Vereinfachungsformen für die ebene Biegung gerader Stäbe sowie die exakte Lösung

exakte Dgl. der elastischen Linie $$\frac{M_{bz}(x)}{E \cdot I_z} = \frac{v''(x)}{\left(1+v'(x)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Vereinfachung 1 - Differentialgleichung 2. Ordnung

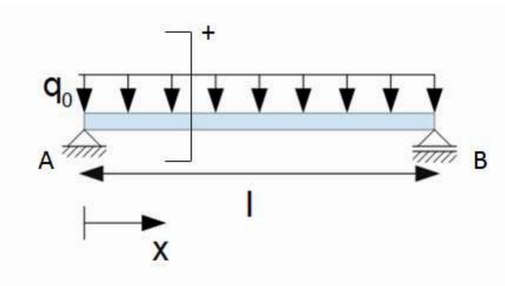
Vereinfachung 1 $$\left(1+v'^2\ (x)\right)^{\frac{3}{2}} = 1$$

exakt erfüllt nur für: $v' = 0$

Lösung für Vereinfachung 1

Dgl. 2. Ordnung $$\frac{M_{bz}(x)}{E \cdot I_z} = \frac{v''(x)}{1} \qquad v''(x) \cdot E \cdot I_z = M_{bz}(x)$$

Beispielaufgabe



1. Lagerreaktionen:

e_x $\quad A_x = 0$

e_y $\quad A_y + B_y - q_0 \cdot l = 0$

e_z $\quad q_0 \cdot l \cdot \frac{l}{2} - B_y \cdot l = 0$

$$B_y = \frac{q_0 \cdot l}{2} \qquad A_y = \frac{q_0 \cdot l}{2}$$

2. Schnittmoment

$$M_{bz}(x)+A_y\cdot x-q_0\cdot x\cdot\frac{x}{2}=0$$

$$M_{bz}(x)=\frac{q_0\cdot x^2-2\cdot A_y\cdot x}{2}$$

$$M_{bz}(x)=\frac{q_0\cdot x^2}{2}-\frac{q_0\cdot l\cdot x}{2}$$

Dgl. Biegelinie

$$v''(x)\cdot E\cdot I_z=M_{bz}(x)=\frac{q_0\cdot x^2}{2}-\frac{q_0\cdot l\cdot x}{2}$$

Lösung durch Integration:

$$v'(x)\cdot E\cdot I_z=\int\frac{q_0\cdot x^2}{2}-\frac{q_0\cdot l\cdot x}{2}\,\mathrm{d}x$$

$$v'(x)\cdot E\cdot I_z=\frac{q_0\cdot x^3}{6}-\frac{q_0\cdot l\cdot x^2}{4}+C_1$$

$$v(x)\cdot E\cdot I_z=\int\frac{q_0\cdot x^3}{6}-\frac{q_0\cdot l\cdot x^2}{4}+C_1\,\mathrm{d}x$$

Biegelinie

$$v(x)\cdot E\cdot I_z=\frac{q_0\cdot x^4}{24}+\left(C_1\cdot x-\frac{q_0\cdot l\cdot x^3}{12}\right)+C_2$$

Integrationskonstanten über Randbedingungen

$$v(x)=0 \qquad C_2=0$$

$$v'\left(\frac{l}{2}\right)=0 \qquad C_1=\frac{q_0\cdot l^3}{24}$$

Biegelinie

$$v(x)\cdot E\cdot I_z=\frac{q_0\cdot x^4}{24}+\left(\frac{q_0\cdot l^3}{24}\cdot x-\frac{q_0\cdot l\cdot x^3}{12}\right)$$

$$v(x)\cdot E\cdot I_z=\frac{q_0\cdot x^4}{24}-\frac{q_0\cdot l\cdot x^3}{12}+\frac{q_0\cdot l^3\cdot x}{24}$$

Biegelinie

$$v(x)\cdot E\cdot I_z=\frac{q_0}{24\cdot E\cdot I_z}\cdot\left(x^4-2\cdot l\cdot x^3+l^3\cdot x\right)$$

Vereinfachung 2 - Differentialgleichung 4. Ordnung

Kräftegleichgewicht am verformten Stab

e_x $$-N(x)+N(x+dx)+q_x dx=0$$

$$-N(x)+N(x)+N'\ dx+q_x dx=0$$

$$N'(x)=-q_x(x)$$

e_y $$Q'(x)=-q_y(x)$$

e_z $$-M(x)+M(x)+M'\ dx+Q(x)\ dx+\left(Q'+\frac{q_y}{2}\right)(dx)^2=0$$

Vereinfachung 2 Vernachlässigung Glieder 2. Ordnung

$$\left(Q'+\frac{q_y}{2}\right)(dx)^2$$

e_z $$M'(x)=-Q(x)$$

Einsetzen der Gleichgewichte $$M''(x)=-Q'(x)=q_y(x)$$

$$v''''(x)=\frac{M_{bz}''(x)}{E\cdot I_z}=\frac{q_y(x)}{E\cdot I_z}$$

Bei Vereinfachung 1 und Vereinfachung 2 stimmen die Lösungen beider Differentialgleichungen überein !

exakte Lösung - Elliptische Differentialgleichung

exakte Dgl. der elastischen Linie $$\frac{v''(x)}{\left(1+v'(x)^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{M_{bz}(x)}{E\cdot I_z}$$

Integration $$\int \frac{v''(x)}{\left(1+v'(x)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x=\int \frac{M_{bz}(x)}{E\cdot I_z}\mathrm{d}x$$

$$\frac{v'(x)}{\left(1+v'(x)^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{M_{bz}(x)}{E \cdot I_z}\,\mathrm{d}x + C_3$$

Substitution

$$\frac{v'(x)}{\left(1+v'(x)^2\right)^{\frac{1}{2}}} = F(x)$$

$$v'(x) = \frac{F(x)}{\left(1-F^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$v'(x) = \frac{\displaystyle\int \frac{M_{bz}(x)}{E \cdot I_z}\,\mathrm{d}x + C_3}{\left(1-\left(\displaystyle\int \frac{M_{bz}(x)}{E \cdot I_z}\,\mathrm{d}x + C_3\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

exakte Biegelinie

$$v(x) = \int \frac{\displaystyle\int \frac{M_{bz}(x)}{E \cdot I_z}\,\mathrm{d}x + C_3}{\left(1-\left(\displaystyle\int \frac{M_{bz}(x)}{E \cdot I_z}\,\mathrm{d}x + C_3\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}x + C_4$$