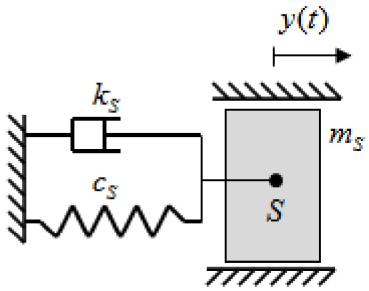
Modellbildung mechatronischer Systeme (MMS)

Grundlagen

Normierung von linearen Differentialgleichungen

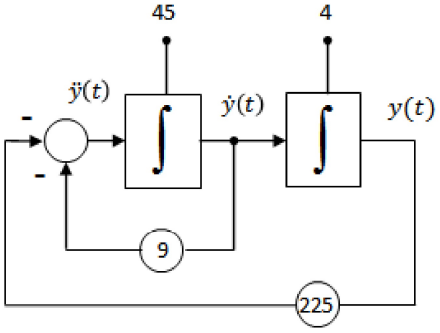
Eingangsparameter / physikalische Größen

Masse	$m_S := 10\ \boldsymbol{kg}$
Federsteifigkeit	$c_S := 2250 \cdot \frac{\boldsymbol{N}}{\boldsymbol{m}}$
viskose Dämpfung	$k_S := 90 \cdot \frac{\boldsymbol{N \cdot s}}{\boldsymbol{m}}$
Anfangsbedingungen	$y'(t=0) = 45\ \frac{m}{s}$
	$y(t=0) = 4\ m$



Simulationsmodell

Dgl.	$m_S \cdot y'' + k_S \cdot y' + c_S \cdot y = 0$
Normalform	$y'' + \frac{k_S}{m_S} \cdot y' + \frac{c_S}{m_S} \cdot y = 0$
allgemeine Normalform	$y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0$
konstante Koeffizienten	$a_1 := \frac{k_S}{m_S} = 9\ \frac{1}{\boldsymbol{s}}$ $\quad a_0 := \frac{c_S}{m_S} = 225\ \frac{1}{\boldsymbol{s}^2}$
Simulationsform, separiert nach höchster Ableitung	$y'' = -a_1 \cdot y' - a_0 \cdot y$
	$y'' = -9\ \frac{1}{\boldsymbol{s}} \cdot y' - 225\ \frac{1}{\boldsymbol{s}^2} \cdot y$
Blockschaltbild für Simulation	



Nur nichtkommerzielle Verwendung

Problemstellung

Bei einigen Anwendungen ist der Wertebereich der in der Dgl. auftretenden Variablen sowie ihrer Koeffizienten begrenzt. Vor der Verbreitung der digitalen Rechentechnik wurden diese und ähnlich gelagerte Probleme mit Analogrechnern gelöst, welche nur innerhalb eines bestimmten Spannungsbereiches arbeiteten. Auch heute kann eine Reduzierung des Wertebereiches sinnvoll sein, um z.B. mit einer 8-Bit Arithmetik zu arbeiten.

Zur optimalen Ausnutzung der Wertebereiche müssen alle zeitabhängigen Variablen, bis auf die Variable mit der höchsten Ableitung, transformiert werden. Die höchste Ableitung tritt nur direkt am Integrator auf und kann deshalb beliebige Werte annehmen.

Zweckmäßiger Weise geht man in zwei Schritten vor:

1. **Amplitudentransformation**

   Die Amplitudentransformation wird für alle zeitabhängigen Variablen benutzt ,um sicherzustellen, dass ihr Wertebereich nicht überschritten wird.

2. **Zeittransformation**

   Die Zeittransformation wird für alle Koeffizienten angewendet, um ihren Wertebereich nicht zu überschreiten.

Die so transformierten Gleichungen werden auch ***Maschinengleichungen*** genannt.

Transformationen

Amplitudentransformation

Wertebereich aller zeitabhängigen Variablen y(t) $W_y = [-1 \,..\, 1]$

Transformationsbeziehung $Y = \beta_0 \cdot y$ $Y' = \beta_1 \cdot y'$ $Y'' = \beta_2 \cdot y''$

mit $\beta_0 \le \frac{|Y_{max}|}{|y_{max}|}$ $\beta_1 \le \frac{|Y'_{max}|}{|y'_{max}|}$ $\beta_2 = \beta_1$

Integration $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} y = \int_0^t \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m} y \,\mathrm{d}t + \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} y_0$ $m = n+1$

zeitabhängige Variablen $y = \int_0^t y' \,\mathrm{d}t + y_0$ $y' = \int_0^t y'' \,\mathrm{d}t + y_0'$

Nur nichtkommerzielle Verwendung

Transformation in Y(t)

$$\frac{Y}{\beta_0} = \int_0^t \frac{Y'}{\beta_1}\,dt + y_0 \qquad Y = \beta_0 \cdot \left(\frac{1}{\beta_1} \cdot \int_0^t Y'\,dt + y_0\right)$$

$$\frac{Y'}{\beta_1} = \int_0^t \frac{Y''}{\beta_2}\,dt + y_0' \qquad Y' = \beta_1 \cdot \left(\frac{1}{\beta_2} \cdot \int_0^t Y''\,dt + y_0'\right)$$

Transformationen am Ausgangsbeispiel

$y'' + 9 \cdot y' + 225 \cdot y = 0$ $\quad y_0 = 4 \quad y_0' = 45$

Maximalwerte bestimmen $\quad y_{max} = 5 \quad y_{max}' = 75$

Transformation $\quad Y = \beta_0 \cdot y \quad Y' = \beta_1 \cdot y' \quad Y'' = \beta_2 \cdot y''$

$$\beta_0 = \frac{1}{5} \qquad \beta_1 = \frac{1}{75} \qquad \beta_2 = \beta_1 = \frac{1}{75}$$

transformierte Gleichung $\quad 75 \cdot Y'' + 9 \cdot 75\ Y' + 225 \cdot 5\ Y = 0$

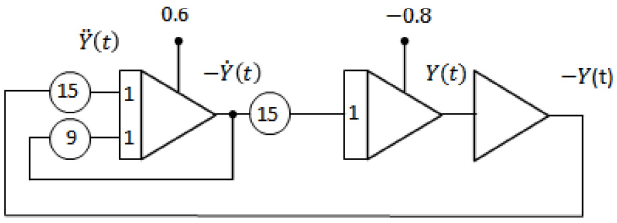
Normalform $\quad Y'' + 9 \cdot Y' + 15\ Y = 0$

$$Y = \frac{1}{5} \cdot \left(75 \cdot \int_0^t Y'\,dt + 4\right) = 15 \cdot \int_0^t Y'\,dt + \frac{4}{5}$$

$\beta_2 = \beta_1 = \frac{1}{75}$

$$Y' = \frac{1}{75} \cdot \left(75 \cdot \int_0^t Y''\,dt + y_0'\right) = \int_0^t Y''\,dt + \frac{45}{75}$$

Blockschaltbild



Transformationen

Zeittransformation

Wertebereich aller Koeffizienten $\quad W_K = [-1\,..\,1]$

Nur nichtkommerzielle Verwendung

Zeittransformation mit der Maschinenzeit τ

$$\tau = m_\tau \cdot t \qquad t = \frac{\tau}{m_\tau} \qquad t^2 = \frac{1}{m_\tau^{\,2}}\,\tau^2$$

Transformationen am Ausgangsbeispiel

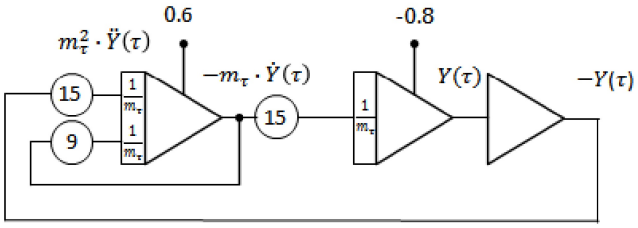
Normalform

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}Y + 9 \cdot \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Y\right) + 15\ Y = 0$$

in Maschinenzeit

$$m_\tau^{\,2} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}Y\right) + 9 \cdot m_\tau \cdot \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}Y\right) + 15\ Y = 0$$

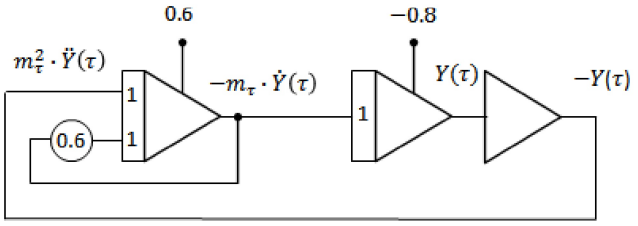
Blockschaltbild



Wahl von m_T

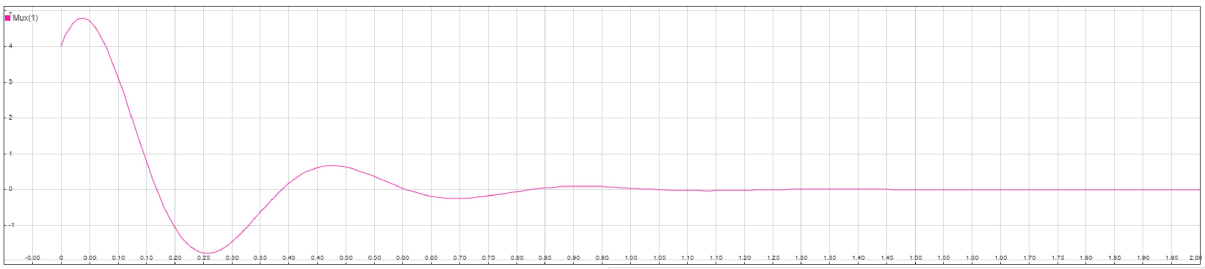
$$m_T = \frac{1}{15}$$

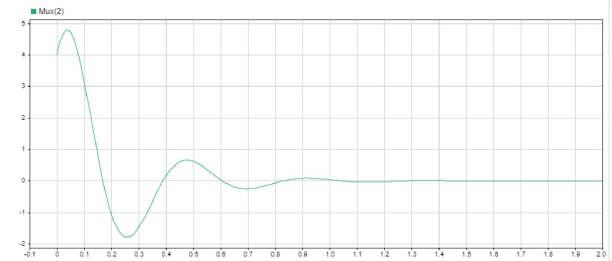
Blockschaltbild

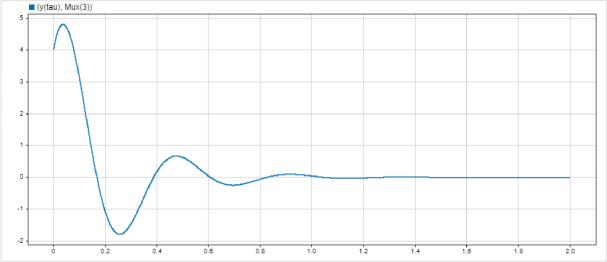


Ergebnisse (entnormiert)

$y(t)$







$Y(t)$ $Y(\tau)$

Nur nichtkommerzielle Verwendung