

# Umsetzung und Implementierung einer FFT für 8-Bit Mikrocontroller der Firma Atmel

## 1. Theoretischer Ansatz

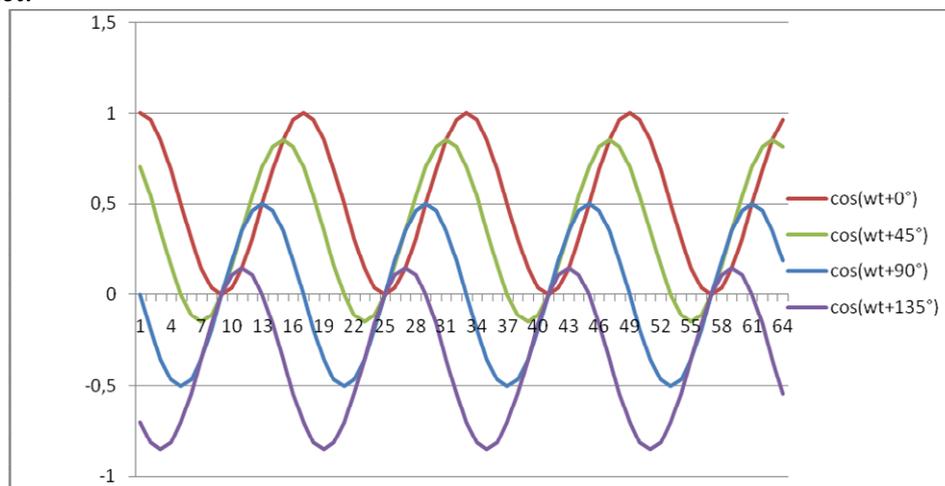
### 1.1 Einführung Fourier-Transformation

Bevor man sich mit der diskreten Fourier-Transformation beschäftigt, sollte man sich zunächst mit der kontinuierlichen Fourier-Transformation beschäftigen. Fourier hat mit seiner Fourier-Reihe schon bewiesen, dass man ein beliebiges Signal aus einer (un)endlichen Summe von Sinus- und Kosinusschwingungen konstruieren kann. Bei der Fourier-Transformation wird genau der entgegengesetzte Weg gegangen. Hier ist ein zeitkontinuierliches Signal vorhanden und es müssen die Sinus- und Kosinusglieder gefunden werden. Dabei kommt er vom Ansatz her nicht um eine Beschreibung mit komplexen Zahlen herum, da die meisten Spektren auch negative Frequenzen enthalten. Die allgemeine Bildungsvorschrift lautet:

$$F(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

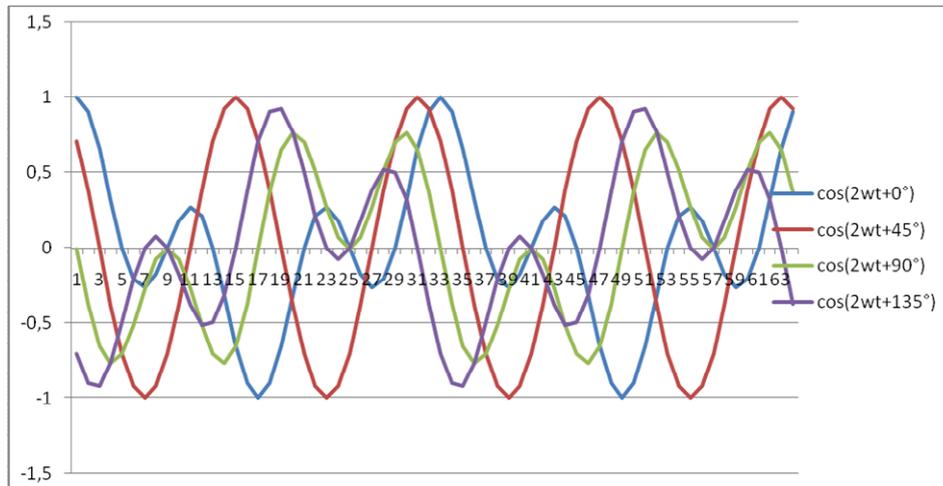
Was sagt diese Transformationsvorschrift aus? Die komplexe e-Funktion kann auch als  $\cos(\omega t) - j\sin(\omega t)$  beschrieben werden. Somit wird nun die eigentliche Zeitfunktion  $f(t)$  mit einem Sinus und einem Kosinus gewichtet. Man versucht sozusagen herauszufinden, wie groß die Abhängigkeit des Zeitsignals von einer Sinus-/Kosinusschwingung mit vorgegebener Frequenz ist. Da der maximale Definitionsbereich einer mathematischen Funktion im Intervall  $[-\infty, \infty]$  liegt, muss dieser Bereich komplett in die Betrachtung eingeschlossen sein, wodurch sich die beiden Integralgrenzen ergeben. Zudem kann man das Integral für das Sinus- und Kosinusglied getrennt betrachten (Integralrechenregeln). Warum muss nun überhaupt integriert werden? Dies soll nun nachfolgendes Beispiel verdeutlichen.

Als einfachstes zeitkontinuierliches Signal wird zunächst ein Kosinus verwendet. Dieser wird mit einem Kosinus mit gleicher Frequenz und verschiedenen Phasenverschiebungen gewichtet:



Man kann nun gut erkennen, dass bei der Wichtung des Kosinussignals mit einem Kosinus gleicher Frequenz und einer Phasenverschiebung von  $0^\circ$  sich ein Maximum der Fläche unter dem Graphen ergibt. Im Gegensatz dazu ergibt sich bei einer

Phasenverschiebung der Wichtungsfunktion von genau 90° ein Minimum der Fläche unter dem Graph. Die 90° Phasenverschiebung entspricht genau dem Sinus der gleichen Frequenz. Der mathematische Hintergrund für die Auswahl von Sinus und Kosinus in der komplexen Zahlenebene ist die Bildung eines orthogonalen Funktionensystems, auf welches hier nicht weiter eingegangen werden soll. Wichtig für die weiteren Betrachtungen sind die Umformungen der eulerschen Form. Demnach beschreibt man den Funktionswert durch Betrag und Phase. Daher kommen auch die Bezeichnungen Betrags- und Phasenspektrum. Betrachtet man nun ein Vielfaches der Grundschwingungen (1.Oberschwingung), so ergibt sich als Fläche unter dem Graphen erwartungsgemäß Null.



Möchte man nun das Betragsspektrum errechnen, so muss der Betrag aus Sinus- und Kosinusanteil gebildet werden.

$$F(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \cos(\omega t) dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \sin(\omega t) dt \right]$$

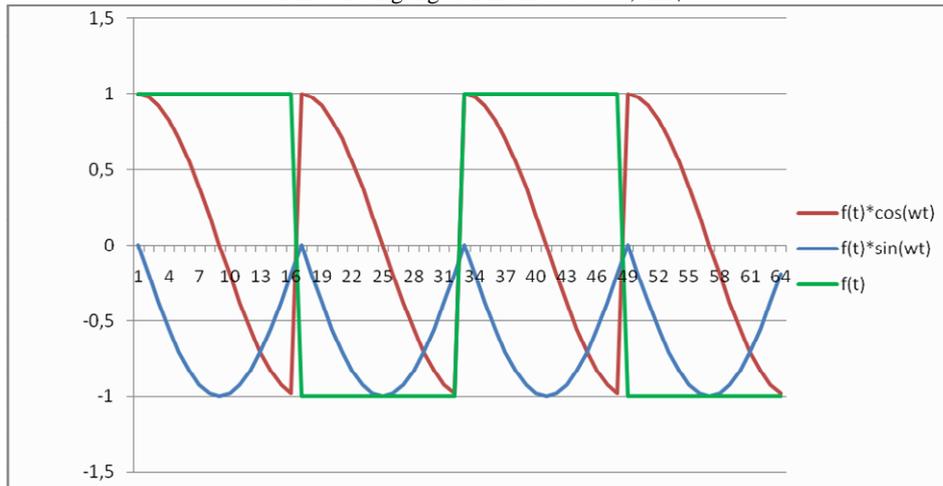
$$F(j\omega) = a - jb \quad \begin{array}{l} \text{à} \quad |F(j\omega)| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \text{à} \quad \text{angle}(F(j\omega)) = \tan^{-1} \frac{b}{a} \end{array}$$

Für das Beispiel des zeitkontinuierlichen Kosinus, ergibt sich nur ein Kosinusanteil a für  $\omega = w$ . Für vielfache der Kreisfrequenz  $\omega = 2w$  und höher ist der Kosinus- und Sinusanteil dagegen Null. Somit ergibt sich also erwartungsgemäß ein Betragsspektrum, welches nur eine Spektrallinie mit  $\omega = w$  besitzt. Eine Phasenverschiebung tritt nicht auf, da der Sinusanteil b Null war und somit die Phase  $\varphi = 0^\circ$ . Was an dieser Stelle noch fehlt ist ein Gleichanteil (DC-Wert), welcher durch Nullsetzen der Frequenz errechnet werden kann. Dadurch entfällt der Sinusanteil und im 1. Integral bleibt nur die Funktion selbst stehen, da der Kosinus zu 1 wird. Daher ergibt sich der Gleichanteil durch die Integration der Eingangsfunktion f(t) selbst.

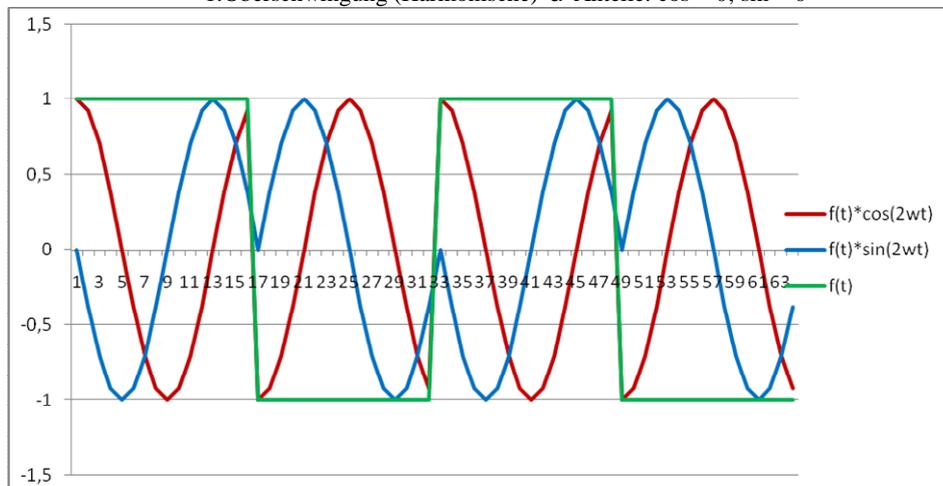
Für ein besseres Verständnis soll nun das Spektrum eines Rechtecksignals 50% Tastgrad durchgeführt werden. Was erwarten wir? Das Ergebnis sollte der Fourier-Reihe entsprechen. Ein Rechtecksignal mit der Amplitude 1, sollte demnach nur aus Sinusgliedern bestehen (Siehe Fourier-Reihe für Rechtecksignal). Das Rechtecksignal (bipolar) kann aus einer unendlichen Summe von Sinusgliedern der folgenden Form gebildet werden:

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left( \sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \dots \right)$$

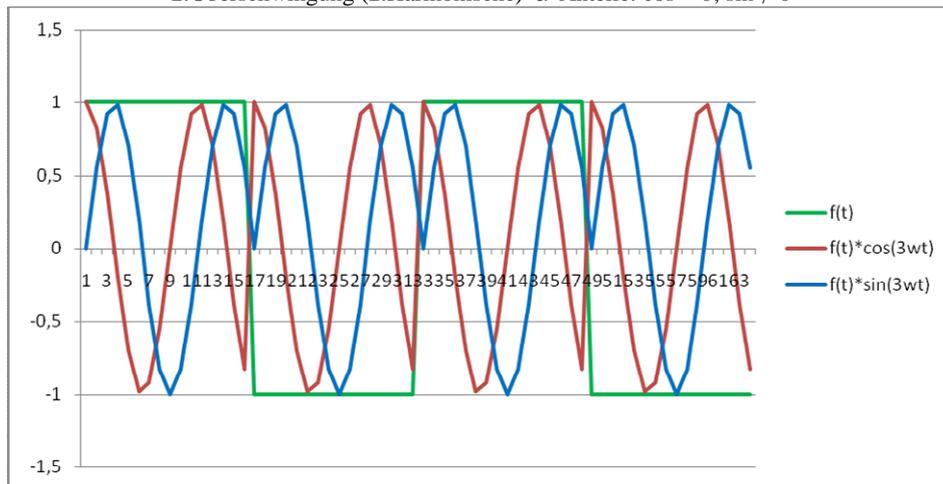
Grundschiwingung à Anteile:  $\cos = 0$ ;  $\sin \neq 0$



1.Oberschiwingung (Harmonische) à Anteile:  $\cos = 0$ ;  $\sin = 0$

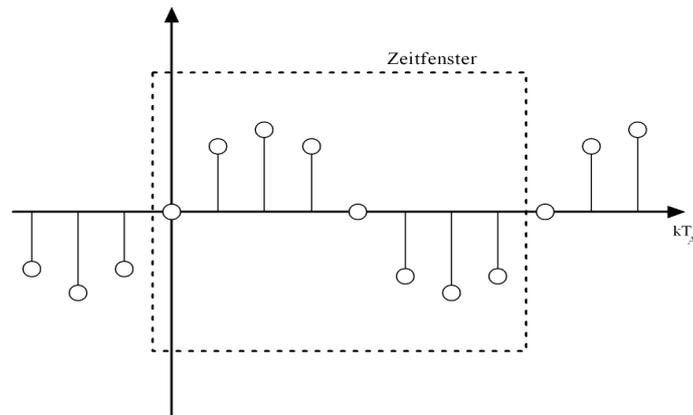


2.Oberschiwingung (2.Harmonische) à Anteile:  $\cos = 0$ ;  $\sin \neq 0$



Nun kann man statt einer kontinuierlichen Funktion nur verschiedene Stützstellen verwenden. Wenn diese Stützstellen immer den gleichen Abstand haben, ergibt sich die diskrete Fourier-Transformation. Hier wird zudem aus dem Integral eine Summe der Stützstellenwerte.

## 1.2 Mathematischer Hintergrund



1.1 Periodisches zeitdiskretes Signal mit Abtastfenster

Das gewählte Zeitfenster mit der Periodendauer  $T_p$  umfasst die Abtastwerte  $k = 0$  bis  $(K-1)T_A$  und ist somit  $kT_A$  lang. Dabei muss das Fenster für die Berechnung mindestens 2 Abtastwerte enthalten. Des Weiteren gelten folgende Zusammenhänge:

$$\begin{aligned} T_p &= K \cdot T_A \\ T_A &= \frac{T_p}{K} = \frac{1}{f_A} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Der Hintergrund hierfür spiegelt sich auch im Abtasttheorem von Shannon wieder. Dieses besagt, dass man mindestens 2 Abtastwerte benötigt um ein Sinussignal rekonstruieren zu können. Dieses Sinussignal hat dann die Frequenz  $f = f_A/2$ . Aufgrund der Abtastung ist allerdings das Spektrum bei  $f_A/2$  periodisch und man benötigt mindestens 4 Abtastwerte um die Grundschwingung zu errechnen.

$$f_A = \frac{K}{T_p} = K \cdot \Delta f \quad (1.2)$$

Das heißt: Werden im Zeitbereich  $K$  Abtastwerte aufgenommen, so ergeben sich, aufgrund der Beziehung (1.2), im Frequenzbereich genau  $K$  Spektralwerte mit dem Abstand der diskreten Frequenz  $\Delta f$ . Die Summenformel der diskreten Fouriertransformation lautet wie folgt:

$$DFT : X(i) = \sum_{n=0}^{K-1} x(n) \cdot e^{-j2\pi n \cdot \frac{i}{K}} \quad (1.3)$$

$$IDFT : x(n) = \frac{1}{K} \sum_{i=0}^{K-1} X(i) \cdot e^{j2\pi n \cdot \frac{i}{K}} \quad (1.4)$$

Die Berechnung der DFT mit 8 Abtastwerten soll anhand der nachstehenden Tabelle gezeigt werden. Der Indize  $i$  entspricht der Nummerierung der diskreten Frequenz und der Indize  $n$  der Nummerierung der Abtastwerte. Laut Summenformel werden alle Spalten einer Zeile aufsummiert um die Komplexe Frequenz  $X(ji\Delta f)$  zu erhalten. Als Abtastfolge wird ein Sinussignal mit  $f = f_A/8$  angenommen.

$$\{x(nT_A)\} = \left\{ 0; \frac{1}{\sqrt{2}}; 1; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0; -\frac{1}{\sqrt{2}}; -1; -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$$

<b>i \ n</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>X(jiΔf)</b>
<b>0</b>	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
<b>1</b>	0	$\frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	$e^{-j\frac{\pi}{2}}$	$\frac{e^{-j\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	$e^{-j\frac{\pi}{2}}$	$\frac{e^{-j\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	-4j
<b>2</b>	0	$\frac{e^{-j\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}}$	-1	$-\frac{e^{-j\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{e^{-j\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}}$	1	$\frac{e^{-j\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}}$	0
<b>3</b>	0	$\frac{e^{-j\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	$-e^{-j\frac{\pi}{2}}$	$\frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{e^{-j\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	$-e^{-j\frac{\pi}{2}}$	$\frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	0
<b>4</b>	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
<b>5</b>	0	$-\frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	$e^{-j\frac{\pi}{2}}$	$-\frac{e^{-j\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	$e^{-j\frac{\pi}{2}}$	$-\frac{e^{-j\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	0
<b>6</b>	0	$-\frac{e^{-j\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}}$	-1	$\frac{e^{-j\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{e^{-j\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}}$	1	$-\frac{e^{-j\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}}$	0
<b>7</b>	0	$-\frac{e^{-j\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	$-e^{-j\frac{\pi}{2}}$	$-\frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{e^{-j\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	$-e^{-j\frac{\pi}{2}}$	$-\frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	4j

**Tabelle 1.1.1 DFT – Berechnung einer Eingangsfolge**

Betrachtet man die in Tabelle 1.1 dargestellten Multiplikationsfaktoren, so fällt auf, dass die Faktoren einer Spektrallinie  $X(ji\Delta f)$  sich ständig unter Änderung des Vorzeichens wiederholen. Klammert man diesen aus der Summe aus, reduziert sich die Anzahl der Multiplikationen von 8 auf 4. Diesen Effekt macht man sich bei der Berechnung der *Schnellen Fouriertransformation (FFT)* zu nutzen. Die FFT selbst stellt keine eigenständige Transformationsvorschrift dar, nur einen sehr effektiven Algorithmus zur Lösung der diskreten Fouriertransformation.

Um diese Aussage genauer Prüfen zu können, wird die gleiche Tabelle nur für den Ausdruck  $e^{-j2\pi\frac{i}{K}}$  aufgestellt.

$e^{-j2\pi\frac{i}{K}}$		x(0)	x(T <sub>A</sub> )	x(2T <sub>A</sub> )	x(3T <sub>A</sub> )	x(4T <sub>A</sub> )	x(5T <sub>A</sub> )	x(6T <sub>A</sub> )	x(7T <sub>A</sub> )
	<b>i \ n</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>
<b>X(0)</b>	<b>0</b>	1	1	1	1	1	1	1	1

X(jΔf)	1	1	$e^{-j\frac{\pi}{4}}$	$e^{-j\frac{\pi}{2}}$	$e^{-j\frac{3\pi}{4}}$	-1	$-e^{-j\frac{\pi}{4}}$	$-e^{-j\frac{\pi}{2}}$	$-e^{-j\frac{3\pi}{4}}$
X(j2Δf)	2	1	$e^{-j\frac{\pi}{2}}$	-1	$-e^{-j\frac{\pi}{2}}$	1	$e^{-j\frac{\pi}{2}}$	-1	$-e^{-j\frac{\pi}{2}}$
X(j3Δf)	3	1	$e^{-j\frac{3\pi}{4}}$	$-e^{-j\frac{\pi}{2}}$	$e^{-j\frac{\pi}{4}}$	-1	$-e^{-j\frac{3\pi}{4}}$	$e^{-j\frac{\pi}{2}}$	$-e^{-j\frac{\pi}{4}}$
X(j4Δf)	4	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
X(j5Δf)	5	1	$-e^{-j\frac{\pi}{4}}$	$e^{-j\frac{\pi}{2}}$	$-e^{-j\frac{3\pi}{4}}$	-1	$e^{-j\frac{\pi}{4}}$	$-e^{-j\frac{\pi}{2}}$	$e^{-j\frac{3\pi}{4}}$
X(j6Δf)	6	1	$-e^{-j\frac{\pi}{2}}$	-1	$e^{-j\frac{\pi}{2}}$	1	$-e^{-j\frac{\pi}{2}}$	-1	$e^{-j\frac{\pi}{2}}$
X(j7Δf)	7	1	$-e^{-j\frac{3\pi}{4}}$	$-e^{-j\frac{\pi}{2}}$	$-e^{-j\frac{\pi}{4}}$	-1	$e^{-j\frac{3\pi}{4}}$	$e^{-j\frac{\pi}{2}}$	$e^{-j\frac{\pi}{4}}$

Tabelle 1.2 DFT – Berechnung allgemein

Wie schon in Tabelle 1.1 dargestellt, treten einige Faktoren mehrfach auf. Zur weiteren Untersuchung sind die Zeilen markierte, in denen sich das Vorzeichen der Faktoren in einer gemeinsamen Zeile dreht und die Zeilen, bei denen sich das Vorzeichen nicht dreht.

*Bsp.:*

Zeile X(j3Δf):  $x(T_A) \hat{a} x(5T_A) = \varphi = 180^\circ$ ;  $x(2T_A) \hat{a} x(6T_A) = \varphi = 180^\circ$

Zeile X(j6Δf):  $x(T_A) \hat{a} x(5T_A) = \varphi = 0^\circ$  ;  $x(2T_A) \hat{a} x(6T_A) = \varphi = 0^\circ$

Für die Spektrallinie X(jΔf) und X(j2Δf) ergeben sich folgende Summenformeln:

$$X(j\Delta f) = [x(0) - x(4T_A)] \cdot 1 + [x(1T_A) - x(5T_A)] \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}} + [x(2T_A) - x(6T_A)] \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} + [x(3T_A) - x(7T_A)] \cdot e^{-j\frac{3\pi}{4}}$$

$$X(j2\Delta f) = [x(0) + x(4T_A)] \cdot 1 + [x(1T_A) + x(5T_A)] \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} + [x(2T_A) + x(6T_A)] \cdot (-1) + [x(3T_A) + x(7T_A)] \cdot \left(-e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)$$

Würde man die Untersuchung stattdessen auf die Spalten beziehen, so kommt man auf das gleiche Resultat. Es ergeben sich daher 2 Wege der Herleitung. Werden die Spalten zum Vereinfachen verwendet, so bleibt die Ausgangsreihenfolge erhalten. Praktischerweise, da alle Eingangsvariablen rein reelle Zahlen sind, wird die zweite Möglichkeit verwendet, da bei dieser die Ausgangsreihenfolge nicht sortiert werden muss. Dies ist vor allem dann wichtig, wenn der Algorithmus auf einen Mikrocontroller oder FPGA umgesetzt werden soll, da hier nur der Realteil sortiert wird.

Zusätzlich zu den Abhängigkeiten in den Zeilen, betrachtet man nun die Abhängigkeit der Spalten. Im Vergleich von Spektrallinie 2 und 6 wird deutlich, dass hier weiter vereinfacht werden kann:

$$X(j2\Delta f) = [x(0) + x(4T_A)] \cdot 1 + [x(1T_A) + x(5T_A)] \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} + [x(2T_A) + x(6T_A)] \cdot (-1) + [x(3T_A) + x(7T_A)] \cdot \left(-e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$X(j6\Delta f) = [x(0) - x(4T_A)] \cdot 1 + [x(1T_A) + x(5T_A)] \cdot \left(-e^{-j\frac{\pi}{2}}\right) + [x(2T_A) + x(6T_A)] \cdot (-1) + [x(3T_A) + x(7T_A)] \cdot \left(e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)$$

### 1.3 FFT nach dem RADIX-2 – Verfahren

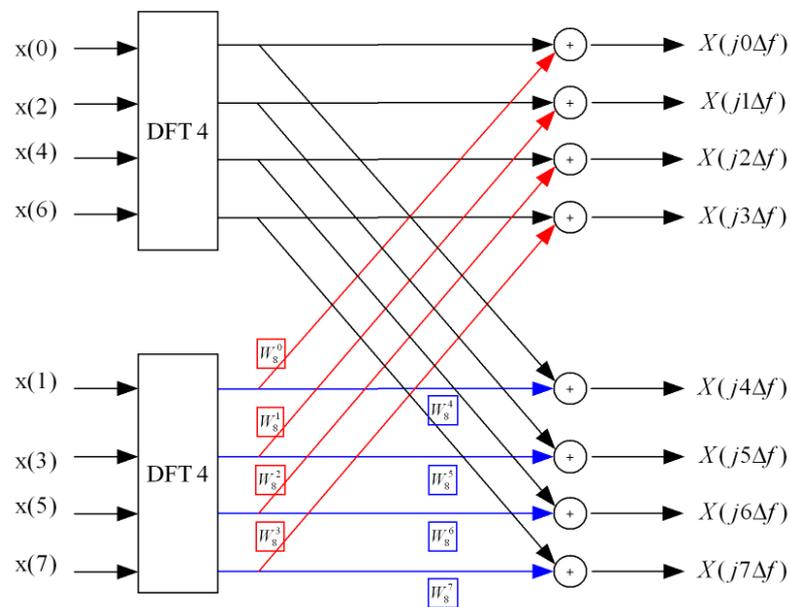
Wie die Herleitung aus 1.1 ergab, können die Berechnungen von geradem und ungeradem Index vereinfacht werden. Dieses Verfahren wird im RADIX-2

angewendet, in dem die gewünschte DFT in 2 halbe DFT's für gerade und ungerade Indizes getrennt wird. Die entstandene halbe DFT kann anschließend nach dem gleichen Prinzip wieder geteilt werden, bis letztendlich nur noch 2 Werte vorhanden sind. Hierfür ist die zwingende Voraussetzung, dass die Anzahl der Abtastwerte einer Potenz von 2 entspricht.

Für die bessere Übersicht wird der so genannte Twiddle-Faktor definiert:

$$e^{-j2\pi n \frac{i}{K}} = W_K^{ni} \tag{1.5}$$

Wird die DFT bis auf 2 Werte heruntergebrochen, so ergibt sich für den Index der Abtastwerte  $n = 0;1$ . Der Twiddle-Faktor des Abtastwertes  $n = 0$  wird dabei automatisch zu 1. Am Beispiel der DFT-8 sieht Signalfluss der ersten Aufteilung wie folgt aus:



**1.2 DFT/2 Aufteilung nach geraden und ungeraden Indizes**

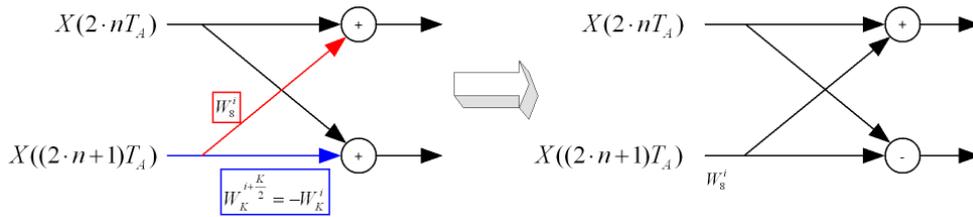
Mit diesem Hintergrundwissen, kann man nun recht einfach die Summenformel für gerade und ungerade Indizes aufstellen:

$$X(ji\Delta f) = \sum_{n=0}^{K-1} x(nT_A) \cdot e^{-j2\pi n \frac{i}{K}}$$

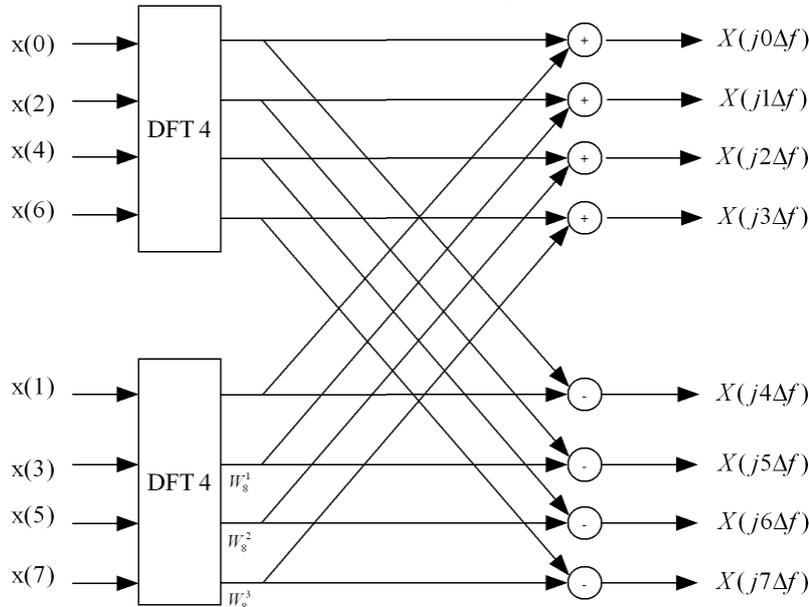
$$X(ji\Delta f) = \sum_{n=0}^{\frac{K-1}{2}} x(2 \cdot nT_A) \cdot e^{-j2\pi \cdot 2n \frac{i}{K}} + \sum_{n=0}^{\frac{K-1}{2}} x((2 \cdot n + 1)T_A) \cdot e^{-j2\pi \cdot (2n+1) \frac{i}{K}}$$

$$X(ji\Delta f) = \sum_{n=0}^{\frac{K-1}{2}} x(2 \cdot nT_A) \cdot e^{-j2\pi n \frac{i}{K/2}} + e^{-j2\pi \frac{i}{K}} \cdot \left[ \sum_{n=0}^{\frac{K-1}{2}} x((2 \cdot n + 1)T_A) \cdot e^{-j2\pi n \frac{i}{K/2}} \right]$$

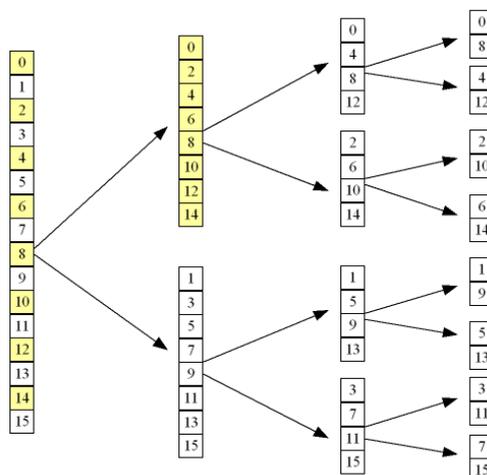
Wie schon in Kapitel 1.1 geschildert, zeigen nicht nur die Spalten Abhängigkeiten, sondern auch die Zeilen. Dies wird nun auch bei der Aufteilung im Signalgraph berücksichtigt. Jedes Pärchen kann dabei wie nachstehend gezeigt vereinfacht werden.



Der resultierende Graph sieht anschließend wie folgt aus:

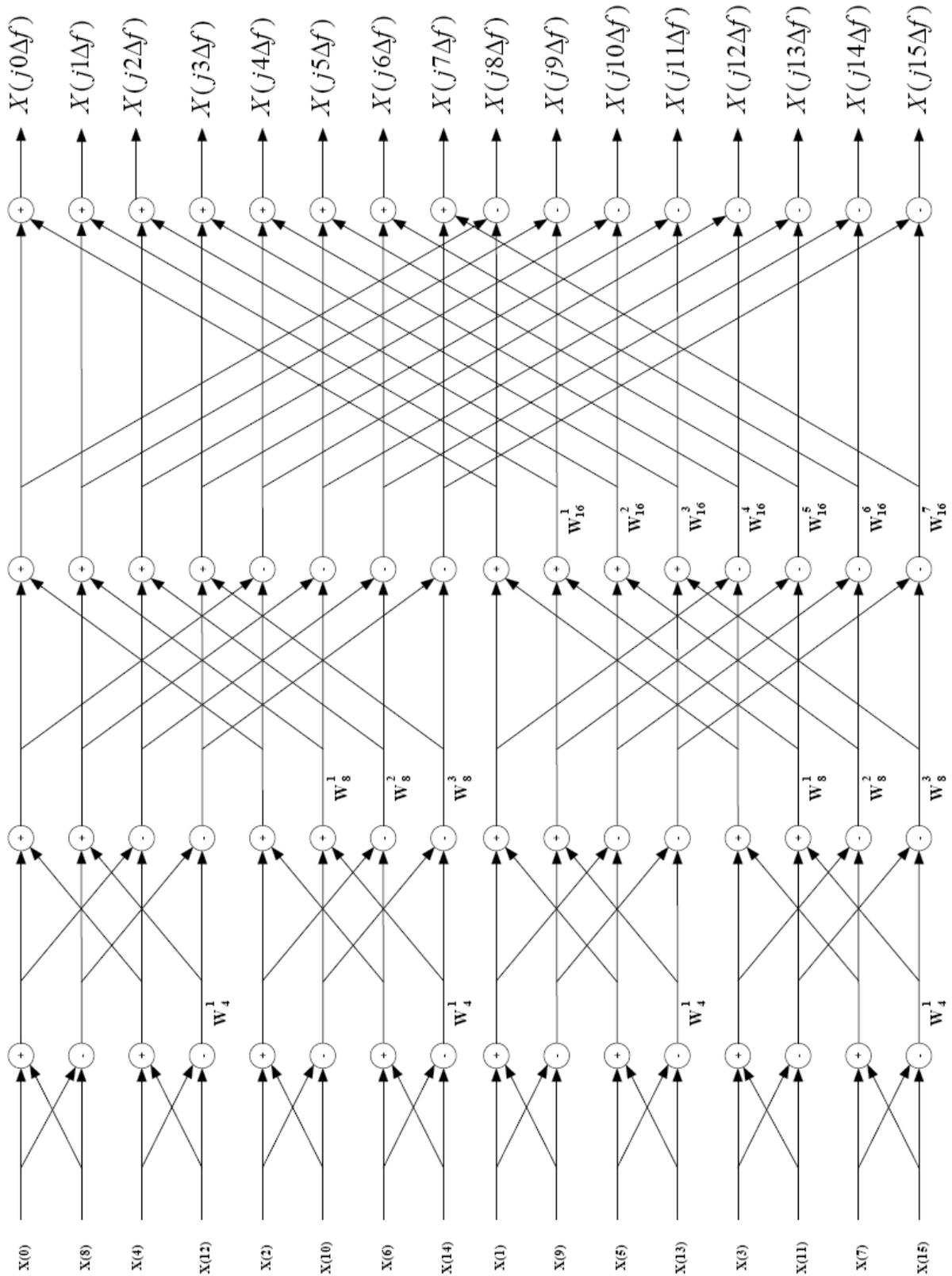


An dieser Stelle müsste nun wieder jede der beiden DFT 4 nach diesem Prinzip aufgeteilt werden. In jeder einzelnen Stufe ergeben sich daher eine unterschiedliche Anzahl von zu verarbeitenden Abtastwerten und somit andere Twiddle-Faktoren. Da das Betragsspektrum allerdings periodisch mit  $f_a/2$  ist, muss die letzte Subtraktion für  $X(j4\Delta f)$  bis  $X(j7\Delta f)$  nicht berechnet werden. Für die Entwicklung eines Algorithmus für einen entsprechenden Mikrocontroller wird mit einer FFT-16 begonnen, da hier 8 Spektrallinien entstehen und sich die Berechnung noch in Grenzen hält. Eine spätere Erweiterung auf höherwertige FFT's ist kein Problem. Nachstehend dargestellt ist die maximale Aufteilung der Abtastwerte bis zu einer DFT-2, durch deren Namen dieses Berechnungsverfahren RADIX-2 gibt.

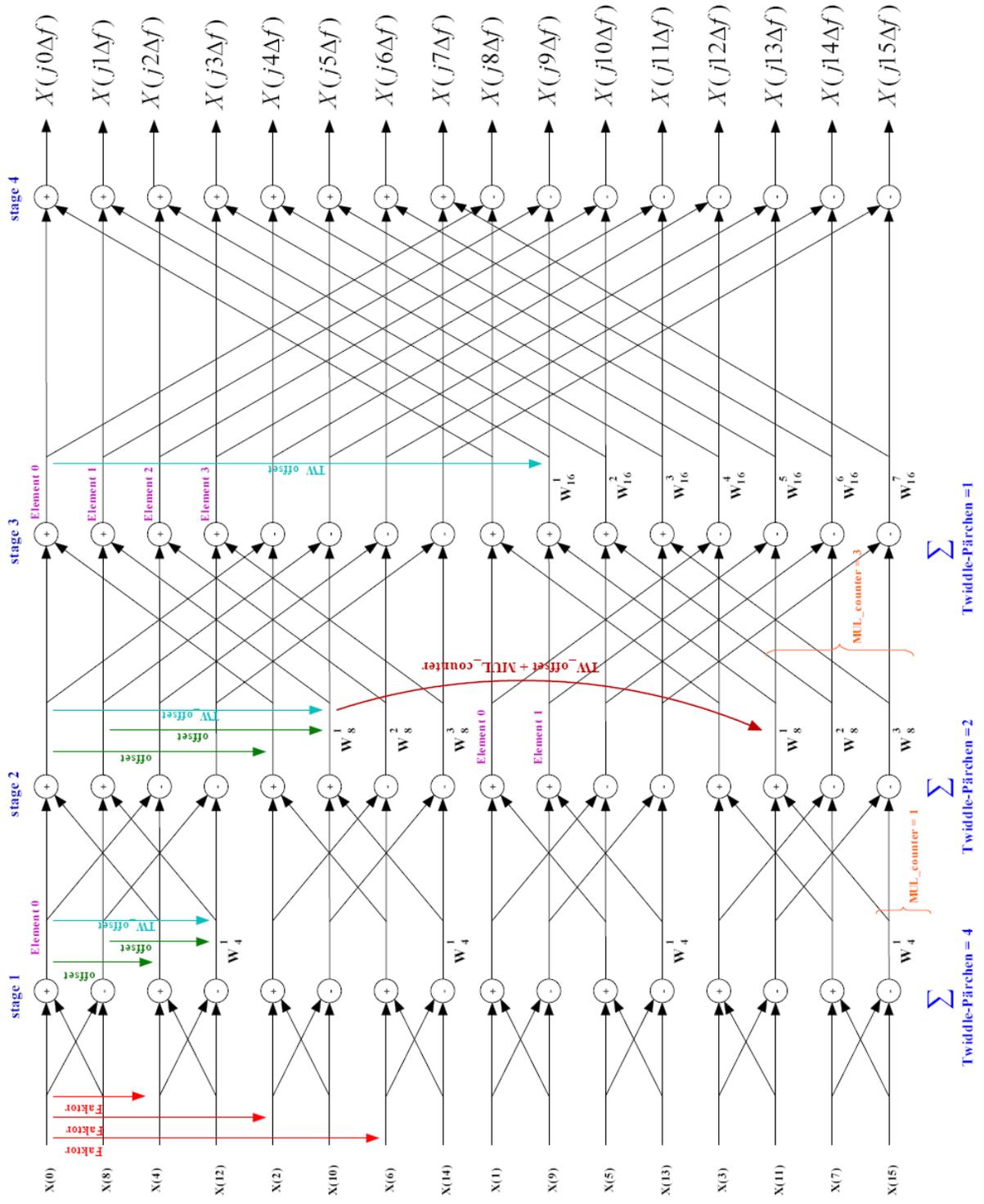


### 1.3 Sortierung der Abtastwerte

Butterfly – Graph für FFT 16



Bei genauer Betrachtung des Butterfly - Graphen sind einige Abhängigkeiten erkennbar, die eine Berechnung höherwertiger FFT's ermöglicht ohne für diese den Graphen aufstellen zu müssen.



Faktor = Abstand zwischen den Butterfly's -->  $2^{\text{stage}}$

offset = Abstand der Additions-/Subtraktionspärchen -->  $2^{(\text{stage}-1)}$

$\Sigma$  = TW\_counter = Anzahl aller Twiddlepärchen -->  $2^{(M-1-\text{stage})}$

Element = Elementnummer in aktuellem Butterfly

MUL\_counter = Anzahl der direkt aufeinanderfolgenden Twiddlefaktoren -->  $2^{\text{stage} - 1}$

TW\_offset = Abstand zu den Twiddle - Faktoren -->  $2^{\text{stage} + 1}$

## 1.4 Fensterung

Grundsätzlich lässt sich die Eingangsfolge direkt wie in den vorherigen Kapiteln berechnen. Dabei wird allerdings immer angenommen, dass sich ein ganzes Vielfaches der Signalfrequenz innerhalb der Abtastzeit befindet. Ist die Signalfrequenz kein ganzes Vielfaches, so entstehen beim aneinanderreihen der Abtastfenster Unstetigkeiten. Durch diese entstehen neue Spektrallinien und alte werden Aufgeweitet. Um dies zu unterdrücken werden die Abtastwerte verschieden Gewichtet. Die Wichtung kann dabei durch verschiedene Fenster erfolgen. Die Auswahl einer geeigneten Fensterfunktion ist immer ein Kompromiss zwischen Seitenbandunterdrückung und Breite der Spektrallinien. Werden die Abtastwerte nicht verändert, so entspricht dies eines Rechteckfensters. Nachstehend sind die Berechnungsvorschriften verschiedener Fensterfunktionen aufgelistet.

Bartlett-Fenster

$$\{w(k)\} = \begin{cases} \frac{2k}{K-1} \text{ für } 0 \leq k \leq \frac{K-1}{2} \\ 2 - \frac{2k}{K-1} \text{ für } \frac{K-1}{2} < k \leq K-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Hanning-Fenster

$$\{w(k)\} = \begin{cases} 0,5 - 0,5 \cos\left(\frac{2\pi k}{K-1}\right) \text{ für } 0 \leq k \leq K-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Hamming-Fenster

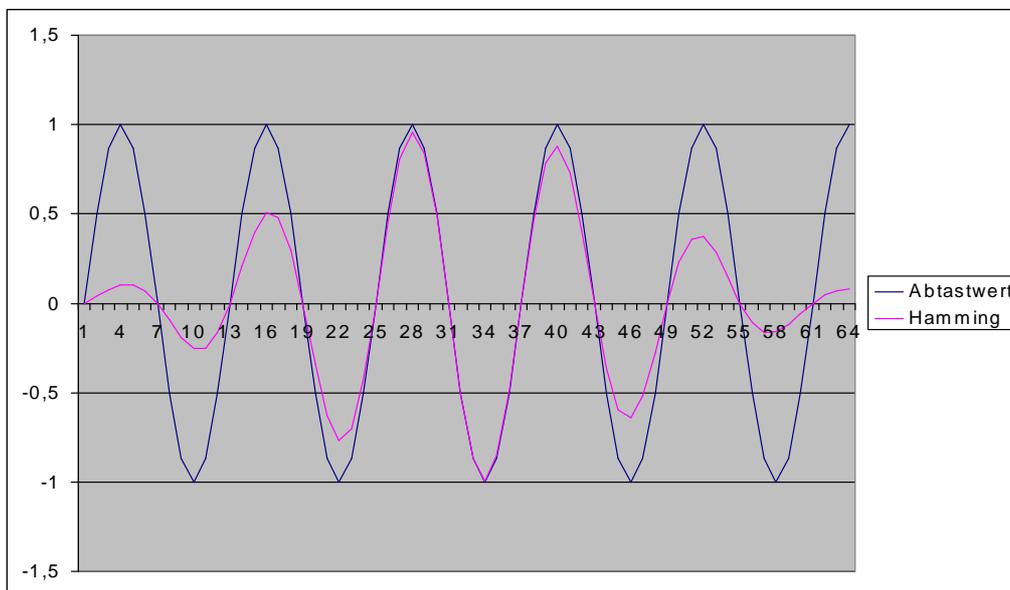
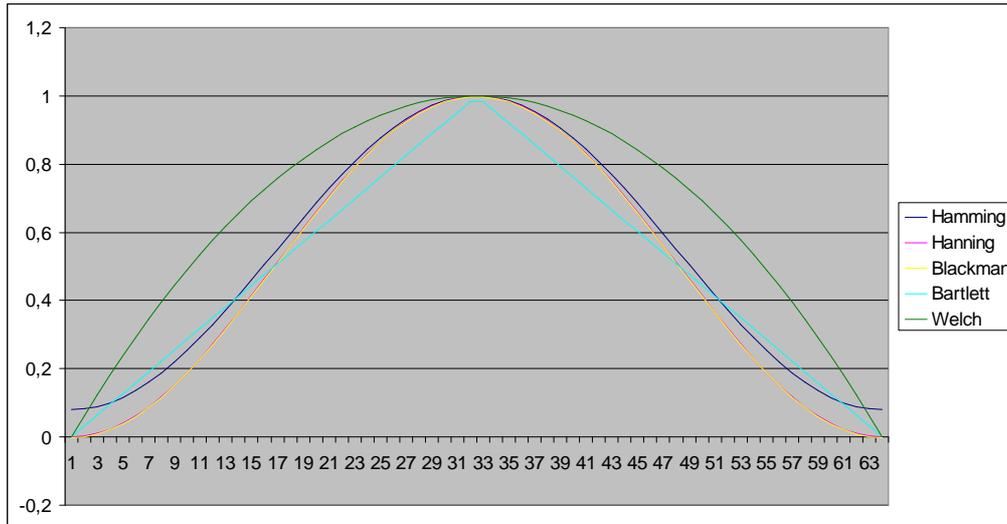
$$\{w(k)\} = \begin{cases} 0,54 - 0,46 \cos\left(\frac{2\pi k}{K-1}\right) \text{ für } 0 \leq k \leq K-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Blackman-Fenster

$$\{w(k)\} = \begin{cases} 0,42 - 0,5 \cos\left(\frac{2\pi k}{K-1}\right) + 0,08 \cos\left(\frac{4\pi k}{K-1}\right) \text{ für } 0 \leq k \leq K-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Welch-Fenster

$$\{w(k)\} = \begin{cases} 1 - \left[\frac{2k-K}{K}\right]^2 \text{ für } 0 \leq k \leq K-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Wie man erkennen kann, würde bei der nächsten Abtastung ein Phasensprung entstehen, der neue Frequenzen erzeugt. Dieser wird durch das Hammingfenster gut unterdrückt.

## 2. Umsetzung

<<Hier geht es erstmal mit C-Code-Entwicklung weiter, der sehr hardwarenah entwickelt wird und besser als Assembler lesbar ist.>>