl, daß sie ein Wechselfeld von etwa 50 Gauß lieferten, wenn sie ohne Vorschaltwiderstand an die Klemmen des uns zur Verfügung stehenden Wechselstromgenerators angeschlossen wurden, dessen Klemmenspannung etwa 120 Volt betrug.

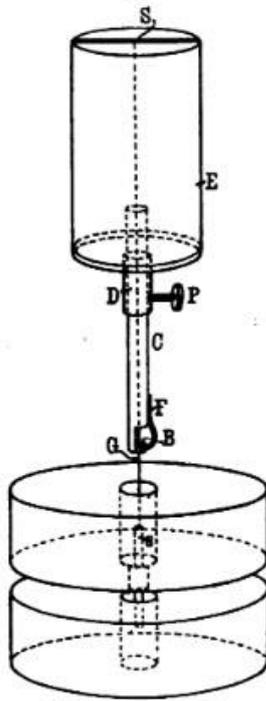
Eine den beschriebenen Apparat umgebende vertikale, durch Akkumulatoren gespeiste Spule (Kompensationsfeld) von etwa 1 m Radius diente zur Kompensierung der Vertikalkomponente des erdmagnetischen Feldes.

§ 5. Die Versuche. Bevor wir den Gang der Versuche darlegen, müssen wir überlegen, was für störende Effekte bei deren Ausführung zu erwarten sind.

1. An den Enden des Stäbchens S entstehen Wechselfole. Auf diese wirkt die Horizontalkomponente des Erdfeldes, wodurch ein wechselndes Drehmoment mit horizontaler Achse entsteht, von der Frequenz des erregenden Wechselstromes. Einem derartigen Drehmoment entsprechende Schwingungen um eine Horizontalachse traten nicht in wahrnehmbarer Stärke bei den Versuchen auf.

2. Bei der unregelmäßigen Lagerung der das Stäbchen bildenden ferromagnetischen Kristalle war (nach den P. WEISS'schen Ergebnissen über die Natur des Ferromagnetismus) zu erwarten, daß gewisse Kristalle so gelagert seien, daß deren Magnetisierung durch das Wechselfeld nicht gekippt werden konnte. Dies bedeutet das Auftreten eines permanenten magnetischen Momentes, das bei der Unregelmäßigkeit der Lagerung der Kristalle sehr wohl eine in Betracht kommende Horizontalkomponente besitzen konnte, welche zusammen mit unvermeidlichen Horizontalkomponenten des magnetischen Wechselfeldes ein wechselndes Dreh-

Fig. 4.



moment um die Vertikale liefern konnte, dessen Phase mit der des erregenden Wechselstromes übereinstimmt („Effekt 2.“).

3. Die Achse, um welche das Stäbchen seine Torsionsschwingungen ausführt, wird nicht genau mit der Achse der Wechselmagnetisierung des Stäbchens zusammenfallen. Deshalb wird ein permanentes horizontales Magnetfeld das Stäbchen in Torsionsschwingungen versetzen müssen. Die Phase des diese Schwingungen erzeugenden Drehmomentes ist dieselbe wie die der Magnetisierung und daher auch (bei starken magnetisierenden Strömen) fast genau diejenige des erregenden Stromes („Effekt 3.“).

Daß die in dem Stäbchen erzeugten Foucaultströme keine wesentliche Bedeutung für den Versuch besitzen können, ist leicht zu sehen. Diese bewirken nur eine gewisse Verlangsamung der Ummagnetisierung des Stäbchens¹⁾.

Außer den genannten störenden Effekten sind — soweit wir sehen — keine weiteren zu erwarten, welche dieselbe Frequenz wie der erregende Strom besitzen, d. h. welche bei unseren Versuchen eine Verstärkung durch die Resonanz erfahren würden. Sie können deshalb, wie aus dem Folgenden hervorgeht, bei den Versuchen keine Rolle gespielt haben.

Wurden die Spulen A_1 und A_2 ans Wechselstromnetz angeschlossen, so blieb der Lichtzeiger auf der Skala absolut ruhig, wenn die wirksame Fadenlänge nicht derart gewählt war, daß zwischen der Torsionsschwingung des Stäbchens und dem Wechselfelde sehr nahe Resonanz bestand. Dieser Resonanzbereich war bei einer wirksamen Fadenlänge von etwa 8 cm etwa 1 mm. Um die Resonanzlage der Klemmbacken B leichter zu finden, ferner um sicher zu sein, daß wir mit der Grundschiwingung des Feldes, nicht mit einer Oberschwingung Resonanz hergestellt hatten, und endlich, um das maßgebende Trägheitsmoment des schwingenden Stäbchens genügend genau zu ermitteln, bedienten wir uns des folgenden Kunstgriffes.

Wir hoben die Aufhängevorrichtung samt dem Stäbchen aus den Spulen und befestigten mit Siegellack am unteren Ende des

¹⁾ Außerdem wurde die Unwirksamkeit der Foucaultströme durch einen Kontrollversuch bewiesen, der statt mit einem Eisenstäbchen mit einem Kupferstäbchen ausgeführt wurde.

Stäbchens S ein horizontales Querstäbchen aus Kupfer vom Trägheitsmoment 10,7, während das Stäbchen S bezüglich seiner geometrischen Achse das Trägheitsmoment 0,0045 besaß. Hieraus folgt, daß das Stäbchen nach Anbringung des Querstäbchens etwa $\sqrt{\frac{10,7}{0,0045}} = 48,8$ mal langsamere Torsionsschwingungen ausführte als ohne Querstäbchen. Stellten wir also die Klemmvorrichtung so ein, daß die sekundliche Frequenz mit Querstäbchen etwa 1 war, so betrug dieselbe ohne Querstäbchen etwa 48,8, was nahe mit der Frequenz des benutzten Wechselstromes übereinstimmte. So gelang zunächst leicht die Auffindung der Resonanz. War dann nach Wiedereinsetzung des Stäbchens genau auf Resonanz eingestellt, so wurde das bei den Versuchen faktisch wirksame Trägheitsmoment durch Messung der Stromfrequenz und, nach abermaligem Herausheben des Stäbchens, durch Messung der Schwingungsfrequenz mit angehängtem, horizontalem Kupferstäbchen ermittelt. War 46,2 die Stromfrequenz (gemessen mit dem Resonanz-Frequenzmesser), 1,14 die Schwingungsfrequenz mit angehängtem Stäbchen, so war das wirksame Trägheitsmoment Q von S gegeben durch

$$Q = 10,7 \left(\frac{1,14}{46,2} \right)^2 = 0,0070,$$

also beträchtlich größer als das geometrisch berechnete Trägheitsmoment $Q = 0,0045$. Es rührt dies selbstverständlich daher, daß die Schwingungen des Stäbchens nicht genau um seine geometrische Achse stattfanden.

War der Wechselstrom eingeschaltet und die Aufhängung des Stäbchens auf Resonanz eingestellt, ohne daß das erdmagnetische Feld kompensiert war, so erhielt man eine Torsionsschwingung des Stäbchens von solcher Größe, daß der Lichtfleck auf der Skala bis zu 3 cm verlängert wurde (bei einem Skalenabstand von 45 cm). Die Länge des Lichtflekes auf der Skala ist im folgenden stets als „doppelter Ausschlag“ bezeichnet.

Es ergab sich zunächst, daß der „Effekt 2.“, d. h. die durch permanente horizontale Magnetisierungen erzeugten Schwingungen keine Rolle spielten. Denn der doppelte Ausschlag änderte sich nicht, wenn durch Änderung der Neigung der Achse der Spulen A_1, A_2

mittels der oben erwähnten Fußschrauben horizontale Wechselfelder erzeugt wurden.

Hingegen machte sich der „Effekt 3.“, d. h. die aus der exzentrischen Lage der Wechselfole resultierenden Drehmomente, stark bemerkbar. Denn der doppelte Ausschlag änderte sich sofort, wenn man den Spulen einen permanenten Magneten näherte; außerdem änderte sich der doppelte Ausschlag sehr erheblich, wenn man die Aufhängevorrichtung samt dem Stäbchen um die Vertikale verdrehte („Azimuth-Empfindlichkeit“ des Effektes).

Dieser „Effekt 3.“ sowie überhaupt die Azimuth-Empfindlichkeit des beobachteten Effektes mußte verschwinden, wenn das Erdfeld mittels der Kompensationsspule entfernt wurde. [Die geometrische Einstellung der Kompensationsspule und die Bestimmung der für die Kompensation nötigen Stromstärke geschah mit Hilfe des Erdinduktors. Nach Kompensation des Erdfeldes blieb ein wohl reproduzierbarer doppelter Ausschlag von 4,5 mm übrig, der seine Azimuthabhängigkeit vollkommen verloren hatte.

Sollte der so erhaltene Effekt der aus der Elektronentheorie gefolgerte sein, so müßte die Phase des ihn erzeugenden Drehmomentes mit der Phase der Ableitung des Magnetisierungsvektors $\left(\frac{dJ}{dt}\right)$ übereinstimmen, also auf der Phase der Magnetisierung J senkrecht stehen. Da das wechselnde Drehmoment, welches vorhin als „Effekt 3.“ bezeichnet wurde, die Phase J hat und durch Anlegen eines horizontalen Feldes erzeugt wird, so darf nach dem Gesagten, falls unser beobachteter Effekt wirklich die Phase von $\frac{dJ}{dt}$ hat, der beobachtete doppelte Ausschlag niemals abnehmen, wenn man der Einrichtung einen permanenten Magneten nähert, oder wenn man den Kompensationsstrom ändert. Dies hat sich als zutreffend erwiesen.

Der theoretisch zu erwartende Effekt mußte ferner von der Stärke des erregenden Stromes in ähnlicher Weise abhängen wie die Magnetisierung. Auch diese Konsequenz wurde nachgeprüft und bestätigt gefunden.

Wir wollen nun den experimentell gefundenen Effekt der Größe nach mit dem theoretisch zu ermittelnden vergleichen.

*

Setzen wir die Sättigungsmagnetisierung des Eisens gleich 1200, so ergibt sich, da das Volumen des Stäbchens S gleich 0,16 ist,

$$J_s = 192.$$

Durch unmittelbare Beobachtung der Dämpfung der Torsionsschwingungen bei angelegtem Wechselfelde ergab sich:

$$k = 0,533.$$

Da ferner

$$Q = 0,0069,$$

so ergibt sich aus Gleichung 15):

$$|\alpha| = 0,0036.$$

Bei einer Skalendistanz 45 cm ergibt sich also als doppelter Ausschlag:

$$4|\alpha|.45 = 0,65,$$

während wir durch das Experiment 0,45 cm gefunden haben.

Dazu ist zunächst zu bemerken, daß der theoretisch berechnete Wert eine obere Grenze darstellt, hauptsächlich weil die Magnetisierungswechsel nicht — wie in der Rechnung vorausgesetzt — momentan erfolgen; hauptsächlich die entmagnetisierende Wirkung der Pole bringt es mit sich, daß das Stäbchen erst bei verhältnismäßig hohen Magnetfeldern annähernd gesättigt ist. Eine schärfere quantitative Bestätigung der Theorie wird im nächsten Paragraphen gegeben werden.

Aus der vorhin erwähnten Tatsache, daß der beobachtete doppelte Ausschlag bei verschwindendem, konstantem Horizontalmagnetfelde ein Minimum ist, geht hervor, daß die Phase des nach Kompensierung des Erdfeldes übrig bleibenden, auf das Stäbchen wirkenden Drehmomentes senkrecht steht auf der Phase der Magnetisierung J . Dies entspricht der Gleichung 5). Es mußte aber noch das Vorzeichen des Effektes untersucht werden; das geschah auf folgende Weise.

Das Licht des Lichtzeigers wurde durch einen ungespannten Faden einer Metallfaden-Glühlampe erzeugt, die parallel zu dem wirksamen Spulenpaar an die Wechselstromquelle angeschlossen war. Näherte man der Glühlampe einen permanenten Magneten, so geriet er unter der elektrodynamischen Wirkung in Schwingungen, die Schwingungen des Lichtzeigers auf der Skala hervorriefen, die sich über diejenigen Schwingungen des Zeigers superponierten, welche durch die Torsionsschwingungen des Stäbchens

erzeugt wurden. Die Zeichenbestimmung ergab sich aus folgenden beiden Beobachtungen.

1. Wurden Zeigerglühlampe und Spulen vom Gleichstrom durchflossen, ohne daß an der Schaltung etwas geändert wurde, so bewirkte Annäherung eines Südpoles von vorne an die Glühlampe einen positiven Ausschlag des Lichtzeigers auf der Skala. Gleichzeitig entstand in den Spulen ein positives, d. h. nach unten gerichtetes Magnetfeld.

2. Wurden Spulen und Lampe mit Wechselstrom gespeist, so bewirkte Annäherung eines Südpoles an die Lampe von vorne

Fig. 5.

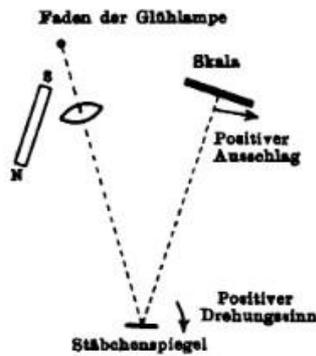
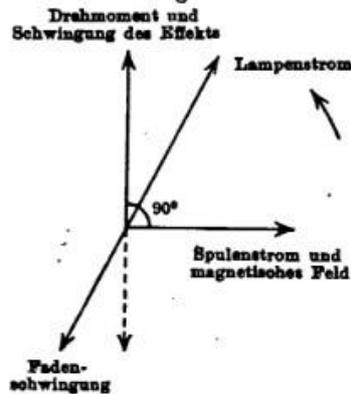


Fig. 6.



eine Verminderung des doppelten Ausschlages, welche fast bis zum Verschwinden des letzteren gebracht werden konnte.

Die Zeichenbestimmung geschieht hieraus am einfachsten an Hand des nachstehenden Phasendiagrammes. Der Lampenstrom eilt dem Spulenstrom wegen der bedeutenden Selbstinduktion der Spulen fast 90° in der Phase voran; dabei wird der Lampenstrom positiv gerechnet, wenn sein Sinn derart ist, daß er (bei Annäherung eines Südpoles von vorne) den Lampenfaden im Sinne eines positiven Skalenausschlages zu verschieben sucht, der Spulenstrom, wenn er ein nach unten gerichtetes Feld erzeugt. Da der Lampenfaden lose in der Lampe sitzt, also (bei geringer Reibung) eine bedeutend kleinere Eigenfrequenz besitzt als der Wechselstrom, so ist die Phase der Fadenschwingung derjenigen des Fadenstromes entgegengesetzt. Da die Phase der Fadenschwingung nach dem Experiment um mehr als 90° von der Phase der Torsionsschwingung des Effektes, d. h. auch von der Phase des

Drehmomentes des Effektes, abweicht, so folgt, daß die Phase des letzteren durch den fett ausgezogenen, nicht durch den punktiert angedeuteten, entgegengesetzt gerichteten Pfeil des Diagrammes gegeben ist.

Damit ist bewiesen, daß das Drehmoment des Effektes der Größe $\frac{dJ}{dt}$, nicht aber der Größe $-\frac{dJ}{dt}$ proportional ist, d. h., daß der Effekt durch elektronegative, nicht durch elektropositive umlaufende Teilchen hervorgebracht wird.

§ 6. Genauere quantitative Versuche. Die bisher beschriebenen Versuche lieferten eine vollkommen befriedigende qualitative Bestätigung der Theorie. Es war aber dringend erwünscht, die Experimente nach der quantitativen Seite zu verbessern. Das Spulenfeld war zu schwach, um bei der verhältnismäßig geringen Länge des Stäbchens ein fast plötzliches Ummagnetisieren des Stäbchens zu erzielen, wie wir es in der Theorie vorausgesetzt hatten. Ferner war die Dämpfungskonstante α nur recht ungenau bestimmbar. Endlich war zu bezweifeln, ob in Gleichung 8) den dämpfungserzeugenden Ursachen wirklich durch das (lineare) Glied $P\alpha$ richtig Rechnung getragen war.

Um zunächst ein rasches Ummagnetisieren zu erzielen, bedienten wir uns statt der beiden Spulen A_1, A_2 einer einzigen von 62 cm Länge (etwa 100 Windungen pro Centimeter Länge), welche uns bei den Versuchen (Stromstärke 1,45 Amp.) in der Mitte ein Feld von der Amplitude 260 Gauß (am Ende also ein solches von der Amplitude 130 Gauß) erzeugte. Ferner benutzten wir, um die entmagnetisierende Wirkung der Pole herabzusetzen, ein Eisenstäbchen von 16 cm Länge und 0,17 cm Durchmesser. Um von einer Messung der Dämpfungskonstanten und von Annahmen über das Dämpfungsgesetz unabhängig zu werden, bestimmten wir die Resonanzkurve, d. h. die Abhängigkeit der Amplitude $|\alpha|$ von der Frequenz des Wechselstromes bei festgehaltener Fadenlänge. Der Spiegel hing an einem dünnwandigen Glasröhrchen, das unten am Stäbchen angekittet war und aus der Spule etwas herausragte.

Die Abhängigkeit des maximalen Ausschlags $|\alpha|$ von der angewandten Frequenz ν erhält man aus den Gleichungen 13) und 8a):

$$|\alpha| = \frac{4\lambda}{\pi} \frac{J_1}{\sqrt{(4\pi Q\nu)^2 + P^2}}. \quad 16)$$

Hierbei ist: λ eine Konstante, welche nach der Theorie gleich $\frac{2\mu}{\epsilon} = 1,13 \cdot 10^{-7}$ sein soll, J_s das magnetische Moment des gesättigt magnetisierten Stäbchens, Q das für die Torsionsschwingungen des Stäbchens maßgebende Trägheitsmoment, P die in Differentialgleichung 8) auftretende Dämpfungskonstante, ν die Differenz der angewandten Frequenz n und der Resonanzfrequenz n_0 . Bei der Ableitung der Formel 16) und 8 a) sind ν/n_0 und P als kleine Größen behandelt, deren zweite Potenzen neben der ersten vernachlässigt werden dürfen; dies ist bei der großen Schärfe unserer Resonanz wohl berechtigt.

Wurde $|\alpha|$ in Funktion von ν durch den Versuch bestimmt, so konnte hieraus λ nach Elimination der uns nicht interessierenden Größe P ermittelt werden. Diese Elimination geschieht am einfachsten mittels der für die Resonanzamplitude gültigen Gleichung:

$$|\alpha|_{\max} = \frac{4\lambda}{\pi} \frac{J_s}{\sqrt{P^2}} \quad 16 a)$$

Löst man nach Eliminieren von P nach λ auf, so erhält man:

$$\lambda = \pi^2 \frac{Q}{J_s} |\alpha|_{\max} \nu \sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}}, \quad 17)$$

wobei

$$b = \frac{|\alpha|}{|\alpha|_{\max}}$$

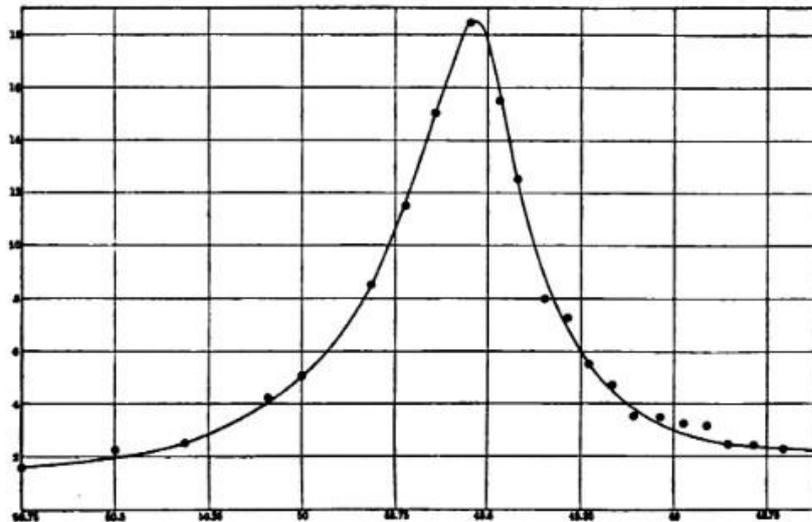
gesetzt ist. Ist die Resonanzkurve aufgenommen, so liefert Gl. 17) zu jeder Ordinate $|\alpha|$ einen Wert von λ . Erweist sich dieser Wert bzw. die Größe $\nu \sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}}$ als konstant, so ist damit erwiesen, daß in Gleichung 8 a) die Dämpfung mit Recht durch ein lineares Glied berücksichtigt wurde.

Das Variieren und Messen der Frequenz $n = n_0 + \nu$ geschah wie folgt. Der benutzte Wechselstrom wurde von einem im Keller des Gebäudes untergebrachten Wechselstromgenerator geliefert, der von einem durch eine Akkumulatorenbatterie gespeisten Gleichstrommotor getrieben wurde. Parallel zur Erregerwicklung dieses Motors schalteten wir einen im Versuchszimmer angeordneten Regulierwiderstand; durch Variieren desselben konnten wir den Erregerstrom des Motors und damit dessen Tourenzahl sowie die Frequenz des erzeugten Wechselstromes nach Belieben

innerhalb gewisser Grenzen ändern. Der durch den Regulierwiderstand fließende Strom wurde durch ein Amperemeter kontrolliert, dessen Angabe bei im übrigen konstanten Verhältnissen Funktion der Frequenz des erzeugten Wechselstromes war. Außerdem benutzten wir einen Resonanz-Frequenzmesser, der gewisse Frequenzwerte (45, 45,5, 46 usw. bis 55) exakt zu konstatieren gestattete. Die zwischenliegenden Frequenzwerte werden mit Hilfe des genannten Amperemeters interpoliert.

Die Amplitude der Torsionsschwingungen des Stäbchens wurde wieder objektiv gemessen mit Hilfe eines Lichtzeigers, dem nun

Fig. 7.



aber zur Erzielung größerer Genauigkeit die Länge von 145 cm gegeben wurde. Die Fig. 7 zeigt die am sorgfältigsten aufgenommene Resonanzkurve, und zwar ist die Länge des durch die Oszillationen erzeugten Lichtbandes in Skalenmillimetern in Funktion der erzeugten Frequenz angegeben.

Zur Prüfung der Formel 17) diene nebenstehende der Kurve entnommene Tabelle.

Aus der letzten Spalte dieser Tabelle ist ersichtlich, daß die Kurve bis zu einem Ausschlag von 7 mm herunter der Theorie genügend entspricht, indem sich $v \sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}}$ genügend konstant erweist. Hiermit ist die Einführung des linearen Dämpfungs-

Ordinate	28ν	b	$\sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}}$	$28 \nu \sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}}$
15	2,55	0,812	1,32	3,36
12	4,25	0,649	0,853	3,63
9	6,2	0,488	0,560	3,46
7	8,2	0,380	0,413	3,38
5	11,3	0,271	0,280	3,18
4	13,7	0,217	0,222	3,04
3	17,3	0,163	0,165	2,68

gliedes gerechtfertigt. Geht man zu noch kleineren Ordinaten über, so scheint die Größe rapid abzunehmen. Es ist indessen zu bemerken, daß so kleine Ausschläge nicht mehr mit hinreichender Sicherheit abgelesen werden können. Bei dieser Sachlage scheint es gerechtfertigt, wenn wir zur Rechnung nur die vier ersten angegebenen Ordinatenwerte heranziehen. Aus ihnen erhalten wir als Mittelwert:

$$\nu \sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}} = 0,128.$$

Ferner ergibt die Kurve:

$$|\alpha|_m = \frac{18,5}{1450 \cdot 4} = 0,320 \cdot 10^{-2}.$$

Das Trägheitsmoment unseres schwingenden Systems wurde aus dem Einfluß bestimmt, welchen das Anbringen eines kleinen, genau bekannten zusätzlichen Trägheitsmomentes auf die Eigenfrequenz ausübte. Die Eigenfrequenz mit Zusatz-Trägheitsmoment wurde wieder durch Aufnahmen der Resonanzkurve bestimmt. Es ergab sich ¹⁾

$$Q = 0,0126.$$

Endlich ergab sich für das Volumintegral der Magnetisierung des gesättigten Stäbchens unter Zugrundelegung des Wertes 1260 für die Sättigungs-Magnetisierungsdichte der Wert

$$J_s = 458.$$

Unter Zugrundelegung dieser Daten erhält man aus Gl. 17):

$$\lambda = 1,11 \cdot 10^{-7},$$

¹⁾ Es sei bemerkt, daß das Stäbchen ohne Glasröhrchen und Spiegel, genau zylindrische Form vorausgesetzt, nach der Rechnung das Trägheitsmoment $Q = 0,0102$ hatte.

in naher Übereinstimmung mit dem theoretischen Werte $1,13 \cdot 10^{-7}$. Mag auch die Güte der Übereinstimmung auf Zufall beruhen, da wir unserer Bestimmung wohl etwa 10 Proz. Unsicherheit beilegen müssen; jedenfalls ist erwiesen, daß das am Anfang geschilderte Ergebnis der Theorie der kreisenden Elektronen auch quantitativ mindestens annähernd durch den Versuch bestätigt wird.

Die beschriebenen Versuche wurden in der Reichsanstalt ausgeführt. Wir danken besonders den Herren WARBURG und GUMLICH, aber auch den übrigen Kollegen von der Reichsanstalt für ihr stets gefälliges Entgegenkommen.
