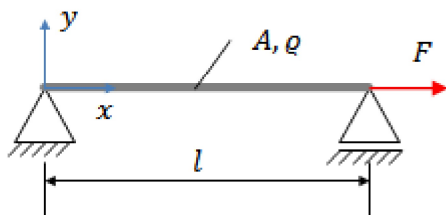


Saitenschwingungen

eindimensionale Wellengleichung

Eingangsparameter / physikalische Größen

Länge der Saite	l	$l := 64 \cdot \text{cm}$	
Querschnittsfläche der Saite	A	$d_E := 1.1684 \text{ mm}$	$A_E := \frac{\pi}{4} \cdot d_E^2$
Dichte des Saitenmaterials	ρ	$\rho_{St} := 7850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	
Zugkraft	F	$F := 93.653 \text{ N}$	
Verformung	$v(x, t)$		



Wellengleichung und Lösung

Wellengleichung
$$\frac{d^2}{dt^2} v(x, t) - c^2 \frac{d^2}{dx^2} v(x, t) = 0$$

Lösungsansatz
$$v(x, t) = X(x) \cdot T(t)$$

(1)
$$\frac{d^2}{dt^2} T(t) + \omega^2 T(t) = 0$$

(2)
$$\frac{d^2}{dx^2} X(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

Abkürzungen
$$\lambda = \frac{\omega}{c} \quad c = \sqrt{\frac{F}{\rho A}}$$

allgemeine Lösung für x (Gl. 2)
$$X(x) = C_1 \cdot \sin(\lambda x) + C_2 \cdot \cos(\lambda x)$$

spezielle Lösung über
Randbedingungen

$$v(x=0)=0 \quad X(x=0)=0$$

$$v(x=l)=0 \quad X(x=l)=0$$

RB in Lösung

$$0=0 \cdot C_1 + 1 \cdot C_2$$

$$0=C_1 \cdot \sin(\lambda l) + C_2 \cdot \cos(\lambda l)$$

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \sin(\lambda l) & \cos(\lambda l) \end{bmatrix} = 0$$

$$\sin(\lambda l)=0 \quad \lambda_i = i \cdot \frac{\pi}{l}$$

Eigenkreisfrequenzen

$$\omega_i = \lambda_i l = i \cdot \frac{\pi}{l} \cdot \sqrt{\frac{F}{\rho A}}$$

Schwingungsformen

$$C_1 \quad \text{frei wählen} \quad C_1 = 1$$

$$\sin(\lambda l) + C_2 \cdot \cos(\lambda l) = 0$$

$$C_2 = \frac{-\sin(\lambda l)}{\cos(\lambda l)} = -\tan(\lambda l)$$

Lösung in X(x)

$$X(x) = \sin(\lambda x) - \tan(\lambda l) \cdot \cos(\lambda x)$$

Grundwelle

$$i=1 \quad \lambda_1 = \frac{\pi}{l}$$

$$X_1(x) = \sin\left(\frac{\pi}{l} \cdot x\right) - \tan\left(\frac{\pi}{l} \cdot l\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{l} \cdot x\right)$$

1. Oberwelle

$$i=2 \quad \lambda_1 = \frac{2 \pi}{l}$$

$$X_2(x) = \sin\left(\frac{2 \pi}{l} \cdot x\right) - \tan\left(\frac{2 \pi}{l} \cdot l\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \pi}{l} \cdot x\right)$$

Grundwelle

$$\omega_0 := \frac{\pi}{l} \cdot \sqrt{\frac{F}{\rho_{St} \cdot A_E}} = 517.797 \frac{1}{s}$$

Frequenz von E2

$$f_0 := \frac{\omega_0}{2 \cdot \pi} = 82.41 \text{ Hz}$$

$$x := 0 \text{ mm}, 1 \text{ mm} \dots l$$

Grundwelle

$$X_1(x) := \sin\left(\frac{\pi}{l} \cdot x\right) - \tan\left(\frac{\pi}{l} \cdot l\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{l} \cdot x\right)$$

1. Oberwelle

$$X_2(x) := \sin\left(\frac{2\pi}{l} \cdot x\right) - \tan\left(\frac{2\pi}{l} \cdot l\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{l} \cdot x\right)$$

2. Oberwelle

$$X_3(x) := \sin\left(\frac{3\pi}{l} \cdot x\right) - \tan\left(\frac{3\pi}{l} \cdot l\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{l} \cdot x\right)$$

