



# **Plastizität und Bruchmechanik**

Manuskripte zur Vorlesung

TU Berlin, Fakultät V  
Institut für Mechanik

Wolfgang Brocks

Januar 2012

## Inhaltsverzeichnis

	<u>Manuskript-Name</u>
Der Spannungsintensitätsansatz nach IRWIN	LEBM_SIF
Der energetische Ansatz	Griffith
Phänomenologische Theorie der zeit- und geschwindigkeitsunabhängigen Plastizität	Plastizitaet
Erweiterung der LEBM für kleine plastische Zonen	BM_SSY
Wegunabhängige Integrale - $J$ -Integral	J-Integral
Asymptotische Lösung für das Spannungs- und Verzerrungsfeld an der Rissspitze in der EPBM (HRR-Feld)	HRR-Feld
Gleitlinientheorie	Gleitlinien
Plastischer Kollaps und Grenzlastverfahren	Grenzlast
Experimentelle Ermittlung von Bruchkennwerten	fracture-toughness
Verformung, Schädigung, Bruch	Schaedigung
Das Modell der Kohäsivzone	Kohaesivmodell

## Aufgaben

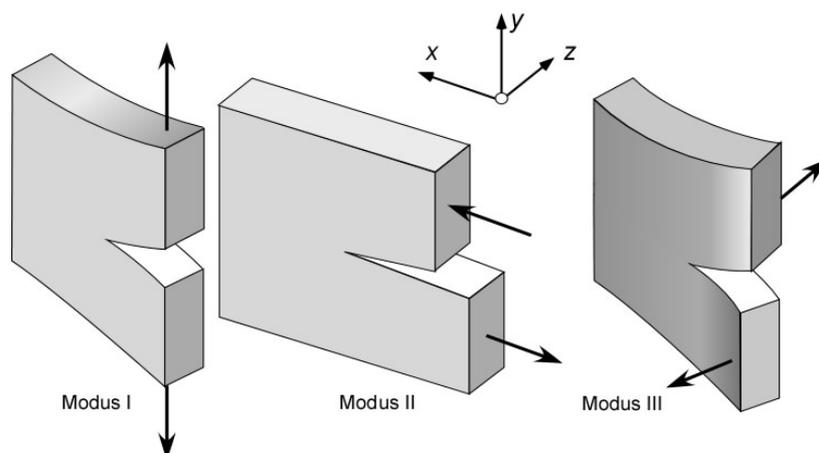
## Der Spannungsintensitätsansatz nach IRWIN

Obwohl die wesentlichen Arbeiten über Spannungsfelder an Rissen von INGLIS [1913], SNEDDON [1946], WESTERGAARD [1939] und anderen bereits Anfang bis Mitte des 20. Jahrhunderts veröffentlicht wurden, haben diese Erkenntnisse die Festigkeitsauslegung von Bauteilen praktisch nicht beeinflusst. Erst IRWIN [1957] erkannte die fundamentale Ähnlichkeit aller asymptotischen singulären Spannungsfelder an Rissen und zog den Schluss, die *Intensitäten* dieser Felder für bruchmechanische Bewertungen zu nutzen.

Er hat zunächst drei *Grundformen* (Moden) der Beanspruchung von Rissen unterschieden, die drei voneinander unabhängigen Bewegungsmöglichkeiten der Rissflächen gegeneinander entsprechen. In **Tabelle 1** sind die Erscheinungsformen der drei Moden zusammengefasst und in **Bild 1** zusammen mit dem in der Bruchmechanik üblichen kartesischen Koordinatensystem dargestellt.

Modus	lokale Erscheinungsform	Arten der äußeren Belastung
Modus I	Öffnen der Rissufer unter Zugspannungen senkrecht zur Rissebene	reine Normalkraftbelastung; reine Biegung; Aufkeilen
Modus II	Abgleiten der Rissufer unter Schubspannungen in Ligament-Richtung	reine Querkraftbelastung; unter 45° geneigter Riss unter biaxialer Zug-Druck-Belastung
Modus III	Verscheren der Rissufer unter Schubspannungen parallel zur Rissfront	Torsion; anti-ebenes Zerreißen

**Tabelle 1:** Grundformen der Rissbeanspruchung



**Bild 1:** Grundformen der Rissbeanspruchung nach IRWIN

Die singulären Spannungsfelder aller drei Rissöffnungsarten können hinsichtlich ihrer Intensität durch jeweils einen Faktor, den *Spannungsintensitätsfaktor*, beschrieben werden, der nur von der Geometrie des Körpers, d.h. der Probe oder des Bauteils, und des Risses sowie der äußeren Be-

lastung abhängt. Wegen der Voraussetzung linear-elastischen Materialverhaltens können die Spannungsfelder aller drei Grundformen superponiert werden, so dass die asymptotischen Näherungen des *Spannungszustandes* an Rissen durch

$$\sigma_{ij}(r, \vartheta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[ K_I f_{ij}^I(\vartheta) + K_{II} f_{ij}^{II}(\vartheta) + K_{III} f_{ij}^{III}(\vartheta) \right] \quad (1)$$

und des *Verschiebungszustandes* durch

$$u_i(r, \vartheta) = \frac{1}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[ K_I g_i^I(\vartheta) + K_{II} g_i^{II}(\vartheta) + K_{III} g_i^{III}(\vartheta) \right] \quad (2)$$

gegeben sind. Die Indizes ( $i, j$ ) bezeichnen kartesische Koordinaten ( $x, y, z$ ) oder Zylinderkoordinaten ( $r, \vartheta, z$ ) am Riss.

- $K_I, K_{II}, K_{III}$  sind die *Spannungsintensitätsfaktoren* der drei Rissöffnungsarten und
- $f_{ij}^I, f_{ij}^{II}, f_{ij}^{III}, g_i^I, g_i^{II}, g_i^{III}$  sind die in **Tabelle 2** zusammengestellten dimensionslosen Winkelfunktionen von  $\vartheta$ .

Im **Bild 2** sind die Winkelfunktionen  $f_{ij}^I(\vartheta)$  und  $f_{ij}^{II}(\vartheta)$  graphisch dargestellt. Die Normalspannungen  $f_{xx}(\vartheta)$  und  $f_{yy}(\vartheta)$  sind gerade Funktionen von  $\vartheta$  für Modus I und ungerade Funktionen für Modus II, bei den Schubspannungen  $f_{xy}(\vartheta)$  ist es umgekehrt.

Die Spannungsintensitätsfaktoren stellen ein Maß für die Stärke der  $1/\sqrt{r}$ -Singularität dar

$$\left\{ \begin{array}{l} K_I \\ K_{II} \\ K_{III} \end{array} \right\} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{yy}(r, \vartheta = 0) \\ \sigma_{xy}(r, \vartheta = 0) \\ \sigma_{yz}(r, \vartheta = 0) \end{array} \right\} \quad (3)$$

Aus Gl. (3) lässt sich auch die *Dimension* von  $K$  als  $[Kraft \times Länge^{-3/2}]$  ablesen. Übliche *Maßeinheiten* sind  $MPa\sqrt{m} = 10\sqrt{10} \text{ N mm}^{-3/2}$ . Für die Rissuferverschiebungen gilt entsprechend

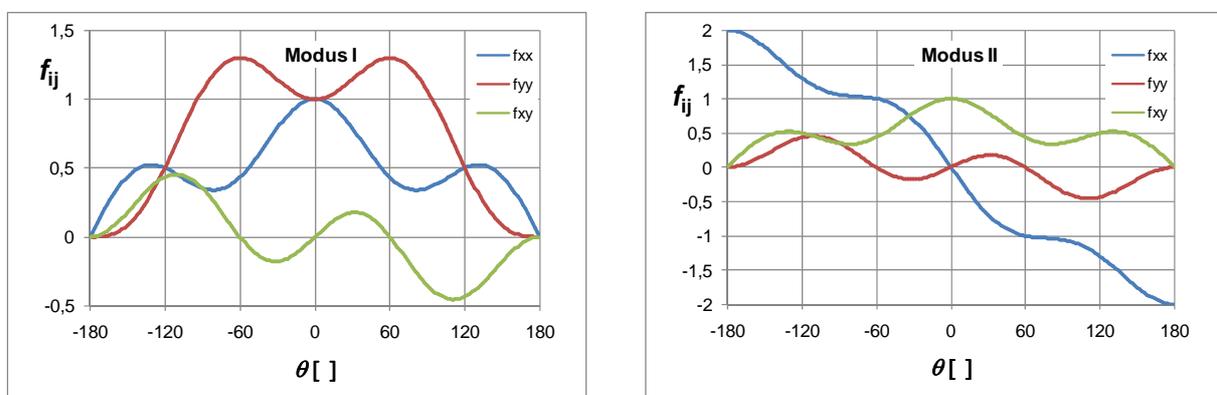
$$\left\{ \begin{array}{l} K_I \\ K_{II} \\ K_{III} \end{array} \right\} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\kappa + 2} u_y(r, \vartheta = \pi) \\ \frac{1}{\kappa + 1} u_x(r, \vartheta = \pi) \\ \frac{1}{4} u_z(r, \vartheta = \pi) \end{array} \right\} \quad (4)$$

Sind die asymptotischen Spannungsverteilungen  $\sigma_{ij}(r, \vartheta)$  aus analytischen oder numerischen Lösungen bekannt, erhält man die  $K$ -Faktoren unmittelbar aus dem Vergleich mit Gl. (1).

Für einige elementare Belastungsfälle des GRIFFITH-Risses der Länge  $2a$  und des kreisförmigen Innenrisses vom Radius  $a$  im unendlichen Körper (SNEDDON [1973]) sind die  $K$ -Faktoren in der **Tabelle 3** zusammengestellt.

	Modus I	Modus II	Modus III
$f_{xx}$	$\cos \frac{\vartheta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{3\vartheta}{2} \right)$	$-\sin \frac{\vartheta}{2} \left( 2 - \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{3\vartheta}{2} \right)$	0
$f_{yy}$	$\cos \frac{\vartheta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{3\vartheta}{2} \right)$	$\sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{3\vartheta}{2}$	0
$f_{zz}$	0 für ESZ $2\nu \cos \frac{\vartheta}{2}$ für EVZ	0 für ESZ $-2\nu \sin \frac{\vartheta}{2}$ für EVZ	0
$f_{xy}$	$\sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{3\vartheta}{2}$	$\cos \frac{\vartheta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{3\vartheta}{2} \right)$	0
$f_{xz}$	0	0	$-\sin \frac{\vartheta}{2}$
$f_{yz}$	0	0	$\cos \frac{\vartheta}{2}$
$g_x$	$\cos \frac{\vartheta}{2} \left[ \kappa - 1 + 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right]$	$\sin \frac{\vartheta}{2} \left[ \kappa + 1 + 2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \right]$	0
$g_y$	$\sin \frac{\vartheta}{2} \left[ \kappa + 1 - 2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \right]$	$-\cos \frac{\vartheta}{2} \left[ \kappa - 1 - 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right]$	0
$g_z$	0 für EVZ	0 für EVZ	$4 \sin \frac{\vartheta}{2}$

**Tabelle 2:** Winkelfunktionen der Spannungs- und Verschiebungsfelder am Riss in der LEBM



**Bild 2:** Winkelfunktionen der Spannungsfelder am Riss für Modus I und II in der LEBM

Die  $K$ -Faktoren sind von der Geometrie des belasteten Körpers, der Beanspruchungsart (z.B. Zug oder Biegung), der Risskonfiguration und (linear) von der äußeren Belastung abhängig. Ihre exakte Ermittlung ist für reale Strukturen in praxisrelevanten Fällen in der Regel nur mit aufwendigen mathematischen Methoden analytischer (komplexe Spannungsfunktionen, Integraltransformationen) oder numerischer Art (Finite-Elemente-, Randelemente-Verfahren) verbunden. Bei Anwendung analytischer Methoden braucht das Randwertproblem allerdings nicht vollständig gelöst zu werden, sondern es genügt die Kenntnis des Spannungsfeldes um die Rissspitze; insbesondere sind Spannungsfelder ohne die charakteristische  $1/\sqrt{r}$ -Singularität ohne Einfluss auf den Spannungsintensitätsfaktor. Liegen numerische Lösungen des Spannungs- oder Verschiebungsfeldes vor, können die  $K$ -Faktoren durch Auswerten von Gl. (3) bzw. (4) bestimmt werden. Andere numerische Verfahren beruhen auf dem Zusammenhang zwischen  $K$ -Faktoren und *Energiefreisetzungsrate*.

GRIFFITH-Riss	$K_I$	$K_{II}$	$K_{III}$
einachsiger Zug $\sigma_{yy}^\infty$	$\sigma_{yy}^\infty \sqrt{\pi a}$	0	0
reiner Schub $\sigma_{yx}^\infty = \sigma_{xy}^\infty$	0	$\sigma_{xy}^\infty \sqrt{\pi a}$	0
antiebener Schub $\sigma_{yz}^\infty$	0	0	$\sigma_{yz}^\infty \sqrt{\pi a}$
konstanter Rissflächendruck $p_0$	$p_0 \sqrt{\pi a}$	0	0
zwei Einzelkräfte $F$ , "Aufkeil"-Problem	$\frac{F}{\pi B a} \sqrt{\pi a}$	0	0

kreisförmiger Innenriss	$K_I$	$K_{II}$	$K_{III}$
einachsiger Zug $\sigma_{yy}^\infty$	$\sigma_{yy}^\infty \frac{2}{\pi} \sqrt{\pi a}$	0	0
konstanter Rissflächendruck $p_0$	$p_0 \frac{2}{\pi} \sqrt{\pi a}$	0	0
veränderlicher Rissflächendruck $p(R)$	$\frac{2}{\pi a} \int_0^a \frac{R p(R)}{\sqrt{a^2 - R^2}} dR \sqrt{\pi a}$	0	0

**Tabelle 3:** Spannungsintensitätsfaktoren für elementare Belastungsfälle

Die Gewinnung und Anwendung von Näherungslösungen für  $K$  hat hohe Bedeutung für eine ingenieurmäßige Anwendung der Bruchmechanik. Für ein beliebiges ebenes Rissproblem kann man  $K$  in Verallgemeinerung der in **Tabelle 3** angegebenen Gleichungen in der Form

$$K = \sigma_{\infty} \sqrt{\pi a} Y(\text{Geometrie}) \quad (5)$$

schreiben. Dabei ist  $\sigma_{\infty}$  eine geeignet definierte "Brutto-Nennspannung" im Fernfeld des Risses und  $Y$  eine dimensionslose Funktion geometrischer Parameter, die aus analytischen oder numerischen Näherungslösungen ermittelt werden kann. Für eine Vielzahl von "Modellfällen" kann  $Y$  als tabellierte Funktion oder als Approximationsfunktion einschlägigen Handbüchern wie dem

- "Compendium of Stress Intensity Factors" von ROOKE und CARTWRIGHT [1976],
- "Stress Analysis of Cracks Handbook" von TADA, PARIS und IRWIN [1985],
- "Stress Intensity Factors Handbook" von MURAKAMI et al. [1992]

und anderen entnommen werden. Der Erfahrung und dem Abstraktionsvermögen des Ingenieurs ist es vorbehalten, reale Strukturen auf die in den Handbüchern zusammengestellten Probleme zurückzuführen und so Näherungslösungen zu erhalten. Dabei liefert das *Superpositionsprinzip* eine universelle Methodik, um  $K$ -Faktoren bzw. Geometriefunktionen komplexer Strukturen und Beanspruchungsfälle aus Lösungen einfacherer Probleme zu gewinnen.

Wegen des zugrundeliegenden elastischen Stoffgesetzes und der Annahme kleiner Verformungen ist das Randwertproblem linear, d.h. Spannungs- und Verformungsfelder verschiedener Lastfälle können additiv überlagert, und damit  $K$ -Faktoren für gleichen Rissöffnungsmodus addiert werden:

$$K_{\alpha} = \sum_n K_{\alpha n} \quad , \quad \alpha = \text{I, II, III} \quad , \quad n = \text{Lastfälle} \quad (6)$$

Ein einfaches Beispiel ist die Scheibe mit schräg liegendem GRIFFITH-Riss unter Zug- und Schubbelastung, für die man

$$\begin{aligned} K_{\text{I}} &= (\sigma_{\infty} \sin \alpha - \tau_{\infty} \cos \alpha) \sin \alpha \sqrt{\pi a} \\ K_{\text{II}} &= (\sigma_{\infty} \cos \alpha + \tau_{\infty} \sin \alpha) \sin \alpha \sqrt{\pi a} \end{aligned} \quad (7)$$

erhält.

INGLIS, C.E. [1913]: Stresses in a plate due to the presence of cracks und sharp corners, Trans. Inst. Naval Arch. 60, 219-230.

IRWIN, G.R. [1957]: Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate, J. Appl. Mech. 24, 361-364.

SNEDDON, I.N. [1946]: The distribution of stress in the neighbourhood of a crack in an elastic solid. Proc. Roy. Soc. A187, 229-260.

SNEDDON, I.N. [1973]: Integral transform methods - Circular cracks. In: Mechanics of Fracture (ed. by G.C. SIH), 1. Methods of analysis und solution of crack problems, 350-363.

WESTERGAARD, H.M. [1939]: Bearing pressures und cracks, J. Appl. Mech. 6, 49-53.

## Der energetische Ansatz

GRIFFITH [3], [4] behandelte das Problem des Bruchs elastischer Festkörper mit dem Satz vom Minimum der Energie und wendete diese Theorie auf eine unendlich Scheibe mit Mittenriss der Länge  $2a$  nach Bild 1 an.

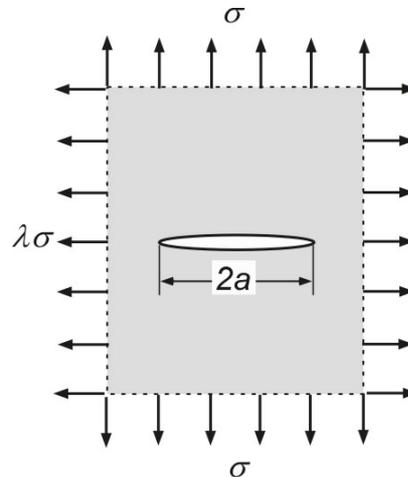


Bild 1: Der GRIFFITH-Riss

Die *elastische Verzerrungsenergie* pro Einheitsdicke  $B = 1$ , die in einem kreisförmigen Gebiet von Radius  $r$  in einer Scheibe unter einachsiger Zug ohne Riss gespeichert ist, beträgt

$$U_0^{\text{el}} = \frac{\pi r^2 \sigma_\infty^2}{16G} \left[ (\kappa - 1)(1 + \lambda)^2 + 2(1 - \lambda)^2 \right]. \quad (1)$$

Dabei ist  $\sigma_\infty$  die anliegende Fernfeldspannung,  $G = E/2(1 + \nu)$  der Gleitmodul und  $\kappa$  ein von der Querkontraktionszahl  $\nu$  abhängiger Parameter

$$\kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{für EVZ} \\ \frac{3 - \nu}{1 + \nu} & \text{für ESZ} \end{cases}. \quad (2)$$

Die Verzerrungsenergie hängt von der Größe der Scheibe ab und wird unendlich für  $r \rightarrow \infty$ . Schneidet man ein Loch in die Scheibe, ändern sich Spannungs- und Verzerrungszustand und also auch die Verzerrungsenergie. Abhängig von der Randbedingung nimmt sie zu oder ab. Nimmt man konstante Verschiebung (*fixed-grip*) an, wird *Energie freigesetzt (released)*,

$$U^{\text{el}} = U_0^{\text{el}} - U_{\text{rel}}^{\text{el}}. \quad (3)$$

Die Abnahme der Verzerrungsenergie infolge eines elliptischen Loches mit den Halbachsen  $a$  und  $b$ , kann mit Hilfe der Gleichungen von INGLIS [5] berechnet werden,

$$U_{\text{rel}}^{\text{el}} = \frac{\pi \sigma_\infty^2}{32G} (1 + \kappa) \left[ (1 - \lambda)^2 (a + b)^2 + 2(1 - \lambda^2)(a^2 - b^2) + (1 + \lambda)^2 (a^2 + b^2) \right]. \quad (4)$$

Sie hängt nur von den Abmessungen des Loches ab und ist immer endlich. Der Parameter  $\lambda$  berücksichtigt zweiachsigen Zug. Den GRIFFITH-Riss der Länge  $2a$  erhält man für  $b \rightarrow 0$ ,

$$U_{\text{rel}}^{\text{el}} = \frac{\pi a^2 \sigma_\infty^2}{8G} (1 + \kappa). \quad (5)$$

## W. Brocks: Bruchmechanik

Spannungen  $\lambda\sigma_\infty$  parallel zum Riss beeinflussen im Falle eines idealen Risses die freigesetzte Energie nicht.

GRIFFITH formulierte als Bedingung dafür, dass der Riss wächst,

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial a} (U_{\text{rel}}^{\text{el}} - U_{\text{sep}}) \geq 0.} \quad (6)$$

Der zweite Term, die *Separationsarbeit*, ist gleich der Oberflächenenergie pro Einheitsdicke der insgesamt vier neuen Rissflächen<sup>1</sup>,

$$U_{\text{sep}} = 4a\gamma. \quad (7)$$

GRIFFITH's führte für seine recht unorthodoxe Idee einer Oberflächenenergie folgendes Argument an: "*Just as in a liquid, so in a solid the bounding surfaces possess a surface tension which implies the existence of a corresponding amount of potential energy. If owing to the action of a stress a crack is formed, or a pre-existing crack is caused to extend, therefore, a quantity of energy proportional to the area of the new surface must be added*" [4].

Ein vorhandener Riss wird sich *instabil* ausbreiten, wenn das Gleichheitszeichen in Gl. (7) gilt, also wenn die *Energiefreisetzungsrates* (*energy-release rate*)

$$\mathcal{G}^{\text{el}} = -\frac{\partial U^{\text{el}}}{B \partial (2a)} = \frac{\partial U_{\text{rel}}^{\text{el}}}{B \partial (2a)} = \frac{\pi a \sigma_\infty^2}{2G} (1 + \kappa) \quad (8)$$

gleich der notwendigen *Separationsarbeit* (*work of separation*)

$$\frac{\partial U_{\text{sep}}}{B \partial (2a)} = 2\gamma = \Gamma_c \quad (9)$$

ist, um neue Rissoberflächen zu schaffen:

$$\boxed{\mathcal{G}^{\text{el}}(a) = \Gamma_c.} \quad (10)$$

Letztere wird als Materialkonstante angesehen. Aus diesem Kriterium ergibt sich die globale Bruchspannung der Scheibe zu

$$\sigma_f^\infty = \sqrt{\frac{2E'\gamma}{\pi a}}, \quad (11)$$

mit  $E' = E$  für ESZ und  $E' = E/(1-\nu^2)$  für EVZ.

IRWIN [6] stellte mehr als 35 Jahre später einen Zusammenhang zwischen der GRIFFITH'schen Energiefreisetzungsrates und dem Spannungsintensitätsfaktor (SIF) her,

$$\mathcal{G}^{\text{el}} = \frac{K^2}{E'}, \quad (12)$$

und untersuchte, wie diese Theorie auf quasispröden Bruch (*somewhat brittle fracture*), d.h. bei Existenz kleiner plastischer Zonen an der Risspitze (*small-scale yielding*) angewendet werden kann, indem er den „Radius“ der plastischen Zone

---

<sup>1</sup> Man beachte, dass der GRIFFITH-Riss zwei Risspitzen hat.

## W. Brocks: Bruchmechanik

$$r_p = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K}{R_F} \right)^2. \quad (13)$$

und das Konzept des *effektiven* SIF einführte. Die Energiefreisetzungsrate einer mittengerissenen Scheibe ist unter Berücksichtigung der Plastizierung an der Riss Spitze

$$\mathcal{G}^{\text{ssy}} = \frac{\sigma_\infty^2 \pi (a + r_p)}{E'} = \mathcal{G}^{\text{el}} + \mathcal{G}^{\text{pl}}, \quad (14)$$

und um das Bruchkriterium der Gl. (10) zu erfüllen, muss ein zusätzlicher plastischer Anteil der Separationsarbeit auf der rechten Seite hinzugefügt werden

$$\mathcal{G}^{\text{ssy}}(a) = \Gamma_c = \Gamma^{\text{el}} + \Gamma^{\text{pl}}. \quad (15)$$

Diese plastische Separationsarbeit hat die gleiche Dimension wie  $\Gamma^{\text{el}}$ , nämlich Energie pro Fläche, ist jedoch keine Oberflächenenergie im Sinne von GRIFFITH mehr, denn die plastische Verzerrungsenergie bezieht sich auf ein Volumen.

Solange plastische Deformationen auf eine kleine Umgebung der Riss Spitze beschränkt bleiben, verursacht diese phänomenologische Erweiterung der GRIFFITHSchen Theorie keine ernsthaften Probleme, abgesehen davon, dass elastische und plastische Anteile von  $\Gamma_c$  nicht getrennt werden können und normalerweise  $\Gamma^{\text{pl}} \gg \Gamma^{\text{el}}$  ist. Der grundlegende Unterschied zwischen beiden Anteilen hat jedoch schwerwiegende Folgen beim Auftreten großer plastischer Zonen (*large-scale yielding*):

- Solange die lokale Verzerrungsenergie nicht von der im Fernfeld separiert werden kann, besteht keine Chance, physikalisch sinnvolle, geometrie-unabhängige Werte der Separationsarbeit, d.h. der *Bruchzähigkeit* als Materialkenngröße zu bestimmen.
- Die Berechnung der Separationsarbeit innerhalb einer Prozesszone erfordert die Einführung einer *Längenskala*, der Höhe der Prozesszone. Dieses Problem verbirgt sich hinter verschiedenen Ungereimtheiten der elastisch-plastischen Bruchmechanik (EPBM), im sogenannten *Paradoxon* [7], dass das Nahfeld-*J*-Integral bei verschwindender Höhe der Integrationskontur Null wird [2], ebenso wie in der *Netzabhängigkeit* von FE-Analysen mit schädigungsmechanischen Modellen.

Mit der Einführung des *J*-Integrals in die EPBM durch RICE und CHEREPANOV schien zunächst eine mit der LEBM konsistente Theorie gefunden worden zu sein: in der *Deformationstheorie der Plastizität* ist *J* eine *Energiefreisetzungsrate*,  $J = \mathcal{G} = -(\partial U / \partial a)$ , und bestimmt die Intensität des singulären Spannungs- und Verzerrungsfeldes (HRR-Feld). Kritische *J*-Werte für Rissinitiation unter monotoner Belastung hängen nicht wesentlich von der Probengeometrie ab. Dies änderte sich jedoch mit der Anwendung von *J* auf duktilen Risswachstum in Form von R-Kurven: Die kumulative Größe *J*, die mit der Risslänge zunimmt, stellt keine Energiefreisetzungsrate mehr dar, sobald der Riss wächst. Stattdessen muss eine inkrementelle Größe eingeführt werden (TURNER [8]).

Man betrachte wieder die Energiebilanz für eine inkrementelle Rissverlängerung unter quasistatischer Belastung,

## W. Brocks: Bruchmechanik

$$\frac{\partial W_{\text{ex}}}{B\partial a} = \frac{\partial}{B\partial a} (U^{\text{el}} + U^{\text{pl}} + U_{\text{sep}}), \quad (16)$$

wobei  $W_{\text{ex}}$  die Arbeit der äußeren Kräfte ist,  $U^{\text{el}}$  und  $U^{\text{pl}}$  die elastischen und plastischen Anteile der inneren Energie des Körpers und  $U_{\text{sep}}$  die Separationsarbeit in der Prozesszone,  $\partial U_{\text{sep}}/B\partial a = \Gamma_c$ . Die totale *Dissipationsrate*  $R$  ist dann durch

$$R = \frac{\partial U_{\text{dis}}}{B\partial a} = \frac{\partial}{B\partial a} (W_{\text{ex}} - U^{\text{el}}) = \frac{\partial U^{\text{pl}}}{B\partial a} + \Gamma_c \quad (17)$$

definiert. Unter *dissipierter* Energie wird die gesamte nicht wiedergewinnbare (irreversible) mechanische Arbeit verstanden.

Als TURNER die Größe  $R$  einführte, bezweifelte er grundsätzlich die Möglichkeit einer Trennung in lokale und globale Anteile. Damit enthält jeder gemessene Risswiderstand notwendigerweise die plastische Verzerrungsarbeit im Rissfernfeld  $\partial U^{\text{pl}}/B\partial a \gg \Gamma_c$ , und das Problem der Geometrieabhängigkeit von  $J_R$ -Kurven schien damit unlösbar. Sowohl experimentelle Untersuchungen von Rissoberflächen als auch mikromechanische Modelle duktiler Schädigung haben jedoch neue Möglichkeiten und Ansätze zu einer physikalisch aussagekräftigen Definition von Risszähigkeit aufgezeigt [1].

- [1] W. BROCKS: "Cohesive strength and separation energy as characteristic parameters of fracture toughness and their relation to micromechanics. Struct. Integr. Durab. 1 (2005), 233-244.
- [2] W. BROCKS & H. YUAN: "Numerical investigations on the significance of  $J$  for large stable crack growth", Engng. Fract. Mech. 32 (1989), 459-468.
- [3] A.A. GRIFFITH: „The phenomena of rupture and flow in solids“, Phil. Trans. Roy. Soc. London A211 (1920), 163-198.
- [4] A.A. GRIFFITH: "Theory of rupture", Proc. 1st Int. Congr. for Applied Mechanics (S.B. BIEZENO & J.M. BURGERS, eds.), Delft: Waltman Uitgeverij, 1924, 55-63.
- [5] C.E. INGLIS: "Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners", Proc. Inst. Naval Architects, 1913.
- [6] G.R. IRWIN: "Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate," J. Appl. Mech. 24 (1957), 361-364.
- [7] J.R. RICE: "The mechanics of quasi-static crack growth", Proc. 8th U.S. Nat. Congr. of Applied Mechanics (R.E. KELLY, ed.), Western Periodicals, 1979, 191-216.
- [8] C.E. TURNER: "A re-assessment of ductile tearing resistance, Part I: The geometry dependence of J-R curves in fully plastic bending, Part II: Energy dissipation rate and associated R-curves on normalized axes", Fracture Behaviour and Design of Materials and Structures, (D. FIRRAO, ed.), ECF 8, Turin 1990, Vol. II, EMAS, Warley, 1990, 933-949, 951-968.

## Phänomenologische Theorie der zeit- und geschwindigkeitsunabhängigen Plastizität

Die Theorie behandelt das inelastische Verformungsverhalten von Metallen bei „niedrigen“ Temperaturen unter „langsamen“ (quasistatischen) Beanspruchungen, d.h. unter Ausschluss von Zeitabhängigkeit (Kriechen, Relaxation) und Dehnratenabhängigkeit (Hochgeschwindigkeitsbelastungen). Auf der Mikroebene (Kristallgitter) beruhen die Verformungen auf Versetzungsbewegungen. Es werden jedoch nur die makroskopisch beobachteten Erscheinungen (Phänomene) im Rahmen der Kontinuumsmechanik beschrieben.

Da plastische Deformationen nichtlinear sind und von der Belastungsgeschichte abhängen, werden die Stoffgleichungen „inkrementell“<sup>1</sup>, d.h. für eine kleine Belastungs- und Verformungsänderung formuliert:

$$\Delta\sigma_{ij} = \dot{\sigma}_{ij}\Delta t \quad ; \quad \Delta\varepsilon_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}\Delta t . \quad (1)$$

Dabei stellt das „Zeitinkrement“  $\Delta t > 0$  keine physikalische Zeit dar, und damit sind die *Spannungs- und Dehnraten*  $\dot{\sigma}_{ij}, \dot{\varepsilon}_{ij}$  keine realen Geschwindigkeiten. Die hier „Zeit“ genannte positive skalare Größe parametrisiert die Belastungsgeschichte.

### Einachsiger Zugversuch

Für Spannungen unterhalb der Fließgrenze (Streck- oder Dehngrenze) verhält sich das Material linear-elastisch, und es gilt das HOOKEsche Gesetz:

$$\sigma \leq R_0 : \quad \sigma = E\varepsilon .$$

Sobald die Spannung erstmalig diese Grenze übersteigt, wird die Spannungs-Dehnungskurve nichtlinear, und bei Entlastungen treten bleibende (plastische) Dehnungen auf

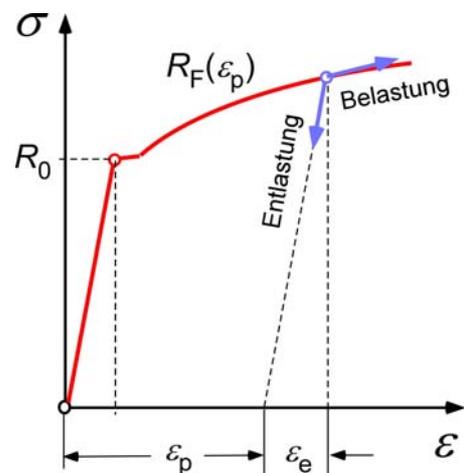
$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon_p .$$

Das Materialverhalten für  $\sigma > R_0$  wird charakterisiert durch

#### ➤ Fließbedingung

$$\sigma \leq R_F(\varepsilon_p) \quad , \quad R_F(0) = R_0 , \quad (2)$$

$R_F(\varepsilon_p)$  heißt (einachsige) *Fließkurve*. Ausgehend von Spannungen  $\sigma < R_F(\varepsilon_p)$  treten nur elastische Verzerrungsänderungen auf, Spannungen  $\sigma > R_F(\varepsilon_p)$  sind unmöglich.



<sup>1</sup> Man spricht deshalb auch von der Theorie der „inkrementellen Plastizität“ im Gegensatz zur „finiten Plastizität“ nach HENCKY [1924], siehe S 8 f

➤ **Hookesches Gesetz**

für die elastischen Verzerrungen bzw. die elastischen Verzerrungsanteile

$$\sigma = E \varepsilon_e = E(\varepsilon - \varepsilon_p) . \quad (3)$$

➤ **Be-/Entlastungsbedingung**

Ausgehend von einer Spannung  $\sigma = R(\varepsilon_p) > 0$  gilt

$$\begin{array}{ll} \dot{\sigma} > 0 & \dot{\varepsilon}_p > 0 \quad \text{Belastung} \\ \dot{\sigma} < 0 & \dot{\varepsilon}_p = 0 \quad \text{Entlastung} \end{array} . \quad (4)$$

## Verallgemeinerung auf mehrachsige Spannungszustände

➤ **additive Zerlegung der Dehnraten**

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (5)$$

Auf dem Wandern von Gitterversetzungen beruhende plastische Verformungen führen nicht zu Volumenänderungen (plastische *Inkompressibilität*)<sup>2</sup>, weshalb

$$\dot{\varepsilon}_{kk}^p = 0 \quad \text{also} \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\varepsilon}_{ij}'^p . \quad (5a)$$

gilt<sup>3</sup>. Die totalen plastischen Verzerrungen sind durch Integration über die Belastungsgeschichte zu ermitteln

$$\varepsilon_{ij}^p = \int_{\tau=0}^t \dot{\varepsilon}_{ij}^p d\tau . \quad (5b)$$

➤ **Fließbedingung**

$$\varphi(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) \leq 0 , \quad (6)$$

wobei  $\varphi(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = 0$  die *Fließfunktion* ist<sup>4</sup>.  $\varphi = 0$  heißt *Fließfläche* im Spannungsraum. Üblicherweise wird  $\varphi$  als konvex angenommen (BETTEN [1979, 1982]), weil ein gerader Belastungsweg zwischen zwei elastischen Zuständen,  $\varphi < 0$ , nicht zu plastischen Verformungen führen sollte. *Konvexität* folgt auch aus DRUCKERS [1950, 1959, 1964] Postulaten für *Werkstoffstabilität*. Für plastisch inkompressibles Material ist Fließen unabhängig vom hydrostatischen Spannungsanteil  $\sigma_h = \frac{1}{3} \sigma_{kk}$ , und damit hat die Fließbedingung die Form

<sup>2</sup> Werkstoffe, die Mikro-Hohlräume enthalten, sind plastisch kompressibel. Hierfür wurde die Plastizität poröser Werkstoffe insbesondere in der Schädigungsmechanik entwickelt.

<sup>3</sup> Jeder Tensor (2. Stufe) lässt sich in einen Deviatoranteil und einen Kugelanteil zerlegen:  $a_{ij} = a'_{ij} + \frac{1}{3} a_{kk} \delta_{ij}$ . Die Spur (1. Invariante) des Verzerrungstensors  $\varepsilon_{kk}$  ist die Volumendilatation.

<sup>4</sup> Im Falle einer assoziierten Fließregel (s.u.) ist  $\varphi$  zugleich das plastische „Potential“. Ausgehend von Spannungszuständen mit  $\varphi(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) < 0$  treten nur elastische Verzerrungsänderungen auf, Spannungszustände mit  $\varphi(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) > 0$  sind unzulässig.

$$\varphi(\sigma'_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) \leq 0 \quad \text{mit} \quad \sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_h \delta_{ij} . \quad (6a)$$

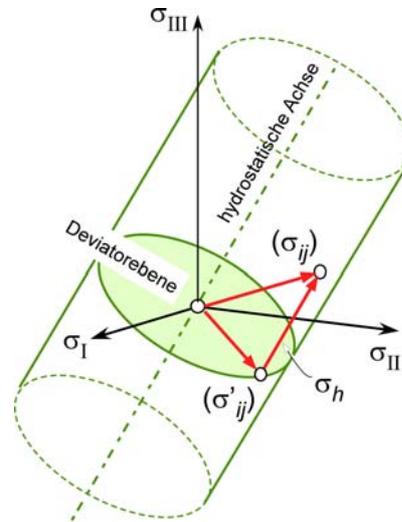
und wird graphisch durch einen (konvexen) *Fließzylinder* im Hauptspannungsraum repräsentiert, dessen Achse in der Raumdiagonale liegt.

### Fließzylinder im Hauptspannungsraum

siehe z.B. BURTH & BROCKS [1992]

hydrostatische Spannung  $\sigma_h = \frac{1}{3} \sigma_{kk}$

Deviatorspannung  $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_h \delta_{ij}$



### ➤ Hookesches Gesetz für elastische Verzerrungsänderungen

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^e = \dot{\varepsilon}'_{ij} + \frac{1}{3} \dot{\varepsilon}_{kk}^e \delta_{ij} = \frac{1}{E} \left[ (1+\nu) \dot{\sigma}'_{ij} - \nu \dot{\sigma}_{kk} \delta_{ij} \right] = \frac{1}{E} \left[ (1+\nu) \dot{\sigma}'_{ij} - (1-2\nu) \dot{\sigma}_h \delta_{ij} \right] . \quad (7)$$

Die Verzerrungsraten sind hier in einen deviatorischen Anteil, die *Gestaltänderungen*, und einen Kugelanteil, die *Volumendilatation*, aufgespalten, die jeweils linear über den *Gleitmodul*  $G = E/2(1+\nu)$  von der Spannungsdeviatorrate bzw. über den *Kompressionsmodul*  $K = E/3(1-2\nu)$  von der hydrostatischen Spannungsrate abhängen.

### ➤ Fließregel: Stoffgesetz für plastische Verzerrungsänderungen

Es wird i.a. eine „assozierte“ *Fließregel* angenommen, bei der die Fließfunktion zugleich *plastisches „Potential“* ist,

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} , \quad (8)$$

wobei  $\dot{\lambda} \geq 0$  der *plastische Multiplikator* ist, der nach dem Prinzip der *Äquivalenz der Dissipationsraten* des mehrachsigen und des einachsigen Zustands aus der einachsigen Fließkurve  $R(\varepsilon_p)$  berechnet wird. Gl. (8) wird auch als *Normalitätsbedingung* oder *Normalitätsregel* bezeichnet und folgt ebenfalls aus DRUCKERS [1950, 1959, 1964] Stabilitätspostulaten.

### ➤ Äquivalenz der Dissipationsraten

für den mehrachsigen und den einachsigen Spannungszustand

$$\dot{W}^p = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} \sigma_{ij} = \bar{\sigma} \dot{\varepsilon}^p , \quad (9)$$

mit  $\bar{\sigma}$  als der (einachsigen) *Vergleichsspannung* und  $\dot{\varepsilon}^p = \dot{\varepsilon}_p$  der zugehörigen (arbeitskonjugierten) *plastischen Vergleichsdehnrate*.

➤ **Be-/Entlastungsbedingung**

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} \begin{cases} > 0 & \text{Belastung} & \dot{\varepsilon}_{ij}^p \neq 0 \\ < 0 & \text{Entlastung} & \dot{\varepsilon}_{ij}^p = 0 \end{cases} \quad (10)$$

➤ **Verfestigungsgesetz**

beschreibt die Änderung der Fließfunktion  $\varphi(\sigma'_{ij}, \varepsilon_{ij}^p)$  mit der Belastungsgeschichte über skalare und tensorielle *innere Variable*,

$$\varphi(\sigma'_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = \tilde{\varphi}(\sigma'_{ij}, \xi_{ij}^{(n)}, \kappa_n) = 0, \quad (11)$$

die speziellen *Evolutionsgesetzen*

$$\begin{aligned} \dot{\kappa}_n &= f(\sigma_{kl}, \xi_{kl}^{(n)}, \kappa_n, \varepsilon_{kl}^p, \dot{\varepsilon}_{kl}^p, \bar{\varepsilon}^p, \dot{\bar{\varepsilon}}^p) \\ \dot{\xi}_{ij}^{(n)} &= g_{ij}(\sigma_{kl}, \xi_{kl}^{(n)}, \kappa_n, \varepsilon_{kl}^p, \dot{\varepsilon}_{kl}^p, \bar{\varepsilon}^p, \dot{\bar{\varepsilon}}^p) \end{aligned} \quad (11a)$$

folgen. Meist ist die Zahl der inneren Variablen auf zwei beschränkt, nämlich eine *akkumulierte plastische Vergleichsdehnung*  $\bar{\varepsilon}^p = \int_0^t \dot{\bar{\varepsilon}}^p d\tau$  bzw. das arbeitskonjugierte Spannungsmaß  $\kappa(\bar{\varepsilon}^p)$  und der als deviatorisch angenommene *Rückspannungstensor*  $\xi_{ij} = \xi'_{ij}$ . Nimmt man die Fließbedingung in der Form<sup>5</sup>

$$\tilde{\varphi}(\sigma'_{ij}, \xi_{ij}, \kappa) = \bar{\varphi}(s'_{ij}) - \kappa^2(\bar{\varepsilon}^p) = \bar{s}^2 - \kappa^2(\bar{\varepsilon}^p) = 0 \quad (11b)$$

mit dem „effektiven“ *Spannungstensor*  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \xi_{ij}$  und einer einachsigen „effektiven“ Spannung  $\bar{s} = \sqrt{\bar{\varphi}(s_{ij})}$  an, lassen sich skalare und tensorielle innere Variable wie folgt interpretieren:

- $\kappa(\bar{\varepsilon}^p)$  beschreibt die Zunahme des Radius des Fließzylinders, die *isotrope Verfestigung*, und
- $\xi_{ij}$  eine Parallelverschiebung der Zylinderachse, die *kinematische Verfestigung*.

Während  $\kappa(\bar{\varepsilon}^p)$  experimentell aus dem einachsigen Zugversuch bestimmt werden kann, erfordert  $\xi_{ij}$  ein Evolutionsgesetz nach Gl. (11a). Zwei klassische Ansätze hierfür,  $\dot{\xi}_{ij} = c(\bar{\varepsilon}^p) \dot{\varepsilon}_{ij}^p$  bzw.  $\dot{\xi}_{ij} = c(\bar{\varepsilon}^p)(\sigma_{ij} - \xi_{ij})$ , gehen auf PRAGER [1955] bzw. ZIEGLER [1959] zurück. Neuere und kompliziertere Evolutionsgesetze haben CHABOCHE & ROUSSELIER [1983] zur Beschreibung komplexer Verfestigungsphänomene und Belastungsgeschichten eingeführt (z.B. BROCKS & OLSCHESKI [1989]).

<sup>5</sup> Diese Form der Darstellung ist nicht immer möglich, wie die TRESCASche Fließbedingung Gl. (13a) zeigt.

## Isotropes Fließen: Weitere vereinfachende Annahmen und Sonderfälle

### ➤ Isotrope Fließfläche

Die Darstellung der Fließfläche darf nicht von der Wahl des Koordinatensystems abhängen, d.h. nur von der 2. und der 3. Invarianten des Deviators<sup>6</sup> der effektiven Spannungen (PRAGER [1945], DRUCKER [1959], BETTEN [1976, 1985]). Kinematische Verfestigung ist weiterhin möglich.

### ➤ Rein isotrope Verfestigung

Kinematische Verfestigung wird ausgeschlossen, also  $\xi_{ij} = 0$ . Dann ist

$$\bar{s}^2 = \bar{\sigma}^2 = \bar{\varphi}(J_2(\sigma'_{ij}), J_3(\sigma'_{ij})), \quad (12a)$$

die Vergleichsspannung mit

$$\begin{aligned} J_2(\sigma'_{ij}) &= \frac{1}{2}(\sigma'_{ik}\sigma'_{ki}) = \frac{1}{6}\left[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2\right] + \sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{xz}^2 \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_1'^2 + \sigma_2'^2 + \sigma_3'^2) = \frac{1}{6}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right], \end{aligned} \quad (12b)$$

$$J_3(\sigma'_{ij}) = \det(\sigma'_{ij}) = \frac{1}{3}\sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki} = \sigma_1'\sigma_2'\sigma_3'$$

### ➤ Einfluss der 3. Invarianten

Eine Fließfläche der Form  $\bar{\varphi} = J_2(\sigma'_{ij}) - \kappa^2 = 0$  ist rotationssymmetrisch und wird durch Kreiszyylinder im Spannungsraum bzw. Kugeln im Deviatorraum repräsentiert, siehe die weiter unten beschriebene Fließbedingung nach VON MISES [1913, 1928]. Mit  $J_3$  werden Abweichungen von der Rotationssymmetrie beschrieben. Es gibt eine Reihe von Fließbedingungen unter Einschluss der dritten Invarianten: BETTEN [1976, 1985], ISMAR & MAHRENHOLTZ [1979, 1982], MAHRENHOLTZ & ISMAR [1981], von denen die TRESCAsche Fließbedingung die bekannteste ist. Fließbedingungen der Form  $(J_2^3 + cJ_3^2)$  beschreiben ein symmetrisches Fließverhalten unter Zug und Druck (DRUCKER [1949, 1959]), während Fließbedingungen der Form  $(J_2^{3/2} + cJ_3)$  auf ein asymmetrisches Fließverhalten (BETTEN [1979, 1985], CAZACU & BARLAT [2004]) führen, da  $J_3$  eine ungerade, kubische Funktion der Spannungen ist. In beiden Fällen schränkt die Konvexitätsbedingung zulässige Wertebereiche für die Konstante  $c$  ein (PRAGER [1945], DRUCKER [1959], BETTEN [1979, 1985]).

### ➤ Fließbedingung nach TRESCA:

TRESCAs Fließbedingung ist auch als *Hypothese der maximalen Schubspannungen* bekannt. Zur Vereinfachung wird sie üblicherweise mit Hilfe der Hauptspannungen  $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_\alpha \mathbf{n}_\alpha$  ( $\alpha = \text{I, II, III}$ )<sup>7</sup> als stückweise lineare Beziehung formuliert, die als das TRESCAsche Sechseck bekannt ist<sup>8</sup>.

<sup>6</sup> Die erste Invariante des Spannungsdeviators verschwindet definitionsgemäß.

<sup>7</sup>  $\mathbf{n}_\alpha$  ( $\alpha = \text{I, II, III}$ ) sind die Hauptachsen.

<sup>8</sup> Werden die Hauptspannungen als  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  angeordnet, ist nur  $\varphi_1$  für die Fließbedingung relevant. Zur Berechnung der plastischen Verzerrungsrate  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \varepsilon_\alpha \mathbf{n}_\alpha$ , in den Ecken

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III} : \varphi_1 = \sigma_I - \sigma_{III} - 2\tau_F = 0 \\ \sigma_{II} \geq \sigma_I \geq \sigma_{III} : \varphi_2 = \sigma_{II} - \sigma_{III} - 2\tau_F = 0 \\ \sigma_{II} \geq \sigma_{III} \geq \sigma_I : \varphi_3 = \sigma_{II} - \sigma_I - 2\tau_F = 0 \\ \sigma_{III} \geq \sigma_{II} \geq \sigma_I : \varphi_4 = \sigma_{III} - \sigma_I - 2\tau_F = 0 \\ \sigma_{III} \geq \sigma_I \geq \sigma_{II} : \varphi_5 = \sigma_{III} - \sigma_{II} - 2\tau_F = 0 \\ \sigma_I \geq \sigma_{III} \geq \sigma_{II} : \varphi_6 = \sigma_I - \sigma_{II} - 2\tau_F = 0 \end{array} \right\}, \quad (13)$$

Die hier eingeführte *Schubfließgrenze* hängt mit der einachsigen Zugfließgrenze über

$$\tau_F(\varepsilon_p) = \frac{1}{2} R_F(\varepsilon_p) \quad (13a)$$

zusammen. Die zugehörige *Vergleichsspannung* nach TRESCA ist

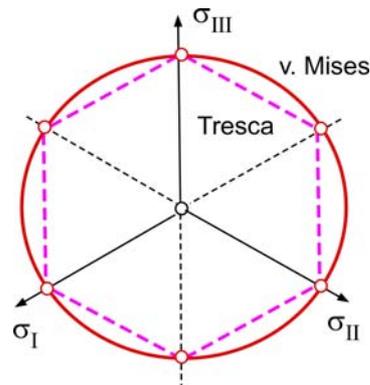
$$\bar{\sigma} = \max_{\alpha \neq \beta} |\sigma_\alpha - \sigma_\beta| = \max_{\alpha \neq \beta} \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2} \quad (13b)$$

Beachtet man, dass das Produkt  $\varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot \varphi_3 \cdot \varphi_4 \cdot \varphi_5 \cdot \varphi_6 = 0$  ist, kann die TRESCASche Fließbedingung auch in der geschlossenen Form

$$4J_2^3 - 27J_3^2 - 9R_F^2 J_2^2 + 6R_F^4 J_2 - R_F^6 = 0, \quad (13c)$$

geschrieben werden, woraus erkennbar wird, dass sie auch die 3. Invariante enthält.

Fließbedingungen nach TRESCA und VON MISES in der Deviatorebene



Da die Fließfunktion nur stückweise definiert ist, gilt dies auch für die **assoziierte Fließregel**, z. B. für  $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$ :

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\varepsilon}_\alpha^p \mathbf{n}_\alpha = \dot{\lambda} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \sigma_\alpha} \mathbf{n}_\alpha = \dot{\lambda} (\mathbf{n}_I - \mathbf{n}_{III}), \quad (14)$$

und in einer Ecke  $\sigma_I = \sigma_{II} > \sigma_{III}$ :

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda}_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \sigma_\alpha} \mathbf{n}_\alpha + \dot{\lambda}_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \sigma_\alpha} \mathbf{n}_\alpha = \dot{\lambda}_1 \mathbf{n}_I + \dot{\lambda}_2 \mathbf{n}_{II} - (\dot{\lambda}_1 + \dot{\lambda}_2) \mathbf{n}_{III}. \quad (14a)$$

Für isotropes Verhalten kann man  $\dot{\lambda}_1 = \dot{\lambda}_2$  annehmen, so dass daraus

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} (\mathbf{n}_I + \mathbf{n}_{II} - 2\mathbf{n}_{III}) \quad (14b)$$

des Sechsecks,  $\sigma_I = \sigma_{II} > \sigma_{III}$  oder  $\sigma_I > \sigma_{II} = \sigma_{III}$  müssen auch  $\varphi_2$  oder  $\varphi_6$  ausgewertet werden, siehe Gl. (14a).

folgt. Die Inkompressibilitätsbedingung  $\sum_{\alpha=1}^{\text{III}} \dot{\varepsilon}_{\alpha}^p = 0$  ist erfüllt.

Aus der **Äquivalenz der Dissipationsraten** für  $\sigma_{\text{I}} > \sigma_{\text{II}} > \sigma_{\text{III}}$

$$\dot{W}^p = \sigma_{\alpha} \dot{\varepsilon}_{\alpha}^p = \dot{\lambda} (\sigma_{\text{I}} - \sigma_{\text{III}}) = \bar{\sigma} \dot{\varepsilon}^p \quad (14c)$$

kann der plastische Multiplikator bestimmt werden. In einem einachsigen Zugversuch ist  $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{\text{I}} \mathbf{n}_{\text{I}}$ ,  $\sigma_{\text{I}} > \sigma_{\text{II}} = \sigma_{\text{III}} = 0$ , also

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\varepsilon}_{\alpha}^p \mathbf{n}_{\alpha} = \dot{\lambda} \left( \frac{\partial \varphi_{\text{I}}}{\partial \sigma_{\alpha}} \mathbf{n}_{\alpha} + \frac{\partial \varphi_{\text{II}}}{\partial \sigma_{\alpha}} \mathbf{n}_{\alpha} \right) = \dot{\lambda} (2\mathbf{n}_{\text{I}} - \mathbf{n}_{\text{II}} - \mathbf{n}_{\text{III}}),$$

und  $\dot{W}^p = \sigma_{\alpha} \dot{\varepsilon}_{\alpha}^p = 2\dot{\lambda} \sigma_{\text{I}} = \bar{\sigma} \dot{\varepsilon}^p = R_{\text{F}} \dot{\varepsilon}^p$ ,

woraus  $\dot{\lambda} = \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_p$  resultiert und damit

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\varepsilon}_p \left( \mathbf{n}_{\text{I}} - \frac{1}{2} \mathbf{n}_{\text{II}} - \frac{1}{2} \mathbf{n}_{\text{III}} \right). \quad (14d)$$

Neben den Unstetigkeiten der TRESCASchen Fließbedingung in den Ecken ist die aufwendige Formulierung der Fließregel ein Grund für die bevorzugte Anwendung der Fließbedingung nach VON MISES [1913, 1928] insbesondere in numerischen Anwendungen. Oft wird die TRESCASche Bedingung unter Verletzung des Prinzips der Äquivalenz der Dissipationsraten auch mit der zur MISES-Bedingung assoziierten Fließregel kombiniert.

► **Theorie nach VON MISES, PRANDTL und REUB:**

Die (inkrementelle) Theorie besteht aus der Fließbedingung nach VON MISES [1913, 1928] und den Formänderungsgleichungen nach PRANDTL [1924] und REUB [1930].

Die **Fließbedingung** lautet

$$3J_2 - R_{\text{F}}^2(\varepsilon_p) = \bar{\sigma}^2 - R_{\text{F}}^2(\varepsilon_p) = 0 \quad (15)$$

mit der *Vergleichsspannung* nach VON MISES

$$\bar{\sigma} = \sqrt{3J_2} = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}}, \quad (15a)$$

$$\text{und } R_{\text{F}}(\varepsilon_p) = \sqrt{3} \tau_{\text{F}}. \quad (15b)$$

Da  $J_3$  unberücksichtigt bleibt, wird die auf der MISESschen Fließbedingung beruhende Fließtheorie als  $J_2$ -Theorie bezeichnet.

Die **assoziierte Fließregel** erhält man aus Gl. (12b) zu

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \sigma'_{ij}. \quad (16)$$

Die **Äquivalenz der Dissipationsraten** Gl. (9) liefert die Definition einer arbeitskonjugierten *plastischen Vergleichsdehnrate*<sup>10</sup>,

<sup>9</sup> Man beachte den Unterschied zu Gl. (13a).

<sup>10</sup> Diese Definition gilt ebenso wie die Definition der Vergleichsspannung in Gl. (15a) nur im Zusammenhang mit der MISESschen Fließbedingung!

$$\dot{\varepsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p}, \quad (16a)$$

und mit der einachsigen Fließkurve des Zugversuchs kann der plastische Multiplikator  $\dot{\lambda}$  berechnet werden, so dass aus Gl. (16)

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{3}{2} \frac{\dot{\varepsilon}^p}{R_F} \sigma'_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\sigma}}{T_p R_F} \sigma'_{ij} \quad (16b)$$

mit  $T_p(\varepsilon_p) = \frac{dR_F}{d\varepsilon_p}$  als dem *plastischen Tangentenmodul* folgt.

Die **Be-/Entlastungsbedingung** lautet schließlich

$$\sigma'_{ij} \dot{\sigma}_{ij} \begin{cases} > 0 & \text{Belastung} & \dot{\varepsilon}_{ij}^p \neq 0 \\ < 0 & \text{Entlastung} & \dot{\varepsilon}_{ij}^p = 0 \end{cases} \quad (17)$$

Zusammen mit den Gln. (5) und (7) erhält man die Gleichungen von PRANDTL [1924] und REUB [1930] für die totalen Dehnraten

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \frac{1}{3} \dot{\varepsilon}_{kk}^e \delta_{ij} + \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{1}{2G} \dot{\sigma}'_{ij} + \frac{1}{3K} \dot{\sigma}_h \delta_{ij} + \frac{3}{2T_p} \frac{\dot{\sigma}}{R_F} \sigma'_{ij}. \quad (18)$$

Die Volumenänderung  $\dot{\varepsilon}_{kk} = \dot{\varepsilon}_{kk}^e$  ist rein elastisch, die Gestaltänderung  $\dot{\varepsilon}'_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p$  besteht aus einem elastischen und einen plastischen Anteil.

## Die „Deformationstheorie“ der Plastizität

Im Unterschied zu den inkrementellen Formänderungsgesetzen von PRANDTL [1924] und REUB [1930] hat HENCKY [1924] ein finites Formänderungsgesetz für nichtlineares Materialverhalten aufgestellt, das noch heute insbesondere in der elastisch-plastischen Bruchmechanik in Verbindung mit dem Verfestigungspotenzgesetz von RAMBERG & OSGOOD [1945] viel verwendet wird. Tatsächlich beschreibt es gar kein plastisches sondern lediglich nichtlinear-elastisches (hyperelastisches) Material, hat aber den Vorteil, mathematisch einfacher handhabbar zu sein und in einigen Fällen sogar geschlossene Lösungen von Randwertproblemen zu ermöglichen (z.B. die HRR-Gleichungen für Spannungs- und Verzerrungsfelder an Risspitzen). Unter der sehr stark einschränkenden Annahme „radialer“ (proportionaler) Belastung,  $\sigma_{ij}(t) = \sigma(t) \sigma_{ij}^0$ , in jedem Punkt des Kontinuums<sup>11</sup> kann das finite HENCKY-Gesetz auch durch Integration der inkrementellen PRANDTL-REUB-Gleichungen hergeleitet werden.

Es gelten auch hier die Voraussetzungen über Isotropie und Inkompressibilität des Werkstoffs. Anstelle der additiven Zerlegung der Dehnraten nach Gl. (5) wird eine Zerlegung der Gesamtverzerrungen in einen elastischen und einen plastischen Anteil angenommen

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p, \quad (19)$$

und anstelle der Fließregel Gl. (16) werden die plastischen Verzerrungen aus

<sup>11</sup> Hierdurch sind lokale Spannungsumlagerungen jeglicher Art und insbesondere Entlastungen ausgeschlossen.

$$\varepsilon_{ij}^p = \lambda \sigma'_{ij} . \quad (20)$$

berechnet und  $\lambda$  über die einachsige Zugfließkurve in formaler Analogie zu Gl. (16b) bestimmt

$$\lambda = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_p}{R_F} = \frac{3}{2S_p} \quad (20a)$$

mit  $S_p(\varepsilon_p) = R_F/\varepsilon_p$  als dem *plastischen Sekantenmodul*. Da nur Belastungen zulässig sind, muss immer  $\bar{\sigma} = R_F$  erfüllt sein. Die totalen Verzerrungen sind dann

$$\varepsilon_{ij} = \left( \frac{1}{2G} + \frac{3}{2S_p} \right) \sigma'_{ij} + \frac{1}{3K} \sigma_h \delta_{ij} . \quad (21)$$

Aus der Darstellung des plastischen Anteils in Haupttrichtungen

$$\varepsilon_1^p = \frac{1}{S_p} \left[ \sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_{II} + \sigma_{III}) \right] \quad (21a)$$

erkennt man mit der sogen. plastischen Querkontraktionszahl  $\nu_p = \frac{1}{2}$  sofort die formale Analogie zum HOOKESchen Gesetz

$$\varepsilon_1^e = \frac{1}{E} \left[ \sigma_1 - \nu(\sigma_{II} + \sigma_{III}) \right] . \quad (21b)$$

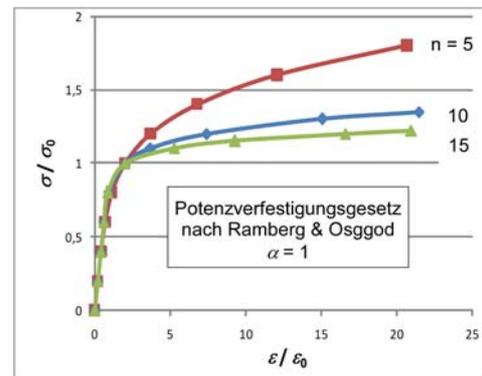
Setzt man insbesondere entsprechend dem Potenzverfestigungsgesetz von RAMBERG & OSGOOD [1945]

$$S_p(\varepsilon_p) = \frac{\sigma_0}{\alpha \varepsilon_0} \left( \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0} \right)^{1-n} \quad (22)$$

mit den materialspezifischen Verfestigungskennwerten  $\alpha > 0$  und  $n \geq 1$  und den Normierungsgrößen  $\sigma_0$  und  $\varepsilon_0$ , so nimmt der plastische Anteil des HENCKY-Gesetzes die Form

$$\frac{\varepsilon_{ij}^p}{\varepsilon_0} = \frac{3}{2} \alpha \left( \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0} \right)^{n-1} \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_0} \quad (23)$$

an. Diese Gleichung wird auch als dreidimensionale Verallgemeinerung des RAMBERG-OSGOOD-Gesetzes bezeichnet, wobei üblicherweise  $\sigma_0 = R_0$  und  $\varepsilon_0 = \sigma_0/E$  gesetzt wird. Da dieses Gesetz von Anfang an nichtlinear ist, treten „plastische“ Verzerrungen schon bei beliebig kleinen Belastungen auf, und es gibt keinen definierten Übergang von elastischem zu plastischem Materialverhalten, also auch keine Fließbedingung.



## Elastizitätskonstanten

	$\lambda =$	$\mu =$	$E =$	$\nu =$	$K =$	$G =$
$\lambda, \mu$	$\lambda$	$\mu$	$\frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$	$\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$	$\lambda + \frac{2}{3}\mu$	$\mu$
$G, K$	$K - \frac{2}{3}G$	$G$	$\frac{9K \cdot G}{3K + G}$	$\frac{3K - 2G}{6K + 2G}$	$K$	$G$
$E, \nu$	$\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{E}{2(1+\nu)}$	$E$	$\nu$	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$	$\frac{E}{2(1+\nu)}$

$\lambda, \mu$	LAMÉ's coefficients	LAMÉsche Konstanten
$G$	shear modulus	Schubmodul
$K$	bulk modulus	Kompressionsmodul
$E$	YOUNG's modulus	Elastizitätsmodul
$\nu$	POISSON's ratio	Querkontraktionszahl

## Literatur

- W. Brocks, J. Olschewski [1989]:** Application of internal time and internal variable theories of plasticity to complex load histories, Arch. Mech. 41, 133-155.
- K. Burth, W. Brocks [1992]:** Plastizität - Grundlagen und Anwendungen für Ingenieure. Vieweg, Braunschweig.
- J. Betten [1976]:** Ein Beitrag zur Invariantentheorie in der Plastomechanik inkompressibler isotroper Werkstoffe. Der Stahlbau 5.
- J. Betten [1979]:** Über die Konvexität von Fließkörpern isotroper und anisotroper Stoffe. Acta Mech. 32, 233-247.
- J. Betten [1985]:** Elastizitäts- und Plastizitätslehre. Vieweg, Braunschweig.
- O. Cazacu, F. Barlat [2004]:** A criterion for description of anisotropy and yield differential effects in pressure insensitive metals. Int. J. Plasticity 20, 2027-2045.
- J.L. Chaboche [1989]:** Constitutive equations for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity, Int. J. Plasticity 5 (1989), 247-302.
- J.L. Chaboche, G. Rousselier [1983]:** On the plastic and viscoplastic constitutive equations - Part I: Rules developed with internal variables. J. Press. Vess. Techn. 105, 153-158.
- D.C. Drucker [1949]:** Relation of experiments to mathematical theories of plasticity. J. Appl. Mech. 16, 349-357.
- D.C. Drucker [1950]:** Some implications of work hardening and ideal plasticity. Quart. Appl. Math. 7 (1950). 411-418.

- D.C. Drucker [1959]:** A definition of stable inelastic material. Trans. ASME, J. Appl. Mech.. 101-106.
- D.C. Drucker [1964]:** On the postulate of stability of materials in the mechanics of continua. J. Mécanique 3, 235-249.
- H. Hencky [1924]:** Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen. ZAMM 4, 323-334.
- H. Ismar, O. Mahrenholtz [1979]:** Technische Plastomechanik, Vieweg, Braunschweig.
- H. Ismar, O. Mahrenholtz [1982]:** Über Beanspruchungshypothesen für metallische Werkstoffe. Konstruktion 34.
- O. Mahrenholtz, H. Ismar [1981]:** Zum elastisch-plastischen Übergangsverhalten metallischer Werkstoffe. Ingenieurarchiv 50.
- R. von Mises [1913]:** Die Mechanik der festen Körper im plastisch deformablen Zustand. Nachr. Königl. Ges. Wiss. Göttingen, 582-592.
- R. von Mises [1928]:** Mechanik der plastischen Formänderung von Metallen. ZAMM 8, 161-185
- W. Prager [1945]:** Strain hardening under combined stresses. J. Appl. Phys. 16, 837-840.
- W. Prager [1955]:** The theory of plasticity: A survey of recent achievements. Proc. Int. Mech. Eng. 169, 41-57
- W. Ramberg, W.R. Osgood [1945]:** Description of stress strain curves by three parameters. NACA Technical Note No 902.
- K.A. Reckling [1967]:** Plastizität und ihre Anwendung auf Festigkeitsprobleme. Springer-Verlag, Berlin.
- A. Reuß [1930]:** Berücksichtigung der elastischen Formänderung in der Plastizitätstheorie. ZAMM 10, 266-274
- H. Ziegler [1959]:** A modification of Prager's hardening rule. Quart. Appl. Math. 17, 55.

## Erweiterung der LEBM für kleine plastische Zonen (small scale yielding, SSY)

### 1. Plastizierung an Spannungskonzentratoren

Die nach der Elastizitätstheorie berechneten Spannungen am Kerbgrund eines gekerbten Bauteils können größer als die Fließgrenze sein, so dass unter der gegebenen Belastung eine lokale Plastizierung erfolgt. An einer Risspitze wird sogar in jedem Falle die Fließgrenze (rechnerisch) überschritten, da der Spannungsverlauf dort eine Singularitätsstelle hat. Die tatsächliche Spannungsverteilung in der so entstehenden (als klein gegenüber dem Ligamentquerschnitt angenommenen) plastischen Zone hängt von der Mehrachsigkeit des Spannungszustandes ab.

### 2. Der äquivalente elastische Riss (Modus I)

Auf IRWIN [1964] geht die Idee zurück, aus der Spannungsverteilung am Riss im elastischen Kontinuum näherungsweise die *Größe der plastischen Zone* im Ligament zu berechnen und eine *fiktive Rissverlängerung* mit einem modifizierten "effektiven" Spannungsintensitätsfaktor einzuführen. Dieser Gedanke wird im Folgenden an den beiden Grenzfällen ESZ und EVZ näher ausgeführt.

a) Ebener Spannungszustand (ESZ, plane stress)  $\sigma_3 = \sigma_{zz} = 0$

$$\sigma_1 = \sigma_{xx} = \sigma_2 = \sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}. \quad (1)$$

Wegen  $\sigma_1 = \sigma_2$  und  $\sigma_3 = 0$  liefern die Fließbedingungen von MISES und TRESCA  $\sigma_{yy}(r) = R_0$  im Bereich  $0 \leq r \leq r_p$ , wenn ideal-plastisches (nicht verfestigendes) Material angenommen wird. Daraus folgt insbesondere die Stelle  $r = r_p$ , in dem die elastisch berechneten Spannungen die Fließgrenze erreichen

$$r_p = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{R_0} \right)^2. \quad (2)$$

b) Ebener Verzerrungszustand (EVZ, plane strain)  $\varepsilon_3 = \varepsilon_{zz} = 0$

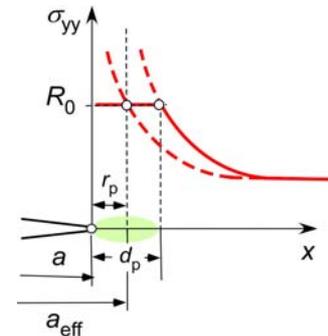
Es gilt wieder die Gl. (1) und außerdem für die dritte Hauptspannung  $\sigma_3 = \nu(\sigma_1 + \sigma_2)$ . Damit hat man als Fließbedingung nach MISES und TRESCA  $(1 - 2\nu)\sigma_{yy}(r) = R_F$  im Bereich  $0 \leq r \leq r_p$  und erhält anstelle von Gl. (2)

$$r_p = \frac{(1 - 2\nu)^2}{2\pi} \left( \frac{K_I}{R_0} \right)^2. \quad (3)$$

Der Unterschied zwischen ESZ und EVZ - also die *Mehrachsigkeit des Spannungszustandes* - wirkt sich in der Größe von  $r_p$  aus; die folgenden Überlegungen sind dagegen unabhängig vom Spannungszustand.

Die Resultierende der singulären Spannungsverteilung über den Bereich  $[0, r_p]$ , in dem die Fließgrenze erreicht wird, ist

$$\int_0^{r_p} \sigma_{yy}(r) dr = \int_0^{r_p} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} dr = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{r_p} = 2R_0 r_p. \quad (4)$$



d.h. die durch die Fließbedingung "abgeschnittene" Fläche unter der singulären Spannungsverteilung ist gerade gleich  $R_0 r_p$ . Damit kann man die Folgerung ziehen: Wenn statt eines Risses der Länge  $a$  ein fiktiver Riss der "effektiven" Länge

$$a_{\text{eff}} = a + r_p. \quad (5)$$

eingeführt und mit den Methoden der LEBM untersucht wird, dann ist dessen effektive Spannungsintensität näherungsweise für kleine plastische Zonen  $r_p \ll a$  durch

$$K_{\text{Ieff}} = \sqrt{\frac{a + r_p}{a}} K_I. \quad (6)$$

bestimmt. Die Spannungsverteilung an der fiktiven Risspitze ist wieder durch Gl. (1) mit  $K_I \rightarrow K_{\text{Ieff}}$  gegeben; sie erreicht an der Stelle  $r^* = r_p$  vor der fiktiven Risspitze die Fließgrenze  $R_0$ . Damit beträgt die Ausdehnung der plastischen Zone im Ligament insgesamt (d.h. gemessen von der realen Risspitze aus)

$$d_p = 2r_p = \frac{\beta}{2\pi} \left( \frac{K_I}{R_0} \right)^2 \quad (7a)$$

$$\text{mit } \beta = \begin{cases} 1 & \text{für ESZ} \\ (1-2\nu)^2 & \text{für EVZ} \end{cases} \quad (7b)$$

Aus dem effektiven Spannungsintensitätsfaktor kann mit Hilfe der im Elastischen gültigen Beziehung zur Energiefreisetzungsrate auch ein Näherungswert für das  $J$ -Integral bei Modus I und kleinen plastischen Zonen berechnet werden:

$$J_{\text{ssy}} = \mathcal{G}_{\text{ssy}} = \frac{K_{\text{Ieff}}^2}{E'} \quad (8a)$$

$$\text{mit } E' = \begin{cases} E & \text{für ESZ} \\ \frac{E}{1-\nu^2} & \text{für EVZ} \end{cases} \quad (8b)$$

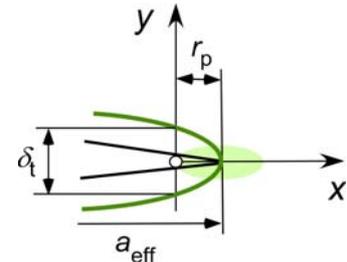
### 3. Rissspitzenöffnung (crack tip opening displacement, CTOD)

Mit Hilfe des IRWINSchen Konzepts der effektiven Risslänge kann noch eine weitere Größe bestimmt werden, die zu einem wichtigen bruchmechanischen Parameter für plastizierende Werkstoffe geworden ist: die *Rissspitzenöffnung*  $\delta$ .

Die elastische Rissöffnung für reinen Modus I ist mit  $\vartheta = \pi$  durch

$$u_y(r, \pi) = 4 \frac{K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{cases} 1 & \text{für ESZ} \\ 1 - \nu^2 & \text{für EVZ} \end{cases} \quad (9)$$

gegeben. Nach WELLS [1961] wird nun eine Rissspitzenöffnung  $\delta_t$  unter der Vorstellung berechnet, dass die fiktive Rissspitze im Mittelpunkt der plastischen Zone liegt und die elastische Öffnung des Risses der effektiven Länge  $(a + r_p)$  an der Stelle der realen Rissspitze das CTOD darstellt,



$$\delta_t = 2u_y(r_p, \pi). \quad (10)$$

Einsetzen der IRWINSchen Abschätzungen für  $r_p$  nach Gl. (2) bzw. (3) liefert dann

$$\delta_t = \frac{4}{\pi} \frac{K_I^2}{ER_0} \begin{cases} 1 & \text{für ESZ} \\ (1 - \nu^2)(1 - 2\nu) & \text{für EVZ} \end{cases} \quad (11)$$

Die Rissspitzenöffnung ist neben dem  $J$ -Integral ein bruchmechanischer Beanspruchungsparameter in der elastisch-plastischen Bruchmechanik geworden<sup>1</sup>. Diesem sogen. CTOD-Konzept liegt die physikalische Vorstellung zugrunde, dass bei duktilem Material eine kritische plastische Verformung am Riss für die Einleitung von Rissausbreitung (*Initiierung*) maßgebend ist. In neuerer Zeit hat das CTOD-Kriterium insbesondere im Flugzeugbau für dünnwandige Strukturen (Scheiben, Schalen) Bedeutung gewonnen (NEWMAN et al. [2003], SCHWALBE et al. [2005]), bei denen die Anwendung des  $J$ -Integrals an Grenzen gestoßen ist.

#### 4. Gestalt der plastischen Zone

Im Abschnitt 2. wurde lediglich die Ausdehnung  $d_p = 2 r_p$  der plastischen Zone im Ligament abgeschätzt. Da die gesamte Spannungsverteilung im Ligament nach der asymptotischen Näherung in Abhängigkeit von  $r$  und  $\vartheta$  bekannt ist, kann mit Hilfe der MISESSchen Fließbedingung auch die zweidimensionale Gestalt der plastischen Zone (unter SSY-Bedingung) ermittelt werden. Die Vergleichsspannung nach VON MISES ist durch

$$\bar{\sigma}_{vM}^2 = \frac{1}{2} \left[ (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 \right] + 3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2). \quad (12)$$

definiert. Aus der Bedingung

$$\bar{\sigma}_{vM} \Big|_{r_p} = R_0. \quad (13)$$

folgt durch Einsetzen der Winkelfunktionen  $f_{ij}(\vartheta)$  der asymptotischen Spannungsverteilung  $\sigma_{ij}(r, \vartheta)$  und

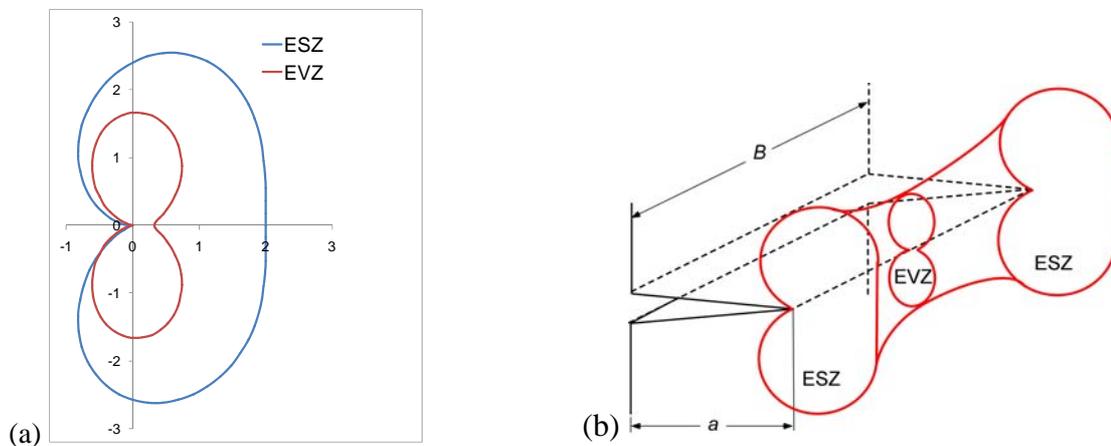
<sup>1</sup> Es gibt in der elastisch-plastischen Bruchmechanik viele verschiedene Definitionen der Rissspitzenöffnung (SCHWALBE [1995], ASTM E 2472). Hier wird die für kleine plastische Zonen übliche Definition vorgestellt.

$$\sigma_{zz} = \begin{cases} 0 & \text{für ESZ} \\ \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) & \text{für EVZ} \end{cases} \quad (14)$$

die Grenzen  $d_p(\vartheta)$  des plastischen Bereichs für die beiden Fälle des ESZ und des EVZ (z. B. HAHN [1976], KUNA [2010]).

$$d_p(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{R_0} \right)^2 \begin{cases} 1 + \frac{3}{2} \sin^2 \vartheta + \cos \vartheta & \text{für ESZ} \\ \frac{3}{2} \sin^2 \vartheta + (1 - 2\nu)^2 (1 + \cos \vartheta) & \text{für EVZ} \end{cases} \quad (15)$$

In einer Probe oder einem Bauteil endlicher Dicke ändern sich Größe und Form der plastischen Zone längs der Rissfront. Unter der Annahme, dass an der Probenoberfläche der ESZ und in der Probenmitte der EVZ angenähert wird, haben HAHN & ROSENFELD [1965] das *Hundeknochenmodell* für die dreidimensionale Form der plastischen Zone eingeführt.



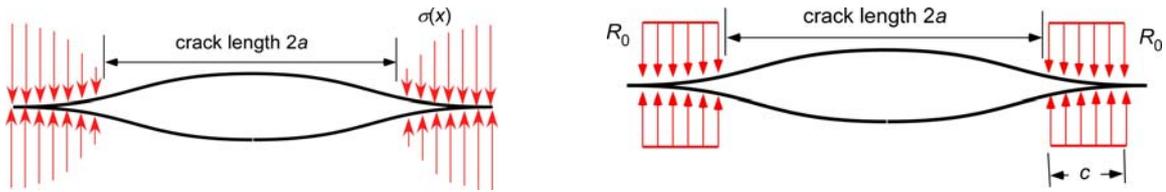
Form der plastischen Zone am Riss für ein  $K$ -dominiertes Spannungsfeld:

- (a) ESZ und EVZ, x- und y-Achse entsprechend Gl. (15) auf  $(1/2\pi)(K_I/R_0)^2$  normiert;
- (b) das *Hundeknochenmodell* nach HAHN & ROSENFELD [1965]

### 5. Das BARENBLATT-Modell

In der linearen Elastizitätstheorie führt die Existenz scharfer Risse zu Singularitäten in den Spannungen und Verzerrungen. Die GRIFFITHSche Spröbruchtheorie umgeht diese Schwierigkeit durch eine energetische Betrachtungsweise. Von BARENBLATT [1959] stammt der physikalisch motivierte Vorschlag, durch Einführung von sogen. *Kohäsivzonen* an den Rissenden das Auftreten unendlich großer Spannungen zu vermeiden (siehe Bild links). Dabei geht er davon aus, dass ein Spröbruch dann eintritt, wenn die Spannungen in einem kleinen Bereich vor der Risspitze, der *Prozesszone*, die dort aufgrund der atomaren bzw. molekularen Anziehung wirkenden *Kohäsivkräfte* übersteigen.

Die Schwierigkeit bei der Anwendung dieses Modells besteht darin, dass die Verteilung der Kohäsionsspannungen  $\sigma(x)$  an den Rissenden nicht bekannt ist.



Die Modelle von BARENBLATT [1959] (links) und DUGDALE [1960] (rechts) zur Beseitigung der Singularität an der Risspitze in der LEBM

Moderne Adaptionen des BARENBLATT-Konzeptes verwenden *Kohäsivmodelle*, bei denen die Kohäsionsspannungen über ein Kohäsivgesetz  $\sigma(\delta)$  von der Separation  $\delta$  der in der Prozesszone entstehenden neuen Rissflächen abhängt (z. B. BROCKS et al. [2003], BROCKS [2005]).

### 6. Das DUGDALE-Modell

Dem BARENBLATTschen Modell eng verwandt ist das *Streifenplastizierungsmodell* (strip yield model) von DUGDALE [1962]. Er fand, dass sich an Rissen in dünnen Stahlblechen eine schmale bandförmige plastische Zone vor der Risspitze ausbildet. Der Grundgedanke des Modells besteht darin, dass sich bei Annahme von elastisch-idealplastischem Materialverhalten unter ESZ-Bedingungen in den plastischen Zonen ein Spannungszustand

$$\sigma_{yy}(r, 0) = R_0, \quad 0 \leq r \leq d_p \tag{16}$$

einstellen wird (siehe Bild rechts). Der Einfluss des Fließens wird nun näherungsweise dadurch erfasst, dass man die Untersuchung nicht am Ausgangsris der Länge  $2a$  vornimmt, sondern an einem um die Länge der jeweiligen Fließzone der Länge  $d_p$  verlängerten fiktiven Riss der Länge

$$2c = 2a + 2d_p, \tag{17}$$

der durch die Spannungen  $\sigma_0 = R_F$  im Bereich der Fließzonen  $a \leq |x| \leq c$  geschlossen wird. Außerhalb des fiktiven Risses wird elastisches Verhalten unterstellt. Die Rissöffnungsspannung  $\sigma_{yy}$  ist auf  $R_0$  begrenzt, besitzt also keine Singularität. Die Größe der plastischen Zone ist dementsprechend zu bestimmen.

Die elastizitätstheoretische Behandlung des DUGDALE-Modells erfolgt durch Superposition zweier elastischer Teillösungen:

- (1) lastfreier Riss der Länge  $2c$  im einachsigen Zugfeld  $\sigma_\infty$  (GRIFFITH-Riss),
- (2) an den Rissenden  $a \leq |x| \leq c$  durch Zugspannungen  $\sigma_0 = R_0$  teilbelasteter Riss.

Die entsprechenden Spannungsintensitätsfaktoren sind

$$K_I^{(1)} = \sigma_\infty \sqrt{\pi c} \quad , \quad K_I^{(2)} = -\frac{2}{\pi} R_0 \sqrt{\pi c} \arccos \frac{a}{c}, \tag{18}$$

Zur Lösung des zweiten Teilproblems siehe MUSCHELISHWILI [1971] oder HAHN [1976]. Die Risslänge  $c$  ist so zu bestimmen, dass sich die Singularitäten der beiden Teillastfälle bei  $x = \pm c$  gerade aufheben:  $K_I^{(1)} + K_I^{(2)} = 0$ . Es folgt für das Verhältnis  $a/c$

$$\frac{a}{c} = \cos\left(\frac{\pi \sigma_\infty}{2 R_0}\right). \quad (19)$$

Mit Gl. (17) ist dann die Fließzone

$$d_p = c \left[ 1 - \cos\left(\frac{\pi \sigma_\infty}{2 R_0}\right) \right] = a \left[ \sec\left(\frac{\pi \sigma_\infty}{2 R_0}\right) - 1 \right]. \quad (20)$$

Zur Herleitung der Gln. (19) und (20) wurde keine Einschränkung der Größe der plastischen Zone eingeführt. Für SSY, d.h.  $\sigma_\infty/R_0 \ll 1$  ergibt sich aus der Reihenentwicklung des Cosinus

$$d_p \approx \frac{\pi^2}{8} c \left(\frac{\sigma_\infty}{R_0}\right)^2 \approx 1.23 a \left(\frac{\sigma_\infty}{R_0}\right)^2. \quad (21)$$

Zum Vergleich: der Durchmesser der plastischen Zone nach IRWIN beim GRIFFITH-Riss für den ESZ ist nach Gl. (2)

$$d_p^{\text{IRWIN}} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_I}{R_0}\right)^2 = a \left(\frac{\sigma_\infty}{R_0}\right)^2. \quad (22)$$

das DUGDALE-Modell liefert also gegen über dem IRWIN-Modell eine um 23% größere plastische Zone. Man beachte, dass das DUGDALE-Modell für die (unendlich große) Scheibe mit Mittenriss unter Zugbelastung, den GRIFFITH-Riss, hergeleitet wurde, und deshalb im Gegensatz zum IRWIN-Modell keine Abhängigkeit von der Proben- oder Bauteilgeometrie enthält.

Für die Rissuferverschiebung findet man in Rissmitte ( $x = 0$ )

$$u_y(x = 0, y = 0) = \frac{R_0}{E\pi} a \ln \left( \frac{\sin\left(\frac{1}{2} \pi \sigma_\infty / R_0\right) + 1}{\sin\left(\frac{1}{2} \pi \sigma_\infty / R_0\right) - 1} \right) \quad (23)$$

und am Ende des realen Risses ( $x = a$ )

$$u_y(x = a, y = 0) = 4 \frac{R_F}{E\pi} a \ln \sec \left( \frac{\pi \sigma_\infty}{2 R_F} \right). \quad (24)$$

In der Bruchmechanik findet vor allem die durch

$$\delta_t = 2u_y(x = a, y = 0). \quad (25)$$

definierte Risspitzenverschiebung (CTOD)

$$\delta_t = \frac{8 R_0}{\pi E} a \ln \sec \left( \frac{\pi \sigma_\infty}{2 R_0} \right) \quad (26)$$

Verwendung. Vergleiche hierzu auch wieder die Näherung nach IRWIN, Gl. (11), für den GRIFFITH-Riss

$$\delta_t = \frac{4 R_0}{\pi E} \left( \frac{\sigma_\infty}{R_0} \right)^2 \pi a. \quad (27)$$

## Literatur

- ASTM E 2472-06: Standard test method for determination of resistance to stable crack extension under low-constraint conditions, Annual Book of ASTM Standards, Vol 03.01, American Society for Testing and Materials, 2006.
- Barenblatt, G.I. [1959]: The formation of equilibrium cracks during brittle fracture: general ideas and hypothesis, axially symmetric cracks. *Appl. Math. Mech.* 23, 623-636.
- BROCKS, W. [2005]: Cohesive strength and separation energy as characteristic parameters of fracture toughness and their relation to micromechanics. *Struct. Int. Durab.* 1, 233-243.
- BROCKS W., CORNEC, A., SCHEIDER, I. [2003]: Computational aspects of nonlinear fracture mechanics. In: *Comprehensive Structural Integrity - Numerical and Computational Methods*, MILNE, I., RITCHIE, R.O., KARIHALOO, B., (eds), Vol. 3, Elsevier; 127-209.
- BS 7448 [1997], Part 2: Fracture mechanics toughness tests. Method for determination of  $K_{Ic}$ , critical CTOD and critical  $J$  values of welds in metallic materials. British Standard Institution, London.
- DUGDALE, D.S. [1960]: Yielding of steel sheets containing slits. *J. Mech. Phys. Solids* 8, 100-104.
- HAHN, H.G. [1976]: *Bruchmechanik*. Teubner, Stuttgart.
- HAHN, G.T., ROSENFELD, A.R. [1965]: Local yielding and extension of a crack under plane stress. *Acta Metall.* 13, 293-306.
- IRWIN, G.R. [1964]: Structural aspects of brittle fracture. *Applied Materials Research* 3, 65-81.
- KUNA, M. [2010]: *Numerische Beanspruchungsanalyse von Rissen*, 2. Aufl., Vieweg + Teubner.
- MUSCHELISHWILI, N.I. [1971]: *Einige Grundaufgaben zur mathematischen Elastizitätstheorie*. Hanser, München.
- NEWMAN, J.C., JAMES, M.A., ZERBST, U. [2003]: A review of the CTOA/CTOD fracture criterion. *Engng. Fract. Mech.* 70, 371-85.
- SCHWALBE, K.H. [1995]: Introduction of  $\delta_5$  as an operational definition of the CTOD and its practical use. In *Fracture Mechanics: 26th Vol.*, REUTER, W.G., UNDERWOOD, J.H., NEWMAN, J.C. (eds), ASTM STP 1256, American Society for Testing and Materials; 763-778.
- SCHWALBE, K.H., NEWMAN, J., Shannon, J. [2005]: Fracture mechanics testing on specimens with low constraint - standardisation activities within ISO and ASTM. *Engng. Fract. Mech.* 72, 557-576.
- WELLS, A.A. [1961]: Brittle fracture strength of welded and notched three inch thick steel plates. *Brit. Weld. J.* 8.

## Wegunabhängige Integrale

Es sei  $\varphi(x_i)$  eine (skalare, vektorielle oder tensorielle) Feldgröße, die im Gebiet  $\mathcal{B}$  stetig differenzierbar mit

$$\varphi_{,i} \doteq \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0 \quad \text{in } \mathcal{B}. \quad (1)$$

ist. Nach dem GAUßschen Satz gilt

$$\int_{\mathcal{B}} \varphi_{,i} dv = \int_{\partial \mathcal{B}} \varphi n_i da = 0, \quad (2)$$

mit  $n_i$  als äußerer Normale auf dem Rand  $\partial \mathcal{B}$ . Wenn eine Singularität  $\mathcal{S}$  in  $\mathcal{B}$  existiert, dann ist  $\varphi(x_i)$  in diesem Punkt nicht differenzierbar, und der GAUßsche Satz ist nur in einem Gebiet  $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B} - \mathcal{B}_S$  mit dem geschlossenen Rand  $\partial \mathcal{B}_0 = \partial \mathcal{B} \cup \partial \mathcal{B}_S \cup \partial \mathcal{B}^+ \cup \partial \mathcal{B}^-$  anwendbar, das diese Singularität ausschließt, Bild 1.

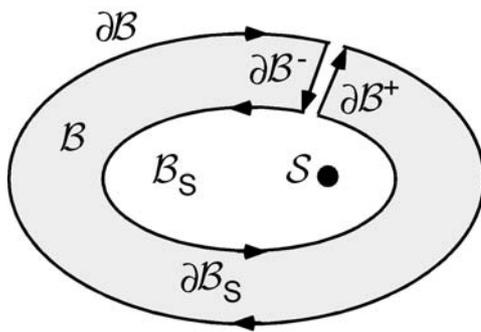


Bild 1: Gebiet  $\mathcal{B}$  mit Singularität  $\mathcal{S}$

Dann gilt

$$\int_{\partial \mathcal{B}_0} \varphi n_i da = \oint_{\partial \mathcal{B}} \varphi n_i da + \oint_{\partial \mathcal{B}^-} \varphi n_i da + \oint_{\partial \mathcal{B}_S} \varphi n_i da + \oint_{\partial \mathcal{B}^+} \varphi n_i da = 0, \quad (3)$$

und wegen

$$\oint_{\partial \mathcal{B}^+} (\dots) = - \oint_{\partial \mathcal{B}^-} (\dots) \quad \text{und} \quad \oint_{\partial \mathcal{B}} (\dots) = - \oint_{\partial \mathcal{B}} (\dots) \quad (4)$$

erhält man die Wegunabhängigkeit aller Linienintegrale, die die Singularität im selben Umlaufsinn umschließen

$$\oint_{\partial \mathcal{B}} \varphi n_i da = \oint_{\partial \mathcal{B}_S} \varphi n_i da. \quad (5)$$

ESHELBY [6] hat einen Erhaltungssatz für den *Energieimpulstensor* (*energy momentum tensor*)

$$P_{ij} = \bar{w} \delta_{ij} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial u_{k,j}} u_{k,i} \quad \text{mit} \quad P_{ij,j} = 0. \quad (6)$$

hergeleitet, wobei  $\bar{w}$  eine Energiedichte ist, z.B. die Verzerrungsenergiedichte eines *hyperelastischen Materials*, siehe Gl. (11), und  $u_i(x_j)$  das Verschiebungsfeld. Mit dem ESHELBY-Tensor können materielle Kräfte berechnet werden, die auf Singularitäten (Defekte) im Kontinuum wie Versetzungen oder Einschlüsse wirken,

$$F_i = \oint_{\partial\mathcal{B}} P_{ij} n_j da. \quad (7)$$

Eine solche materielle Kraft ist das *J-Integral* nach CHEREPANOV [5] und RICE [8] für die singuläre Risspitze.

## J-Integral

Das Randwertproblem für quasistatische Belastungen eines festen Körpers  $\mathcal{B}$  werde durch folgende Gleichungen beschrieben:

- Gleichgewichtsbedingung  $\sigma_{ij,j} = 0$  in  $\mathcal{B}$  (8)

- Randbedingungen  $\sigma_{ij} n_i = \bar{t}_j$  auf  $\partial\mathcal{B}_\sigma$  (9a)

- $u_i = \bar{u}_i$  auf  $\partial\mathcal{B}_u$  (9b)

- Kleine (lineare) Verzerrungen  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$  in  $\mathcal{B}$  (10)

- Hyperelastisches Material  $\sigma_{ij} = \frac{\partial\bar{w}}{\partial\varepsilon_{ij}}$  in  $\mathcal{B}$  (11)

Die Komponenten der materiellen Kraft

$$F_i = \oint_{\partial\mathcal{B}} [\bar{w}(\varepsilon_{ij}) n_i - \sigma_{jk} n_k u_{j,i}] da, \quad (12)$$

sind von Null verschieden, wenn  $\mathcal{B}$  eine Singularität enthält. Das Integral wird jetzt angewendet auf eine Scheibe konstanter Dicke  $h$ , die einen geraden Riss entlang der  $x_1$ -Achse hat, Bild 2. Das Gebiet innerhalb der geschlossenen Kontur

$$\Gamma_0 = \Gamma_1 \cup \Gamma^+ \cup \Gamma_2 \cup \Gamma^- \quad (13)$$

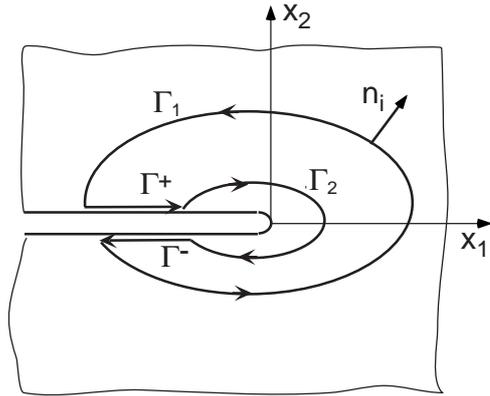
enthält keine Singularität, also

$$\frac{F_i}{h} = \oint_{\Gamma_0} [\bar{w} n_i - \sigma_{jk} n_k u_{j,i}] ds = \oint_{\Gamma_1} [\dots] ds + \oint_{\Gamma^+} [\dots] ds + \oint_{\Gamma_2} [\dots] ds + \oint_{\Gamma^-} [\dots] ds = 0. \quad (14)$$

Man nennt

$$\boxed{J_i = \oint_{\Gamma_1} [\bar{w} n_i - \sigma_{jk} n_k u_{j,i}] ds}. \quad (15)$$

den **J-Vektor**.



$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x_1, x_2) \quad , \quad u_i = u_i(x_1, x_2)$$

$$da = h ds$$

$$\mathbf{n} = n_i \mathbf{e}_i = \sin \vartheta \mathbf{e}_1 + \cos \vartheta \mathbf{e}_2$$

$$dx_1 = \cos \vartheta ds$$

$$dx_2 = \sin \vartheta ds$$

Bild 2: Zur Definition der  $J$ -Integrals

Die Rissflanken seien gerade und spannungsfrei,

$$\left. \begin{aligned} n_1 ds = \sin \vartheta ds = dx_2 = 0 \\ \sigma_{jk} n_k = \bar{t}_j = 0 \end{aligned} \right\} \text{ auf } \Gamma^+, \Gamma^- \quad (16)$$

Dann verschwindet die erste Komponente,  $i = 1$ , der Integrale längs  $\Gamma^+, \Gamma^-$

$$\oint_{\Gamma^+} [\bar{w} n_i - \sigma_{jk} n_k u_{j,i}] ds = \oint_{\Gamma^-} [\bar{w} n_i - \sigma_{jk} n_k u_{j,i}] ds = 0. \quad (17)$$

Außerdem gilt wie in Gl. (4)

$$\oint_{\Gamma_2} [\bar{w} n_i - \sigma_{jk} n_k u_{j,i}] ds = - \oint_{\Gamma_2} [\bar{w} n_i - \sigma_{jk} n_k u_{j,i}] ds. \quad (18)$$

und man erhält die Wegunabhängigkeit der ersten Komponente des  $J$ -Vektors

$$J_1 = \oint_{\Gamma_1} [\bar{w} n_1 - \sigma_{jk} n_k u_{j,1}] ds = \oint_{\Gamma_2} [\dots] ds = \oint_{\Gamma} [\dots] ds. \quad (19)$$

Dies ist das von C.P. CHEREPANOV [5] und J.R. RICE [8] in die Bruchmechanik eingeführte  $J$ -Integral. Die Integration entlang  $\Gamma$  erfolgt im mathematisch positiven Sinne um die Risspitze.

$$J = \oint_{\Gamma} [\bar{w} dx_2 - \sigma_{ij} n_j u_{i,1}] ds. \quad (20)$$

Wegen der Wegunabhängigkeit kann  $J$  im Fernfeld des Risses berechnet werden und bestimmt zugleich das Nahfeld an der Risspitze. Für eine kreisförmige Kontur um die Risspitze ist

$$J = r \int_{-\pi}^{+\pi} [\bar{w}(r, \vartheta) \cos \vartheta - \sigma_{ij}(r, \vartheta) n_j u_{i,x}] d\vartheta. \quad (21)$$

Für  $r \rightarrow 0$  behält  $J$  dann und nur dann einen endlichen (von Null verschiedenen) Wert, wenn die Verzerrungsenergiedichte  $\bar{w}$  eine Singularität der Ordnung  $r^{-1}$  hat.

Man beachte die getroffenen Annahmen:

- (1) zeitunabhängige Prozesse, keine Volumenkräfte,
- (2) kleine Verzerrungen,
- (3) homogenes hyper-elastisches Material,
- (4) ebene Spannungs- und Verschiebungsfelder, d.h. keine Abhängigkeit von  $x_3$ ,
- (5) gerade und spannungsfreie Rissflanken parallel zu  $x_1$ .

Die Annahme (3) eines *hyperelastischen Materials* nach Gl. (11) wird in der elastisch-plastischen Bruchmechanik als „*Deformationstheorie der Plastizität*“ im Unterschied zur *inkrementellen* Plastizität bezeichnet. Sie entspricht der HENCKY-Theorie der Plastizität im Gegensatz zur Theorie nach VON MISES, PRANDTL und REUB.

RICE [8], [10] hat auch gezeigt, dass dieses  $J$ -Integral identisch der *Energiefreisetzungsrate* nach GRIFFITH für eine ebene Rissausbreitung  $\Delta A = h \Delta a$  ist

$$J = \mathcal{G} = - \left( \frac{\partial U}{h \partial a} \right)_{v_i}. \quad (22)$$

HUTCHINSON [7] und RICE & ROSENGREEN [9] haben die singulären Spannungs- und Verzerrungsfelder an der Rissspitze in einem potenz-verfestigenden Material, das sogen. *HRR-Feld* hergeleitet, wo  $J$  die Rolle eines Intensitätsfaktors spielt wie  $K$  im Falle linear elastischen Materials. Für letztgenanntes gilt der Zusammenhang

$$J = \mathcal{G}_I + \mathcal{G}_{II} + \mathcal{G}_{III} = \frac{1}{E'} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1}{2G} K_{III}^2. \quad (23)$$

Reales *elastisch-plastisches Material* erfüllt die Gl. (11), also Annahme (3) nicht. Außerdem treten an der Rissspitze große Verzerrungen auf, was Gl. (10) bzw. Annahme (2) widerspricht. Entsprechend zeigen FE-Analysen nach der inkrementellen Plastizitätstheorie für große Verzerrungen eine Wegabhängigkeit von  $J$ , Bild 3 [4]. Im Fernfeld nähert sich der  $J$ -Wert nach Gl. (20) dem Wert der Energiefreisetzungsrate nach Gl. (22).

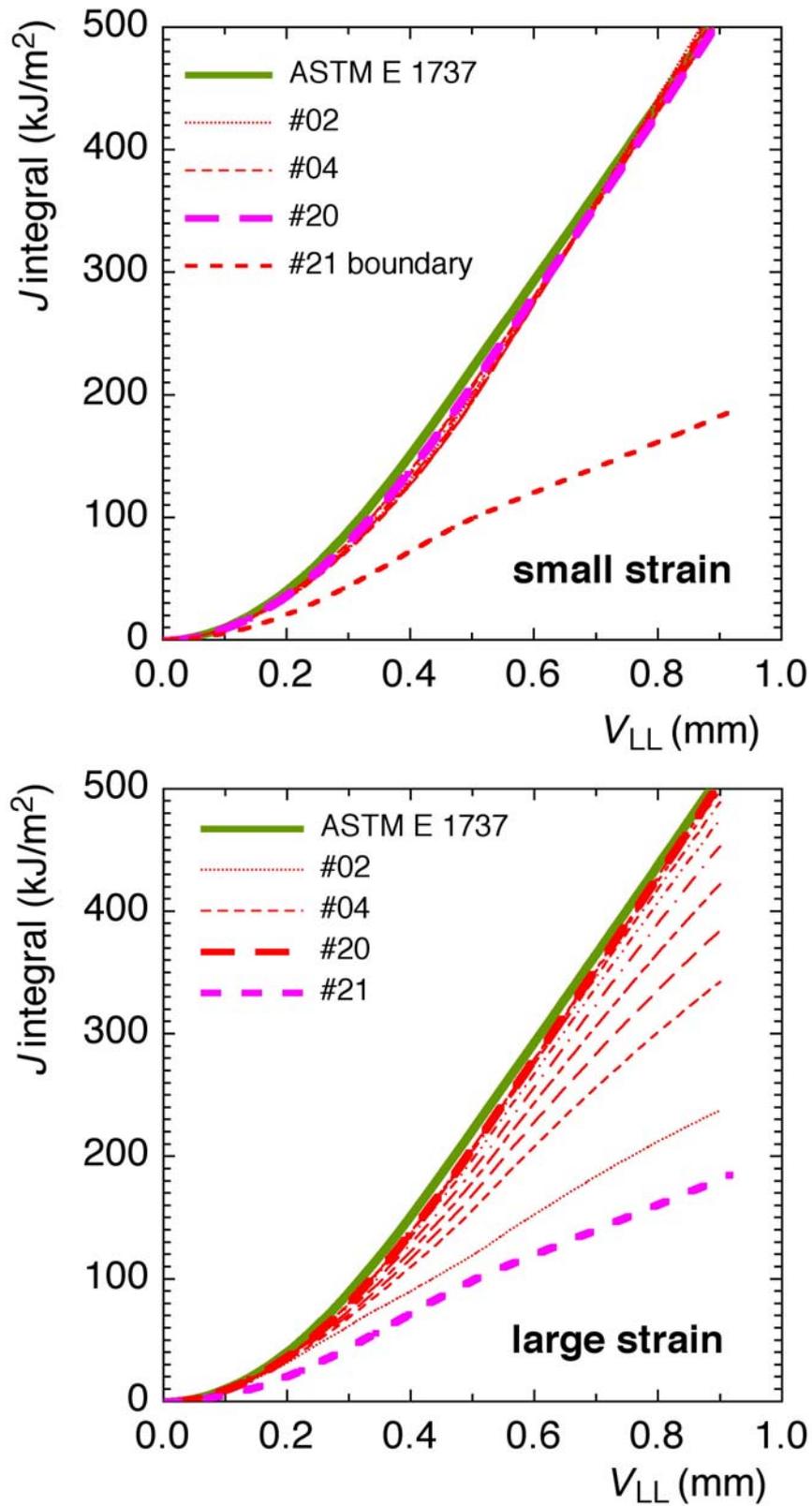


Bild 3: Wegabhängigkeit des elastisch-plastischen  $J$  bei kleinen und großen Verzerrungen; FE-Analyse einer C(T)-Probe

### Risswiderstandskurven

In der elastisch-plastischen Bruchmechanik beschreibt eine Risswiderstandskurve (R-Kurve) die Abhängigkeit einer bruchmechanischen Beanspruchungsgröße wie  $J$  oder CTOD  $\delta$  von der Rissverlängerung  $\Delta a$ . Klassischerweise, vor allem bei dickwandigen Bauteilen, finden R-Kurven auf der Basis des  $J$ -Integrals Anwendung [1]. Für Risswachstum in Blechen haben sich auch R-Kurven auf der Basis von CTOD bewährt [2].

Zur experimentellen Ermittlung des  $J$ -Integrals an bruchmechanischen Proben wird seine Eigenschaft als Energiefreisetzungsrate in der *Deformationstheorie der Plastizität* (genauer: bei nichtlinear elastischem oder hyperelastischem Werkstoffverhalten) herangezogen, Gl. (22). Man betrachte die Last-Verschiebungskurve einer gerissenen Probe bei unveränderlicher Risslänge in Bild 4.

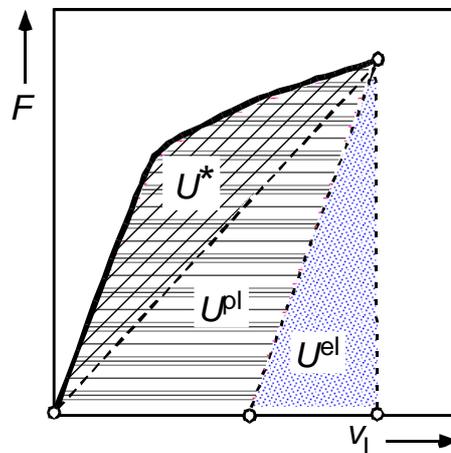
Bild 4: Last-Verschiebungskurve einer bruchmechanischen Probe bei konstanter Risslänge

$$U = \int F dv_L = U^{el} + U^{pl}$$

$$U^{pl} = \int F dv_L^{pl}$$

$$U^{el} = \frac{1}{2} F v_L^{el} = \frac{1}{2} F (v_L - v_L^{pl})$$

$$U^* = U - \frac{1}{2} F v_L = U^{pl} - \frac{1}{2} F v_L^{pl}$$



Bei einer kleinen Zunahme der Rissfläche  $\Delta A$  unter festgehaltener Lastpunktverschiebung (*fixed grips*)  $v_L$  wird die mechanische Arbeit  $\Delta U$  freigesetzt, und der negative Quotient  $\Delta U/\Delta A$  für  $\Delta A \rightarrow 0$  ist das  $J$ -Integral

$$J = - \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta U}{\Delta A} \right)_{v_L} = - \left( \frac{\partial U}{\partial A} \right)_{v_L} \quad (24)$$

Für scheibenförmige Proben mit gerader Rissfront ist  $\Delta A = B \Delta a = -B \Delta b^1$ , für jede Rissspitze<sup>2</sup>, mit  $b = W - a$  als Länge des Rissligamentes, so dass

$$J = \begin{cases} - \left( \frac{\partial U}{B \partial a} \right)_{v_L} = \left( \frac{\partial U}{B \partial b} \right)_{v_L} & \text{für C(T) und SE(B)} \\ - \left( \frac{\partial U}{2B \partial a} \right)_{v_L} = \left( \frac{\partial U}{2B \partial b} \right)_{v_L} & \text{für M(T) und DE(T)} \end{cases} \quad (24a)$$

<sup>1</sup> In den Normen zur Bruchmechanik wird die Probendicke mit  $B$  bezeichnet.

<sup>2</sup> Man beachte, dass M(T)- und DE(T)-Proben zwei Rissspitzen haben.

Die Lastpunktverschiebung kann entsprechend Bild 4 in einen elastischen und einen plastischen Anteil zerlegt werden,

$$v_L = v_L^{el} + v_L^{pl}, \quad (25)$$

und entsprechend gilt für die mechanischen Arbeiten

$$\begin{aligned} U &= \int_0^{v_L} F dv_L = \int_0^{v_L^{el}} F dv_L^{el} + \int_0^{v_L^{pl}} F dv_L^{pl} \\ &= \frac{1}{2} F v_L^{el} + \int_0^{v_L^{pl}} F dv_L^{pl} = U^{el} + U^{pl} \end{aligned} \quad (26)$$

Mit Gl. (24) folgt daraus, dass auch  $J$  in einen elastischen und einen plastischen Anteil zerlegt werden kann,

$$J = J^{el} + J^{pl}, \quad (27)$$

wobei sich der elastische Anteil aus dem Spannungsintensitätsfaktor  $K$  für Modus I ergibt (siehe Manuskript „LEBM\_SIF“)

$$J^{el} = \frac{K_I^2}{E'}, \quad \text{mit} \quad K_I = \sigma_\infty \sqrt{\pi a} Y(a/W) \quad (28)$$

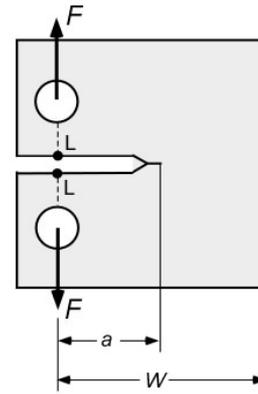
Die Spannung  $\sigma_\infty$  ist eine Fernfeld-Nennspannung (Kraft pro Fläche des ungerissenen Probenquerschnitts) und  $Y(a/W)$  eine Geometriefunktion. Der plastische Anteil von  $J$  folgt aus den Gln. (24) und (25) zu

$$J^{pl} = \begin{cases} -\left(\frac{\partial U^{pl}}{B \partial a}\right)_{v_L} = \left(\frac{\partial U^{pl}}{B \partial b}\right)_{v_L} & \text{für C(T) und SE(B)} \\ -\left(\frac{\partial U^{pl}}{2B \partial a}\right)_{v_L} = \left(\frac{\partial U^{pl}}{2B \partial b}\right)_{v_L} & \text{für M(T) und DE(T)} \end{cases} \quad (29)$$

Alternativ gilt (BEGLEY & LANDES [3], RICE et al. [10])

$$J = \begin{cases} \frac{1}{B} \int_0^F \left(\frac{\partial v_L}{\partial a}\right)_F dF = -\frac{1}{B} \int_0^F \left(\frac{\partial v_L}{\partial b}\right)_F dF & \text{für C(T) und SE(B)} \\ \frac{1}{2B} \int_0^F \left(\frac{\partial v_L}{\partial a}\right)_F dF = -\frac{1}{2B} \int_0^F \left(\frac{\partial v_L}{\partial b}\right)_F dF & \text{für M(T) und DE(T)} \end{cases} \quad (30)$$

$$\text{und } J^{pl} = \begin{cases} \frac{1}{B} \int_0^F \left(\frac{\partial v_L^{pl}}{\partial a}\right)_F dF = -\frac{1}{B} \int_0^F \left(\frac{\partial v_L^{pl}}{\partial b}\right)_F dF & \text{für C(T) und SE(B)} \\ \frac{1}{2B} \int_0^F \left(\frac{\partial v_L^{pl}}{\partial a}\right)_F dF = -\frac{1}{2B} \int_0^F \left(\frac{\partial v_L^{pl}}{\partial b}\right)_F dF & \text{für M(T) und DE(T)} \end{cases} \quad (31)$$

**$J_R$ -Kurven für C(T)-Proben [1]**Bild 5: Geometrie einer C(T)-Probe

Der elastische  $J$ -Anteil wird nach Gl. (28) berechnet mit

$$\sigma_{\infty} = \frac{F}{BW} \quad (32a)$$

und der Geometriefunktion

$$Y\left(\frac{a}{W}\right) = \sqrt{\frac{W}{\pi a} \frac{[2 + (a/W)] [0.886 + 4.64(a/W) - 13.32(a/W)^2 + 14.72(a/W)^3 - 5.6(a/W)^4]}{[1 - (a/W)]^{3/2}}} \quad (32b)$$

Der plastische  $J$ -Anteil bei konstanter Risslänge  $a_0$  ist

$$J^{\text{pl}} = \frac{\eta U^{\text{pl}}}{Bb_0}, \quad (33a)$$

$$\text{mit } \eta = 2.0 + 0.5222(b_0/W) = 2.0 + 0.522[1 - (a_0/W)]. \quad (33b)$$

Ausgehend vom  $J$ -Wert bei Rissinitiierung, d.h. bei der Risslänge  $a_0$ , nach Gl. (33a) wird  $J_{(i)}^{\text{pl}} = J^{\text{pl}}(a_{(i)})$  schrittweise für Rissinkremente  $\Delta a_{(i)} = a_{(i)} - a_{(i-1)}$  nach einer Rekursionsformel ermittelt

$$J_{(i)}^{\text{pl}} = \left( J_{(i-1)}^{\text{pl}} + \frac{\eta_{(i-1)}}{b_{(i-1)}} \frac{\Delta U_{(i)}^{\text{pl}}}{B} \right) \left( 1 - \gamma_{(i-1)} \frac{\Delta a_{(i)}}{b_{(i-1)}} \right), \quad (34)$$

$$\text{mit } \begin{cases} \eta_{(i)} = 2.0 + 0.522(b_{(i)}/W) \\ \gamma_{(i)} = 1.0 + 0.76(b_{(i)}/W) \end{cases}. \quad (35)$$

Die Änderung der plastischen Verzerrungsarbeit wird mit der Trapezregel aus der Fläche unter der Last-Verformungskurve berechnet

$$\Delta U_{(i)}^{\text{pl}} = U_{(i)}^{\text{pl}} - U_{(i-1)}^{\text{pl}} = \int_{v_{\text{LL}(i-1)}^{\text{pl}}}^{v_{\text{LL}(i)}^{\text{pl}}} F dv_{\text{LL}(i)}^{\text{pl}} \approx \frac{1}{2} (F_{(i)} + F_{(i-1)}) \Delta v_{\text{LL}(i)}^{\text{pl}}. \quad (36)$$

Die plastische Lastlinienverschiebung

$$v_{LL(i)}^{pl} = v_{LL(i)} - v_{LL(i)}^{el} = v_{LL(i)} - F_{(i)} C_{LL(i)} \quad (37)$$

wird aus der gemessenen Gesamtverschiebung mit Hilfe der elastischen Nachgiebigkeit bestimmt. Obwohl die Anwendung von  $J_R$ -Kurven nach ASTM E 1820 zur Beschreibung von duktilem Risswachstum gewissen Bedingungen für die Probenabmessungen  $B$  und  $W$ , so genannten *Gültigkeitskriterien*<sup>3</sup>, unterliegt, gibt es für die Auswertformeln keinerlei Einschränkungen hinsichtlich der Probendicke  $B$ , so dass sie auch für dünne Bleche anwendbar sind.

- [1] ASTM E 1820-06: Standard test method for measurement of fracture toughness, Annual book of ASTM Standards, Vol 03.01, American Society for Testing and Materials, Philadelphia.
- [2] ASTM E 2472-06: Standard test method for determination of resistance to stable crack extension under low-constraint conditions, Annual book of ASTM Standards, Vol 03.01, American Society for Testing and Materials, Philadelphia.
- [3] J.A. BEGLEY & J.D. LANDES: "The  $J$ -integral as a fracture criterion", in: Fracture Toughness, ASTM STP 514 (1972), 1-23.
- [4] W. BROCKS & I. SCHEIDER, I.: „Reliable  $J$ -values - Numerical aspects of the path-dependence of the  $J$ -integral in incremental plasticity“, Materialprüfung. 45 (2003), 264-275.
- [5] C.P. CHEREPANOV: "Crack propagation in continuous media" Appl. Math. Mech. 31 (1967), 476-488.
- [6] J.D. ESHELBY: "The continuum theory of lattice defects", Prog. Solid States Physics 3 (1965), 79-114.
- [7] J.W. HUTCHINSON: "Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material" J. Mech. Phys. Solids 16 (1968), 13-31.
- [8] J.R. RICE: "A path independent integral and the approximate analysis of strain concentrations by notches and cracks", J. Appl. Mech. 35 (1968), 379-386.
- [9] J.R. RICE & G.F. ROSENGREN: "Plane strain deformation near a crack-tip in a power-law hardening material", J. Mech. Phys. Solids 16 (1968), 1-12.
- [10] J.R. RICE, P.C. PARIS & J.G. MERKLE: "Some further results of  $J$ -integral analysis and estimates", in: Progress in Flaw Growth and Fracture Toughness Testing, ASTM STP 536 (1973), 231-245.

---

<sup>3</sup> Der Begriff "*Gültigkeit*" (*validity*) wird oft in doppelter Bedeutung verwendet, zum einen für die zulässige *Anwendbarkeit* von R-Kurven, d.h. ihre Übertragbarkeit auf Bauteile, zum anderen für die *Richtigkeit* der Formel für ihre Ermittlung.

## Asymptotische Lösung für das Spannungs- und Verzerrungsfeld an der Rissspitze in der EPBM (HRR-Feld)

### 1. Die Deformationstheorie der Plastizität

Im Unterschied zu den inkrementellen Formänderungsgesetzen von PRANDTL und REUß hat HENCKY [1924] ein finites Formänderungsgesetz für nichtlineares Materialverhalten aufgestellt<sup>1</sup>, das noch heute insbesondere in der elastisch-plastischen Bruchmechanik (EPBM) in Verbindung mit dem Verfestigungspotenzgesetz von RAMBERG & OSGOOD [1945] viel verwendet wird. Tatsächlich beschreibt diese „*Deformationstheorie der Plastizität*“ gar kein plastisches sondern lediglich nichtlinear-elastisches (hyperelastisches) Materialverhalten, für das

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (1)$$

mit  $\bar{w}$  als *Verzerrungsenergiedichte* gilt<sup>2</sup>. Sie hat aber den Vorteil, mathematisch einfacher handhabbar zu sein und in einigen Fällen sogar geschlossene Lösungen von Randwertproblemen zu ermöglichen wie das weiter unten hergeleitete nach seinen Autoren als HRR-Feld bezeichnete singuläre Spannungsfeld an einer Rissspitze (HUTCHINSON [1968a, b], RICE & ROSENGREN [1968]).

Auch in der finiten Plastizitätstheorie gelten die Voraussetzungen über Isotropie und Inkompressibilität des Werkstoffs. Anstelle der additiven Zerlegung der Dehnraten wird eine Zerlegung der Gesamtverzerrungen in einen elastischen und einen plastischen Anteil angenommen,  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p$ , und anstelle der Fließregel der inkrementellen Plastizitätstheorie werden die plastischen Verzerrungen über die einachsige Zugfließkurve aus

$$\varepsilon_{ij}^p = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_p}{R_F} \sigma'_{ij} = \frac{3}{2S_p} \sigma'_{ij} \quad (2)$$

mit  $S_p(\varepsilon_p) = R_F / \varepsilon_p$  als dem *plastischen Sekantenmodul* bestimmt. Die totalen Verzerrungen sind dann

$$\varepsilon_{ij} = \left( \frac{1}{2G} + \frac{3}{2S_p} \right) \sigma'_{ij} + \frac{1}{3K} \sigma_h \delta_{ij} \quad (3)$$

Mit dem *Potenzverfestigungsgesetz* von RAMBERG & OSGOOD [1945] nimmt der plastische Anteil des HENCKY-Gesetzes die Form

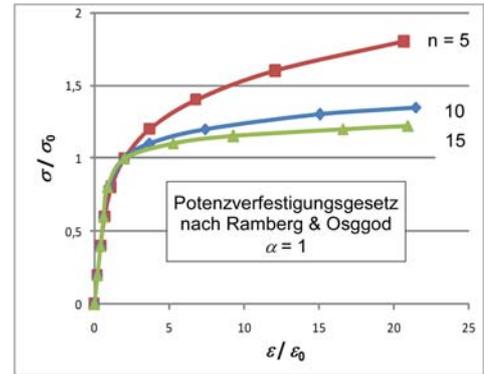
$$\frac{\varepsilon_{ij}^p}{\varepsilon_0} = \frac{3}{2} \alpha \left( \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0} \right)^{n-1} \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_0} \quad (4)$$

<sup>1</sup> siehe Manuskript „Plastizität“

<sup>2</sup> siehe Manuskript „J-Integral“

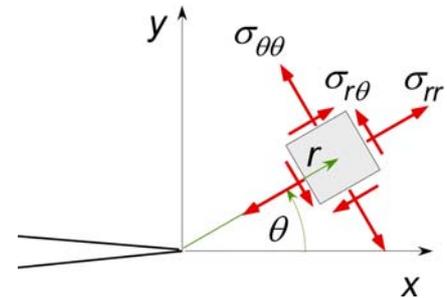
mit den materialspezifischen Verfestigungskennwerten  $\alpha > 0$  und  $n \geq 1$  an. Die Normierungsgrößen werden üblicherweise zu  $\sigma_0 = R_0$  und  $\varepsilon_0 = \sigma_0/E$  gesetzt.

Da dieses Gesetz von Beginn an nichtlinear ist, treten „plastische“ Verzerrungen schon bei beliebig kleinen Belastungen auf, und es gibt keinen definierten Übergang von elastischem zu plastischem Materialverhalten, also auch keine Fließbedingung.



## 2. Das Randwertproblem

Das Nahfeld der Risspitzenumgebung wird in einem Polarkoordinatensystem  $(r, \theta)$  beschrieben, und es werden die Grenzfälle ebener Spannungszustand (ESZ) und ebener (plastischer) Verzerrungszustand (EVZ) für Modus I betrachtet. Die elastischen (linearen) Verzerrungen in Gl. (4) werden gegenüber den „plastischen“ (nichtlinearen) Verzerrungen vernachlässigt.



**ESZ:**  $\sigma_{zz} = \sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = 0$

Damit erhält man die Vergleichsspannung im ESZ

$$\bar{\sigma}^2 = \sigma_{rr}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\theta\theta}^2 + 3\sigma_{r\theta}^2 \quad (5)$$

**EVZ:**  $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{rz} = \varepsilon_{\theta z} = 0$

$$\varepsilon_{zz} \approx \varepsilon_{zz}^p = \frac{\alpha}{E} \left( \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0} \right)^{n-1} \left[ \sigma_{zz} - \frac{1}{2}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) \right] = 0$$

Die Spannung in Dickenrichtung ist<sup>3</sup>

$$\sigma_{zz} = \frac{1}{2}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) \quad (6)$$

und die Vergleichsspannung

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{3}{4}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + 3\sigma_{r\theta}^2. \quad (7)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen für ebene Zustände mit  $\partial(\ )/\partial z = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{r \partial \theta} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{r \partial \theta} + \frac{2}{r}\sigma_{r\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

werden durch Einführung einer AIRYSchen Spannungsfunktion<sup>4</sup>  $\Phi(r, \theta)$  mit

<sup>3</sup> Man beachte die formale Ähnlichkeit zum EVZ in der Elastizitätstheorie für  $\nu \rightarrow \frac{1}{2}$ .

<sup>4</sup> siehe z.B. HAHN [1992], GROSS et al. [1995]

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \doteq \frac{1}{r} \Phi' + \frac{1}{r^2} \ddot{\Phi} \\ \sigma_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) \doteq -\left( \frac{1}{r} \dot{\Phi} \right)' \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \doteq \Phi''\end{aligned}\tag{9}$$

identisch erfüllt.<sup>5</sup> Mithilfe der *Kompatibilitätsbedingung*

$$\frac{1}{r} (r \varepsilon_{\theta\theta})'' + \frac{1}{r^2} \ddot{\varepsilon}_{rr} - \frac{1}{r} \varepsilon'_{rr} - \frac{2}{r^2} (r \dot{\varepsilon}_{r\theta})' = 0\tag{10}$$

wird durch Elimination der Verzerrungen über das Stoffgesetz Gl. (4) eine *partielle nichtlineare homogene Differentialgleichung vierter Ordnung* für die Funktion  $\Phi(r, \theta)$  jeweils für den ESZ und den EVZ hergeleitet (siehe z.B. BROCKS et al. [1990]).

Die spannungsfreien Rissflanken,  $\sigma_{\theta\theta}(r, \theta = \pm\pi) = \sigma_{r\theta}(r, \theta = \pm\pi) = 0$  sind mit Gl. (9) durch die in  $\Phi$  formulierten *Randbedingungen*

$$\begin{aligned}\Phi(r, \theta = \pm\pi) &= 0 \\ \dot{\Phi}(r, \theta = \pm\pi) &= 0\end{aligned}\tag{11}$$

zu realisieren. Die homogene Differentialgleichung mit den homogenen Randbedingungen beschreibt ein *Eigenwertproblem*.

### 3. Singuläre Rissspitzenfelder

Für die asymptotische Lösung wird ein Separationsansatz

$$\Phi(r, \theta) = K_\sigma r^s \tilde{\phi}(\theta)\tag{12}$$

gemacht. Die Potenz in  $r$ , d.h. der Exponent  $s$ , stellt den dominierenden singulären Term einer allgemeineren Potenzreihenentwicklung in  $r$  dar. Einsetzen in Gl. (9) liefert

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= K_\sigma r^{s-2} (s \tilde{\phi} + \ddot{\tilde{\phi}}) = K_\sigma r^{s-2} \tilde{\sigma}_{rr}(\theta) \\ \sigma_{r\theta} &= K_\sigma r^{s-2} (1-s) \dot{\tilde{\phi}} = K_\sigma r^{s-2} \tilde{\sigma}_{r\theta}(\theta) \quad . \\ \sigma_{\theta\theta} &= K_\sigma r^{s-2} s(s-1) \tilde{\phi} = K_\sigma r^{s-2} \tilde{\sigma}_{\theta\theta}(\theta)\end{aligned}\tag{13}$$

Auch die Vergleichsspannung Gl. (5) bzw. (7) hat die gleiche Struktur, so dass allgemein

$$\sigma_{ij} = K_\sigma r^{s-2} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta).\tag{14}$$

geschrieben werden kann. Das zugehörige Verzerrungsfeld ergibt sich mit Gl. (4) zu

$$\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2} \alpha \varepsilon_0 \left( \frac{K_\sigma}{\sigma_0} \right)^n r^{n(s-2)} \tilde{\sigma}(\theta) \tilde{\sigma}'_{ij}(\theta) = \alpha \varepsilon_0 \left( \frac{K_\sigma}{\sigma_0} \right)^n r^{n(s-2)} \tilde{\varepsilon}_{ij}(\theta).\tag{15}$$

<sup>5</sup> Zur vereinfachten Schreibweise wurde  $\partial \Phi / \partial r = \Phi'$  und  $\partial \Phi / \partial \theta = \dot{\Phi}$  eingeführt.

Damit der Ansatz Gl. (12) das singuläre Rissspitzenfeld beschreibt, muss  $s < 2$  sein. Andererseits muss die in einer Kreisscheibe der Dicke  $h$  und vom Radius  $r_0$  um die Rissspitze gespeicherte Verzerrungsenergie

$$w = h \int_{r=0}^{r_0} \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \bar{w}(r, \theta) r dr d\theta. \quad (16)$$

endlich bleiben, also darf die Verzerrungsenergiedichte

$$\bar{w} = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \alpha \varepsilon_0 \sigma_0 \frac{n}{n+1} \left( \frac{K_\sigma}{\sigma_0} \right)^{n+1} r^{(s-2)(n+1)} \tilde{\sigma}^{n+1}. \quad (17)$$

höchstens eine  $r^{-2}$ -Singularität haben<sup>6</sup>, also  $s > 2n/(n+1)$  (HUTCHINSON [1968a]).

Mit dem Separationsansatz (12) kann die *partielle* Differentialgleichung für  $\Phi(r, \theta)$  auf eine *gewöhnliche* nichtlineare homogene Differentialgleichung für  $\tilde{\phi}(\theta)$  reduziert werden, die linear in der höchsten Ableitung ist

$$\ddot{\tilde{\phi}} = f\left(\ddot{\tilde{\phi}}, \dot{\tilde{\phi}}, \tilde{\phi}\right). \quad (18)$$

Die Randbedingungen (11) nehmen die Form

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(\theta = \pm\pi) &= 0 \\ \dot{\tilde{\phi}}(\theta = \pm\pi) &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

an. Sie lassen sich alternativ durch Ausnutzung der Symmetrie der Mode-I-Belastung,  $\sigma_{rr}(r, -\theta) = \sigma_{rr}(r, +\theta)$ ,  $\sigma_{\theta\theta}(r, -\theta) = \sigma_{\theta\theta}(r, +\theta)$ ,  $\sigma_{r\theta}(r, \theta) = 0$  auch

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(\theta = \pi) &= 0 \quad , \quad \dot{\tilde{\phi}}(\theta = \pi) = 0 \\ \dot{\tilde{\phi}}(\theta = 0) &= 0 \quad , \quad \ddot{\tilde{\phi}}(\theta = 0) = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

formulieren. Homogene Differentialgleichung (19) und homogene Randbedingungen (20) bilden zusammen ein nichtlineares *Eigenwertproblem* mit den Exponenten  $s$  als *Eigenwert*. HUTCHINSON [1968a] hat durch numerische Lösung den Zusammenhang

$$s = \frac{2n+1}{n+1} \quad (21)$$

gefunden. RICE & ROSENGREN [1968] schließen aus der Wegunabhängigkeit des  $J$ -Integrals für hyperelastisches Material, dass die Verzerrungsenergiedichte in Gl. (17) eine  $r^{-1}$ -Singularität haben muss<sup>7</sup>

$$\bar{w} = \alpha \varepsilon_0 \sigma_0 \frac{n}{n+1} \left( \frac{K_\sigma}{\sigma_0} \right)^{n+1} r^{-1} \tilde{\sigma}^{n+1}. \quad (22)$$

und kommen so ebenfalls auf den Zusammenhang nach Gl. (21).

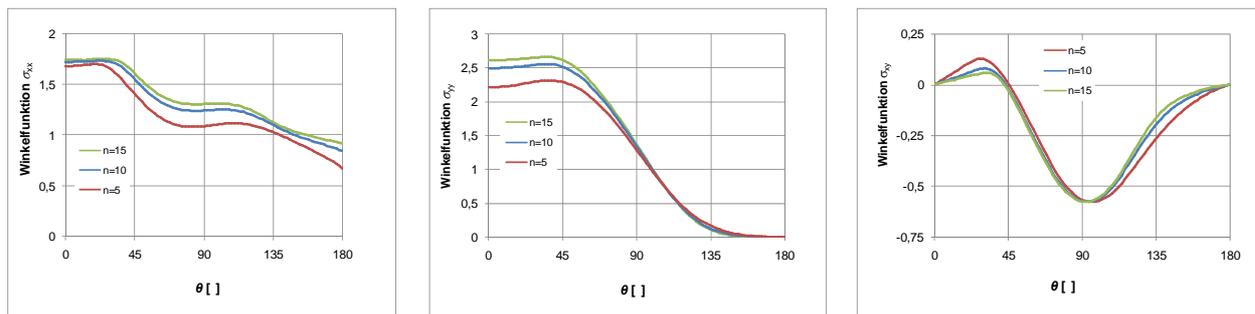
<sup>6</sup> dafür ist dann  $\int r^{-2} r dr = \int r^{-1} dr = \ln r$

<sup>7</sup> siehe Manuskript „J-Integral“ und die folgende Gl. (24)

Damit lauten die singulären Spannungs- und Verzerrungsfelder

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = K_\sigma r^{-\frac{1}{n+1}} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta) \\ \varepsilon_{ij} = \alpha \varepsilon_0 \left( \frac{K_\sigma}{\sigma_0} \right)^n r^{-\frac{n}{n+1}} \tilde{\varepsilon}_{ij}(\theta) \end{cases} \quad (23)$$

Sie werden nach ihren Autoren HUTCHINSON [1968a, b], RICE & ROSENGREN [1968] zusammenfassend als HRR-Feld bezeichnet. Die Winkelfunktionen  $\tilde{\sigma}_{ij}(\theta)$  und  $\tilde{\varepsilon}_{ij}(\theta)$  liegen aufgrund numerischer Lösungen der DGL. (18) in tabellierter Form für Polar- und kartesische Koordinaten vor (SHIH [1983], BROCKS et al. [1990]).



Winkelfunktionen  $\tilde{\sigma}_{xx}(\theta)$ ,  $\tilde{\sigma}_{yy}(\theta)$ ,  $\tilde{\sigma}_{xy}(\theta)$  des ebenen Verzerrungsstates (EVZ) für  $n = 5, 10, 15$ .

Für  $n = 1$  haben Spannungen und Verzerrungen die bekannte  $1/\sqrt{r}$ -Singularität der LEBM.

#### 4. Das $J$ -Integral als Rissspitzenintensität

In den Darstellungen der Rissspitzenfelder nach Gl. (23) ist (wie für jedes Eigenwertproblem) der Intensitätsparameter  $K_\sigma$  unbestimmt. Er hängt von der äußeren Belastung ab. Analog zur LEBM kann dieser Zusammenhang durch eine auf nichtlineares Materialverhalten verallgemeinerte Energiefreisetzungsrate, das  $J$ -Integral beschrieben werden. Für eine kreisförmige Kontur um die Rissspitze ist<sup>8</sup>

$$J = r \int_{-\pi}^{+\pi} \left[ \bar{w}(r, \theta) \cos \theta - \sigma_{ij}(r, \theta) n_j u_{i,x} \right] d\theta. \quad (24)$$

Mit  $\bar{w}(r, \theta)$  nach Gl. (22) und

$$\sigma_{ij} n_j u_{i,x} = \cos \theta \left( \sigma_{rr} u_{r,r} + \sigma_{r\theta} u_{\theta,r} \right) + \sin \theta \left[ \frac{\sigma_{rr}}{r} (u_\theta - u_{r,\theta}) - \frac{\sigma_{r\theta}}{r} (u_r - u_{\theta,\theta}) \right]. \quad (25)$$

erhält man nach Integration der Verschiebungs-Verzerrungsrelationen (BROCKS et al. [1990]) und längerer Rechnung den Zusammenhang

$$K_\sigma = \sigma_0 \left( \frac{J}{\alpha \sigma_0 \varepsilon_0 I_n} \right)^{\frac{1}{n+1}}, \quad (26)$$

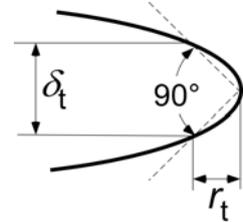
<sup>8</sup> siehe Manuskript „J-Integral“

wobei  $I_n$  ein vom Verfestigungsexponenten  $n$  und dem Spannungszustand ESZ oder EVZ abhängiges Integral über verschiedene Winkelfunktionen der Spannungs- und Verschiebungsfelder  $\tilde{\sigma}_{ij}, \tilde{u}_i$  ist. Für  $n = 1$  ist  $K_{\sigma} \sim \sqrt{J} \sim K_I$  wie der SIF der LEBM.

### 5. Die Rissspitzenöffnung

Die auf kartesische Koordinaten umgerechneten HRR-Verschiebungsfelder

$$u_i = \alpha \varepsilon_0 \left( \frac{J}{\alpha \sigma_0 \varepsilon_0 I_n} \right)^{\frac{n}{n+1}} r^{\frac{1}{n+1}} \tilde{u}_i(\theta) \quad (27)$$



bieten nach Shih [1981] die Möglichkeit einer einfachen Definition der Rissspitzenöffnung  $\delta$  über den Schnittpunkt zweier 45°-Sekanten mit den Risssflanken.

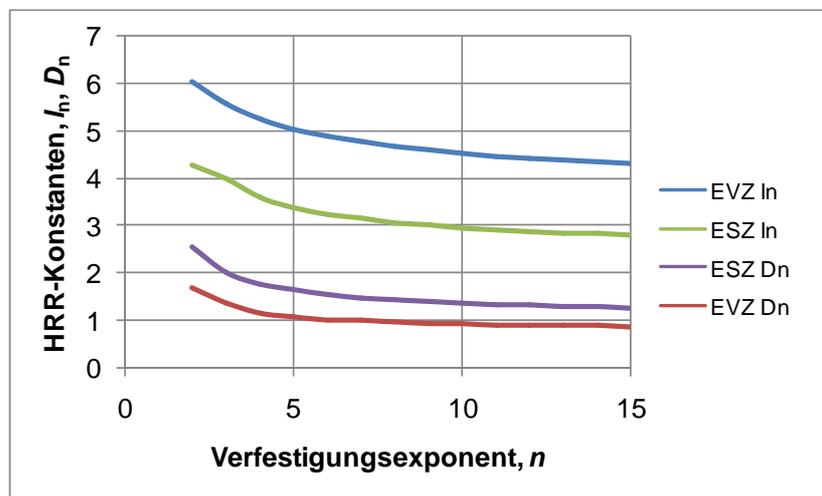
$$\delta_t = 2u_y(r_t, \pi) \quad \text{mit} \quad r_t - u_x(r_t, \pi) = u_y(r_t, \pi). \quad (28)$$

Hierfür lässt sich ein linearer Zusammenhang zwischen  $J$  und  $\delta$  ableiten

$$\delta_t = d_n \frac{J}{\sigma_0} \quad (29)$$

$$\text{mit} \quad d_n = (\alpha \varepsilon_0)^{\frac{1}{n}} D_n = 2 (\alpha \varepsilon_0)^{\frac{1}{n}} \frac{1}{I_n} (\tilde{u}_x(\pi) + \tilde{u}_y(\pi))^{\frac{1}{n}} \tilde{u}_y(\pi). \quad (30)$$

Im folgenden Diagramm sind die Werte der Konstanten  $I_n$  und  $D_n$  in Abhängigkeit des Verfestigungsparameters  $n$  für EVZ und ESZ dargestellt (BROCKS et al. [1990]).



### 6. „Gültigkeit“ der HRR-Lösung

In den grundlegenden Untersuchungen von McMEEKING [1977a], McMEEKING & PARIS [1979], SHIH [1985] und SHIH & GERMAN [1985] an zweidimensionalen FE-Modellen unter EVZ-Bedingungen im vollplastischen Zustand aber bei kleinen Deformationen wurde die von der HRR-Lösung dominierte Zone zu

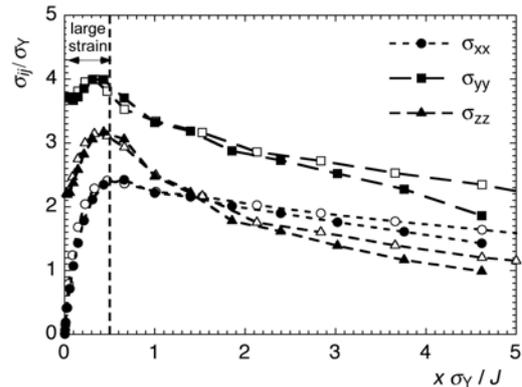
$$R_{\text{HRR}} = \begin{cases} 0,07(W - a) & \text{bei Biegung} \\ 0,01(W - a) & \text{bei Zug} \end{cases} \quad (31)$$

ermittelt. Die Untersuchungen von SHIH [1985] bei kombinierter Biege- und Zugbelastung zeigen, dass eine kleine Biegekomponente die von  $J$  dominierte Zone schnell bis zur Größe bei reiner Biegebelastung anwachsen lässt.

Die FE-Rechnungen von MCMEEKING [1977a] und BROCKS & OLSCHESKI [1986], letztere für große Deformationen, belegen weiterhin den linearen Zusammenhang zwischen  $J$  und  $\delta_t$  nach Gl. (29).  $J$  und  $\delta_t$  stellen somit äquivalente Beanspruchungsparameter des Rissspitzenfeldes dar.

Die Rissspitzenaufweitung liefert zudem ein Maß für die Größe der Zone, in der der Einfluss großer Deformationen von Bedeutung ist und zu einem Abweichen der „realen“ (nach der inkrementellen Plastizitätstheorie für große Deformationen berechneten) Spannungsverteilung vom singulären HRR-Feld führt. An der plastisch ausgerundeten Rissspitze bildet sich keine Singularität der Spannungen aus sondern ein Spannungsmaximum wie vor Kerben. Die FE-Rechnungen von RICE & JOHNSON [1970], MCMEEKING [1977b] und BROCKS & OLSCHESKI [1986] zeigen, dass diese Zone etwas zwei- bis dreimal  $\delta_t$  groß ist. Damit eine  $J$ -dominierte Zone verbleibt, muss also  $R_{\text{HRR}} > 3\delta_t$  sein, und aus Gl. (31) ergeben sich mit  $d_n = 2$  als Größenbedingungen

$$W - a \geq \begin{cases} 20 J / \sigma_0 & \text{für biegebelastete Proben} \\ 150 J / \sigma_0 & \text{für zugbelastete Proben} \end{cases} \quad (32)$$



Spannungen an der Rissspitze einer C(T)-Probe bei großen Deformationen für zwei  $J$ -Werte (FE-Rechnung); x-Achse auf  $J/\sigma_0 \sim \delta_t$  normiert.

Arbeiten von PARKS & WANG [1988] und BROCKS & NOACK [1988] behandeln das Problem der  $J$ -Dominanz bei dreidimensionalen Bauteilen und gekrümmten Rissgeometrien. Auch hier ist die Frage, ob das Spannungsfeld am Riss  $J$ -dominiert ist, abhängig von der Belastung und der Bauteilgeometrie. Wegen der größeren Vielfalt von Belastungssituationen und Bauteil- und Rissgeometrien, aber auch wegen der Komplexität dreidimensionaler elastisch-plastischer FE-Rechnungen liegen abschließende Aussagen nicht vor.

### Literatur

**W. Brocks, D. Klingbeil, J. Olschewski [1990]:** Lösung der HRR-Feld-Gleichungen der elastisch-plastischen Bruchmechanik, Forschungsbericht 175, Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung, Berlin.

**W. Brocks, H.-D. Noack [1988]:** J-integral and stresses at an inner surface flaw in a pressure vessel. Int. J. Pressure Vessel and Piping 31, 187-203.

- W. Brocks, J. Olschewski [1986]:** On J-dominance of crack-tip fields in largely yielded 3D structures. *Int. J. Solids Structures* 22, 693-708.
- D. Gross, W. Hauger, D. Schnell, P. Wriggers [1995]:** Technische Mechanik, Bd. 4, Springer-Verlag, Berlin.
- H.G. Hahn [1992]:** Technische Mechanik fester Körper, Carl Hanser Verlag, München.
- H. Hencky [1924]:** Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen. *ZAMM* 4, 323-334.
- J.W. Hutchinson [1968a]:** Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material. *J. Mech. Phys. Solids* 16, 13-31.
- J.W. Hutchinson [1968b]:** Plastic stress and strain fields at a crack tip. *J. Mech. Phys. Solids* 16, 337-347.
- R.M. McMeeking [1977a]:** Path dependence of the J-Integral and the role of J as a parameter characterizing the near-tip field. *ASTM STP* 631, 28-41. American Society for Testing and Materials, Philadelphia.
- R.M. McMeeking [1977b]:** Finite deformation analyses of crack-tip opening in elastic-plastic materials and implications for fracture. *J. Mech. Phys. Solids* 25, 357-381.
- R.M. McMeeking, D.M. Parks [1979]:** On criteria for J-dominance of crack-tip fields in large scale yielding, *ASTM STP* 668, 175-194. American Society for Testing and Materials, Philadelphia.
- D.M. Parks, Y.Y. Wang [1988]:** Elastic-plastic analysis of part-through surface cracks. In: *Analytical, Numerical and Experimental Aspects of Three Dimensional Fracture Processes* (Hrsg. A.J. Rosakis, K. Ravi-Chandar, Y. Rajapakse), *ASME AMD-Vol* 91, 19-32, New York.
- W. Ramberg, W.R. Osgood [1945]:** Description of stress strain curves by three parameters. NACA Technical Note No 902.
- J.R. Rice, M.A. Johnson [1970]:** The role of large crack tip geometry changes in plane strain fracture. In: *Elastic Behaviour of Solids* (Hrsg. M.F. Kanninen, W. Adler, A. Rosenfield, R. Jaffe), McGraw Hill, New York.
- J.R. Rice, G.F. Rosengren [1968]:** Plane strain deformation near a crack-tip in a power-law hardening material. *J. Mech. Phys. Solids* 16, 1-12.
- C.F. Shih [1981]:** Relationships between the J-integral and the crack opening displacement for stationary and extending cracks. *J. Mech. Phys. Solids* 29, 305-326.
- C.F. Shih [1983]:** Tables of the Hutchinson-Rice-Rosengren singular field quantities. Report MRL E-147, Brown University, Providence (RI).
- C.F. Shih [1985]:** J-dominance under plane strain fully plastic conditions: the edge crack panel subject to combined tension and bending. *Int. J. Fracture* 29, 73-84.
- C.F. Shih, M.D. German [1985]:** Requirements for a one parameter characterization of crack tip fields by the HRR-singularity, *Int. J. of Fracture* 29, 73-84.

## Gleitlinientheorie

### 1. Grundgleichungen des ebenen Verzerrungszustandes (EVZ)

Es werde der ebene Fließzustand eines *idealplastischen Körpers* in der x,y-Ebene betrachtet. Das Geschwindigkeitsfeld  $\dot{u}_x(x, y), \dot{u}_y(x, y), \dot{u}_z = 0$  stellt sich bei einer hinreichenden Größe der Last ein (s. Manuskript „Grenzlast“) und führt zu rein plastischen Verzerrungsänderungen

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{xx} &= \dot{\epsilon}_{xx}^p = \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x} = \dot{u}_{x,x} \\ \dot{\epsilon}_{yy} &= \dot{\epsilon}_{yy}^p = \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial y} = \dot{u}_{y,y} \\ \dot{\epsilon}_{xy} &= \dot{\epsilon}_{xy}^p = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial y} + \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} (\dot{u}_{x,y} + \dot{u}_{y,x}) \\ \dot{\epsilon}_{zz} &= \dot{\epsilon}_{xz} = \dot{\epsilon}_{yz} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Hierzu gehört ein Spannungszustand

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}(x, y) & \sigma_{xy}(x, y) & 0 \\ \sigma_{xy}(x, y) & \sigma_{yy}(x, y) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz}(x, y) \end{pmatrix}.$$

Mit der mittleren Normalspannung

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (2)$$

und der maximalen Schubspannung

$$\tau_m = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2} \quad (3)$$

lassen sich die Hauptspannungen aus

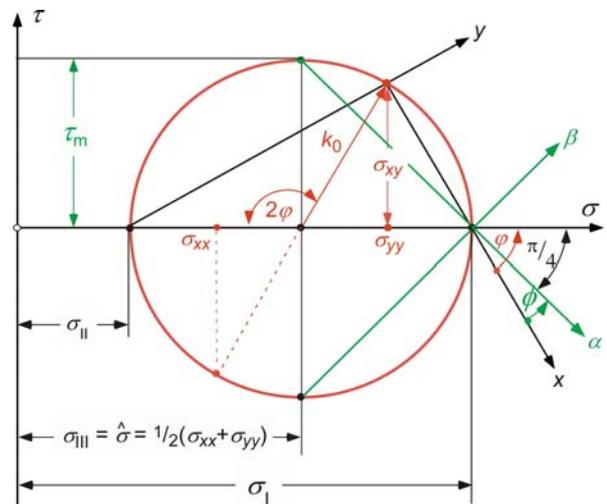
$$\begin{aligned} \sigma_I &= \hat{\sigma} + \tau_m \\ \sigma_{II} &= \hat{\sigma} - \tau_m \\ \sigma_{III} &= \hat{\sigma} \end{aligned} \quad (4)$$

berechnen (siehe den MOHRschen Spannungskreis). Im Fließzustand müssen die Spannungen die *Fließbedingung* erfüllen. Die Bedingungen nach TRESCA und VON MISES (siehe Manuskript „Plastizität“) lassen sich in der einheitlichen Form

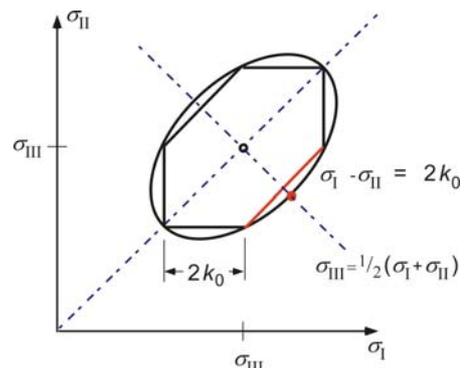
$$\frac{1}{4} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \sigma_{xy}^2 = k_0^2 \quad (5)$$

mit der *Schubfließgrenze*

$$k_0 = \tau_0 = \begin{cases} \frac{R_0}{2} & \text{Tresca} \\ \frac{R_0}{\sqrt{3}} & \text{von Mises} \end{cases}$$



MOHRscher Spannungskreis



(6)

schreiben. Im Gegensatz zum Kriterium nach TRESCA geht in die Bedingung nach VON MISES

## W. Brocks: Plastizität und Bruchmechanik

die „mittlere“ Hauptspannung  $\sigma_{III}$  ein.

Neben der Fließbedingung müssen die *Gleichgewichtsbedingungen*

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} &= 0\end{aligned}\tag{7}$$

erfüllt sein. Damit stehen drei Gleichungen für die drei unbekanntten Spannungen zur Verfügung. Lässt sich dieses Gleichungssystem bei Vorgabe von *Spannungsrandbedingungen* integrieren, spricht man von einem *statisch bestimmten Fließzustand*. Das Geschwindigkeitsfeld kann dann aus dem Spannungsfeld mithilfe der Fließregel berechnet werden.

In vielen Fällen liegen auch kinematische Randbedingungen vor, und man erhält ein gemischtes Randwertproblem. Die Gln. (5) und (7) sind durch zwei weitere Beziehungen zur Bestimmung des Geschwindigkeitsfeldes zu ergänzen. Die eine ist die Bedingung, dass plastische Verformungen *isochor* ablaufen,

$$\dot{\varepsilon}_{xx} + \dot{\varepsilon}_{yy} = \dot{u}_{x,x} + \dot{u}_{y,y} = 0.\tag{8}$$

Eine weitere Gleichung folgt daraus, dass bei isotropem Material die Hauptachsen des Spannungstensors

$$\tan 2\varphi = \tan(2\varphi + \pi) = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}\tag{9}$$

und der (plastischen) Verzerrungsgeschwindigkeit

$$\tan 2\bar{\varphi} = \tan(2\bar{\varphi} + \pi) = \frac{2\dot{\varepsilon}_{xy}}{\dot{\varepsilon}_{xx} - \dot{\varepsilon}_{yy}}\tag{10}$$

zusammenfallen, also  $\bar{\varphi} = \varphi$ . Damit erhält man die Gleichungen nach LÉVI [1971] und VON MISES [1913]

$$\frac{d\varepsilon_{xy}}{\sigma_{xy}} = \frac{d\varepsilon_{xx} - d\varepsilon_{yy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}.\tag{11}$$

Mit diesem gekoppelten System partieller Differentialgleichungen (5), (7), (8), (11) ist das Problem des ebenen plastischen Fließens vollständig beschrieben. Für seine Lösung ist der Typ des Differentialgleichungssystems von Bedeutung.

## 2. Partielle Differentialgleichungen

Für das oben beschriebene Gleichungssystem ist das Lösungsverhalten sogen. quasilinearer partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung sowie von Systemen partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung von Bedeutung. Die allgemeinste Form einer *quasilinearen partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung* einer Funktion  $u(x, y)$  lautet<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> mit  $u_{,x} = \partial u / \partial x$ ,  $u_{,xx} = \partial^2 u / \partial x^2$

## W. Brocks: Plastizität und Bruchmechanik

$$A(x, y, u, u_{,x}, u_{,y})u_{,xx} + 2B(x, y, u, u_{,x}, u_{,y})u_{,xy} + C(x, y, u, u_{,x}, u_{,y})u_{,yy} = R(x, y, u, u_{,x}, u_{,y}) \quad (12)$$

Sie ist linear in den höchsten Ableitungen. Man nennt sie *fastlinear*, falls  $A, B, C$  nur noch Funktionen der unabhängigen Variablen  $x, y$  sind, und *linear* falls darüber hinaus die rechte Seite die Darstellung

$$R(x, y, u, u_{,x}, u_{,y}) = R_3(x, y)u_{,x} + R_2(x, y)u_{,y} + R_1(x, y)u + R_0(x, y) \quad (13)$$

besitzt.

Eine allgemeine Lösung partieller Differentialgleichungen  $m$ -ter Ordnung enthält  $m$  freie Funktionen, die durch Zusatzbedingungen wie Anfangs- und Randbedingungen festgelegt werden. Das Lösungsverhalten klassifiziert man aufgrund des Vorzeichens der *Diskriminante*

$$D = B^2 - AC \begin{cases} > 0 & \text{hyperbolisch} \\ = 0 & \text{parabolisch} \\ < 0 & \text{elliptisch} \end{cases} \quad (14)$$

Es ist i.a. von  $x, y, u, u_{,x}, u_{,y}$  abhängig. Die rechte Seite beeinflusst das Lösungsverhalten nicht.

Zu jedem Typ der partiellen Differentialgleichungen gehören „geeignete“ Anfangs-<sup>2</sup> bzw. Randbedingungen, die das Problem zu einem *sachgemäß gestellten (well posed) Problem* machen. Dazu gehören die Forderungen: Die Lösung muss existieren, eindeutig sein und stetig von den Anfangs- bzw. Randwerten abhängen.

### Die CAUCHYSche Anfangswertaufgabe

Gesucht ist die Lösungsfläche  $u(x, y)$ , die durch eine beliebige Kurve  $\Gamma$  im durch  $x, y, u$  aufgespannten Raum geht. Dazu sind längs einer *Anfangskurve*  $\Gamma_0: (x(s), y(s))$  die *Anfangswerte*

$$u(x(s), y(s)) = \hat{u}(s) \quad (15)$$

mit stetig differenzierbarer Funktion  $\hat{u}(s)$  vorgegeben. Durch

$$\hat{u}'(s) = \hat{u}_{,s} = \hat{u}_{,x}\dot{x} + \hat{u}_{,y}\dot{y} \quad (16)$$

ist die Ableitung längs der Tangente  $\underline{\mathbf{t}}$  an  $\Gamma_0$  und durch

$$\hat{u}_{,n}(s) = -\hat{u}_{,x}\dot{y} + \hat{u}_{,y}\dot{x} \quad (17)$$

die Ableitung längs der Normalen  $\underline{\mathbf{n}}$  zu  $\Gamma_0$  gegeben. Mit vorgegebenen Anfangswerten  $\hat{u}'(s) = \hat{u}_{,s}$  und  $\hat{u}_{,n}(s)$  ist ein infinitesimaler Lösungstreifen der Lösungsfläche  $u(x, y)$  bekannt, denn die Gln (16) und (17) stellen ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der partiellen Ableitungen

---

<sup>2</sup> bei Differentialgleichungen, bei denen die Zeit  $t$  an die Stelle der Ortskoordinate  $y$  tritt, wie der Wärmeleitungs- oder der Wellengleichung.

## W. Brocks: Plastizität und Bruchmechanik

$$\begin{aligned}\hat{u}_{,x}(s) &= \frac{1}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \left( \dot{x} \hat{u}(s) - \dot{y} \hat{u}_{,n}(s) \right) \\ \hat{u}_{,y}(s) &= \frac{1}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \left( \dot{y} \hat{u}(s) + \dot{x} \hat{u}_{,n}(s) \right)\end{aligned}\tag{18}$$

dar. Dieser Streifen lässt sich mit Hilfe der 2. Ableitungen

$$\begin{aligned}\dot{x} \hat{u}_{,xx} + \dot{y} \hat{u}_{,yx} &= \hat{u}_{,x}(s) \\ \dot{x} \hat{u}_{,xy} + \dot{y} \hat{u}_{,yy} &= \hat{u}_{,y}(s) \\ A \hat{u}_{,xx} + 2B \hat{u}_{,xy} + C \hat{u}_{,yy} &= R(s)\end{aligned}\tag{19}$$

fortsetzen. Über die Lösbarkeit entscheidet die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & 0 \\ 0 & \dot{x} & \dot{y} \\ A & 2B & C \end{vmatrix} = A\dot{y}^2 - 2B\dot{x}\dot{y} + C\dot{x}^2 \neq 0.\tag{20}$$

Für  $\Delta \neq 0$  sind die 2. Ableitungen in einem Punkt P auf  $\Gamma_0$  eindeutig bestimmbar und  $u(x, y)$  ist in der Umgebung von P in eine TAYLOR-Reihe entwickelbar. Ist  $\Delta \neq 0$  für alle Punkte P auf  $\Gamma_0$  so besitzt das CAUCHY-Problem eine eindeutige Lösung.

Ist  $\Delta = 0$  für  $\Gamma_0$ , so sind die 2. Ableitungen entweder gar nicht oder nicht eindeutig bestimmbar, je nach dem Verhalten der rechten Seiten des Gleichungssystems (19), und das bedeutet, dass entweder keine oder mehrere Lösungsflächen durch  $\Gamma_0$  hindurchgehen. Einen derartigen Streifen nennt man *charakteristischen Streifen*. Von besonderem Interesse sind Kurven  $\mathcal{C} = \Gamma_0$ , längs derer  $\Delta \equiv 0$  sind, also

$$Ay'^2 - 2By' + C = 0\tag{21}$$

mit  $y' = \dot{y}/\dot{x}$  gilt. Diese gewöhnliche Differentialgleichung wird *charakteristische DGL* des Anfangswertproblems bezeichnet und ihre Lösungen als *Charakteristiken*. Gl. (21) ist eine quadratische Gleichung für  $y'$  mit den Lösungen

$$y'_{1,2}(x) = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}\tag{22}$$

die durch die Diskriminate Gl. (14) bestimmt sind, und zwar existieren für

- *hyperbolische Differentialgleichungen*,  $D > 0$ , zwei reelle Scharen von Charakteristiken,
- *parabolische Differentialgleichungen*,  $D = 0$ , eine reelle Schare von Charakteristiken,
- *elliptische Differentialgleichungen*,  $D < 0$ , zwei komplexe Scharen von Charakteristiken.

### 3. Die Charakteristiken des ebenen Verzerrungszustandes

Die beiden Gleichgewichtsbedingungen (7) und Fließbedingung (5) können durch Elimination der Spannung  $\sigma_{yy}$  wie folgt geschrieben werden

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} \pm \frac{2\sigma_{xy}}{\sqrt{k_0^2 - \sigma_{xy}^2}} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Dies stellt ein System von zwei gekoppelten quasilinearen partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung dar. Sind entsprechend der CAUCHYschen Anfangswertaufgabe die Anfangswerte

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{xx}(s) &= \sigma_{xx}(x(s), y(s)) \\ \hat{\sigma}_{xy}(s) &= \sigma_{xy}(x(s), y(s)) \end{aligned} \quad (24)$$

auf einer Anfangskurve  $\Gamma_0$  gegeben mit stetigen Ableitungen

$$\begin{aligned} \dot{x} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} &= \dot{\hat{\sigma}}_{xx}(s) \\ \dot{x} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} &= \dot{\hat{\sigma}}_{xy}(s) \end{aligned} \quad (25)$$

so lassen sich die partiellen Ableitungen  $\hat{\sigma}_{xx,x}$ ,  $\hat{\sigma}_{xx,y}$ ,  $\hat{\sigma}_{xy,x}$ ,  $\hat{\sigma}_{xy,y}$  auf  $\Gamma_0$  berechnen, falls die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{x} & \dot{y} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \pm \frac{2\sigma_{xy}}{\sqrt{k_0^2 - \sigma_{xy}^2}} \end{vmatrix} \quad (26)$$

auf  $\Gamma_0$  nicht verschwindet. Die zum Differentialgleichungssystem (23) gehörende charakteristische Gleichung

$$y'^2 \mp \frac{2\sigma_{xy}}{\sqrt{k_0^2 - \sigma_{xy}^2}} y' - 1 = 0 \quad (27)$$

ist vom *hyperbolischen Typ*. Ihre Lösungen

$$\begin{aligned} y'_1 &= \frac{\pm \sigma_{xy} + k_0}{\sqrt{k_0^2 - \sigma_{xy}^2}} = \tan \phi \\ y'_2 &= \frac{\pm \sigma_{xy} - k_0}{\sqrt{k_0^2 - \sigma_{xy}^2}} = \tan(\phi + \frac{\pi}{2}) \end{aligned} \quad (28)$$

liefern die Richtungsfelder zweier orthogonaler Scharen reeller Charakteristiken, die physikalisch Linien maximaler Schubspannungen bzw. maximaler Schergeschwindigkeiten darstellen und *Gleit-* oder *Fließlinien* (slip lines) genannt werden.  $\phi$  ist die Richtung der größten Schub-

spannung

$$\phi = \varphi \pm \frac{\pi}{4} \quad (29)$$

und  $\varphi$  die Richtung der größten Hauptspannung (siehe MOHRschen Spannungskreis). Längs der Gleitlinien gilt

$$\sigma_{nt} = \tau_m = \pm k_0, \quad (30)$$

wobei  $n, t$  die Richtungen der Normalen und der Tangente an die Gleitlinie darstellt. Die Komponenten des Spannungstensors im  $x, y$ -System sind

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \hat{\sigma} - k_0 \sin 2\phi \\ \sigma_{yy} &= \hat{\sigma} + k_0 \sin 2\phi . \\ \sigma_{xy} &= k_0 \cos 2\phi \end{aligned} \quad (31)$$

Damit ist der Spannungszustand in jedem Punkt durch den Wert der mittleren Hauptspannung  $\hat{\sigma} = \sigma_{III}$  und der Orientierung  $\phi$  der Linien maximaler Schubspannung gegenüber der  $x$ -Achse vollständig festgelegt. Die Gln. (28) beschreiben ein orthogonales Netzwerk. Man nennt die gegenüber der  $x$ -Achse um den Winkel  $\phi$  im mathematisch positiven Sinne (gegen den Uhrzeiger) gedrehte Kurvenschar  $\alpha$ -Linien und die dazu orthogonalen Kurven  $\beta$ -Linien. Die Hauptachse I teilt den rechten Winkel zwischen ihnen. Auf ein in den Hauptrichtungen orientiertes materielles Element wirken die Spannungen  $\sigma_{I,II} = \hat{\sigma} \pm k_0, \sigma_{III} = \hat{\sigma}$ .

Mit  $\hat{\sigma}$  und  $\phi$  nehmen die Gleichgewichtsbedingungen (23) die Form

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial x} - 2k_0 \cos 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} - 2k_0 \sin 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} &= 0 \\ -2k_0 \sin 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial y} + 2k_0 \cos 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (32)$$

an. Aus der Lösungsbedingung für dieses Gleichungssystem hat HENCKY [1923] die Gleichungen

$$\frac{d\hat{\sigma}}{d\phi} \mp 2k_0 = 0 \quad \text{für} \quad \begin{cases} \alpha\text{-Linien} \\ \beta\text{-Linien} \end{cases} \quad (33)$$

hergeleitet, d.h. dass in jedem Punkt die Ableitung der Größe  $\hat{\sigma} \mp 2k_0\phi$  in Richtung der  $\alpha$ - bzw.  $\beta$ -Linien verschwindet, also  $\hat{\sigma} \mp 2k_0\phi$  konstant ist,

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} - 2k_0\phi &= C_\alpha \quad \text{längs } \alpha\text{-Linie} \\ \hat{\sigma} + 2k_0\phi &= C_\beta \quad \text{längs } \beta\text{-Linie} \end{aligned} \quad (34)$$

Die Konstanten  $C_\alpha$  und  $C_\beta$  variieren von einer  $\alpha$ - bzw.  $\beta$ -Linie zur anderen.

Die Charakteristiken der Spannungsgleichungen und der Geschwindigkeitsgleichungen stimmen überein. Die Geschwindigkeitsänderungen entlang der  $\alpha$ - bzw.  $\beta$ -Linien sind

$$\frac{d\dot{u}_x}{d\phi} + \tan \phi \frac{d\dot{u}_y}{d\phi} = 0 \quad \alpha - \text{Linie} \quad (35)$$

$$\frac{d\dot{u}_x}{d\phi} - \cot \phi \frac{d\dot{u}_y}{d\phi} = 0 \quad \beta - \text{Linie}$$

Mit

$$\dot{u}_x = \dot{u}_\alpha \cos \phi - \dot{u}_\beta \sin \phi \quad (36)$$

$$\dot{u}_y = \dot{u}_\alpha \sin \phi + \dot{u}_\beta \cos \phi$$

erhält man als Pendant zu den HENCKYSchen Gleichungen für die Spannungen die GEIRINGERschen Gleichungen für die Dehnungsgeschwindigkeiten

$$\frac{d\dot{u}_\alpha}{d\phi} - \dot{u}_\beta = 0 \quad \text{längs } \alpha - \text{Linie} \quad (37)$$

$$\frac{d\dot{u}_\beta}{d\phi} + \dot{u}_\alpha = 0 \quad \text{längs } \beta - \text{Linie}$$

#### 4. Konstruktion von Gleitlinienfeldern - Randbedingungen

Beim CAUCHY-Problem sind die Spannungen  $\hat{\sigma}_{xx}$ ,  $\hat{\sigma}_{yy}$ ,  $\hat{\sigma}_{xy}$  längs einer Nichtcharakteristik  $\widehat{AB}$  vorgegeben. Dann existiert die Lösung im Dreieck ABP und ist eindeutig. Für den Schnittpunkt E der durch C und D gehenden  $\alpha$ - bzw.  $\beta$ -Linien gilt mit Gl. (34)

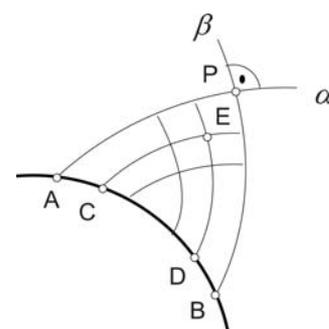
$$\hat{\sigma}_C - 2k_0\phi_C = \hat{\sigma}_E - 2k_0\phi_E$$

$$\hat{\sigma}_D - 2k_0\phi_D = \hat{\sigma}_E - 2k_0\phi_E \quad (38)$$

also

$$\phi_E = \frac{1}{4k_0}(\hat{\sigma}_D - \hat{\sigma}_C) + \frac{1}{2}(\phi_D + \phi_C) \quad (39)$$

$$\hat{\sigma}_E = \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_D + \hat{\sigma}_C) + 2k_0(\phi_D - \phi_C)$$



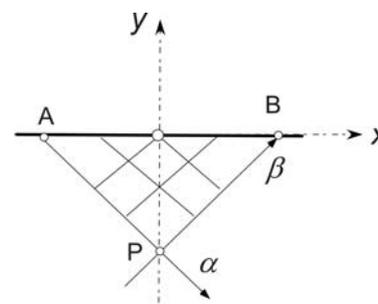
Ist der Bogen (Rand)  $\widehat{AB}$  spannungsfrei, so ist die Normale Hauptrichtung und die Charakteristiken schneiden die Oberfläche unter  $\pm 45^\circ$ . Das Gleitlinienfeld ABP und damit der Spannungszustand werden durch die Form des Randes bestimmt.

Ist die Oberfläche eben, so ist der Spannungszustand homogen

$$\sigma_{xx} = \pm 2k_0$$

$$\sigma_{zz} = \pm k_0 \quad (40)$$

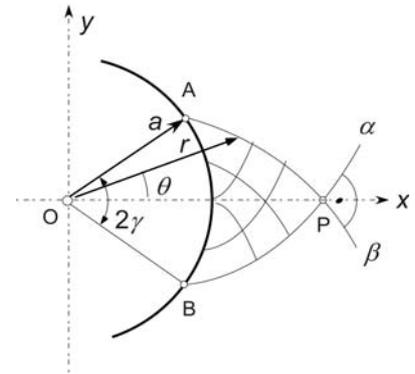
$$\sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0$$



## W. Brocks: Plastizität und Bruchmechanik

Bei einem kreisförmigen spannungsfreien Rand sind in jedem Punkt die radiale und die Umfangsrichtung Hauptrichtungen, die von den Charakteristiken (Gleitlinien) unter  $\pm 45^\circ$  geschnitten werden. Die Gleitlinien sind damit logarithmische Spiralen, die in einem Polarkoordinatensystem  $(r, \theta)$  durch

$$\begin{aligned} \theta + \ln \frac{r}{a} &= C_\alpha \\ \theta - \ln \frac{r}{a} &= C_\beta \end{aligned} \quad (41)$$



beschrieben werden. Entlang  $\widehat{BP}$  ( $\alpha$ -Linie) bzw.  $\widehat{AP}$  ( $\beta$ -Linie) gilt

$$\begin{aligned} \theta + \ln \frac{r}{a} &= \ln \frac{r_P}{a} \\ \theta - \ln \frac{r}{a} &= -\ln \frac{r_P}{a} \end{aligned} \quad (42)$$

mit  $r_P = \overline{OP}$ . Im Punkt A ist  $\theta_A = \gamma$  und  $r_A = a$  und damit

$$\gamma = \ln \frac{r_P}{a} \quad (43)$$

In einem beliebigen Punkt auf der  $x$ -Achse ( $\theta = 0$ ), der vom Ursprung den Abstand  $x = a + \xi$  hat, ist der Spannungszustand

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_{rr}(\theta = 0) = 2k_0 \ln \left( 1 + \frac{\xi}{a} \right) \\ \sigma_{yy} &= \sigma_{\theta\theta}(\theta = 0) = 2k_0 \left[ 1 + \ln \left( 1 + \frac{\xi}{a} \right) \right] \\ \sigma_{xy} &= \sigma_{r\theta}(\theta = 0) = 0 \end{aligned} \quad (44)$$

## Plastischer Kollaps und Grenzlastverfahren

Wegen der Mehrdeutigkeit des Werkstoffgesetzes in der inkrementellen Plastizitätstheorie muss bei vorgegebener Belastungsgeschichte i.a. für jeden Lastschritt der vollständige Spannungs- und Deformationszustand einer Struktur berechnet werden. Die *plastische Grenzlast* ergibt sich somit als Endwert einer Folge von Belastungsschritten, bei dem – ideal-plastischer Werkstoff vorausgesetzt – die (plastischen) Verformungen unter konstanten äußeren Lasten zunehmen.

Die *Grenzlastsätze* ermöglichen es, einen definierten Versagenszustand eines Systems zu ermitteln bzw. abzuschätzen, ohne in jedem Zwischenschritt den vollständigen Spannungs- und Verzerrungszustand zu berechnen. Auf der Grundlage dieser Extremalsätze wurden Verfahren entwickelt, die eine eindeutige Berechnung oder mindestens eine Eingrenzung durch obere und untere Schranken der plastischen Grenzlast ermöglichen.

Wenn die plastische Grenzlast in einem ideal-plastischen Körper erreicht wird, tritt unbegrenztes plastisches Fließen auf. Dieser Grenzzustand kann für geometrisch lineare Systeme als „Versagenszustand“ angesehen werden und heißt *plastischer Kollaps*. Die Bedeutung der plastischen Grenzlast ist darin begründet, dass sie eine einfache Abschätzung der *Traglast* einer Struktur aus elastisch-plastischem Werkstoff liefert. Dabei wird als Traglast die größte im stabilen Gleichgewicht getragene Belastung nach einer Folge von stabilen Lagen definiert. Deshalb wird das *Grenzlastverfahren* manchmal auch *Traglastverfahren* genannt. Man beachte allerdings, dass

- geometrische Instabilitäten (Knicken, Beulen usw.) und
- instabile Rissausbreitung

außer Betracht bleiben und für eine Festigkeitsauslegung ggf. getrennte Stabilitäts- und bruchmechanische Nachweise zu führen sind.

### DRUCKER's Stabilitätspostulate

Das Konzept der *Materialstabilität* wurde von DRUCKER [1951] in die Plastizitätstheorie eingeführt und in späteren Jahren weiter ausgearbeitet und spezifiziert. Zusammen mit dem Konzept der Fließflächen im Spannungsraum erlaubt es die aus einachsigen Zugversuchen bekannten Phänomene auf mehrachsige Spannungszustände zu verallgemeinern. Dies ist insbesondere für inelastisches Materialverhalten bedeutsam: Ausgehend von einem Spannungszustand auf der Fließfläche können Verformungen unter zunehmenden, gleichbleibenden oder abnehmender Spannungen erfolgen. Das Materialverhalten wird entsprechend als verfestigend (*hardening*), ideal-plastisch (*perfectly plastic*) oder entfestigend (*softening*) bezeichnet. Die Bedeutung des Begriffes „Stabilität“ ist offenkundig.

DRUCKER wendet das energetische Stabilitätskriterium der Mechanik auf deformierbare Körper aus inelastischem, aber zeit-unabhängigen Material an: Ausgehend von einem Gleichgewichtszustand zu irgendeinem Zeitpunkt  $t_0$  des aktuellen Belastungspfades wird gedanklich eine beliebige zusätzliche äußere Last („Störung“) quasistatisch aufgebracht und wieder entfernt. Die Struktur wird stabil genannt, wenn die von den Störkräften bzw. Spannungen an den zugehö-

rigen Verschiebungen bzw. Verzerrungen verrichtete Arbeit positiv ist. Diese als *eingeschränktes Stabilitätskriterium* bezeichnete Definition bezieht sich auf einen festgelegten Anfangszustand. Um auch mit Belastungsänderungen einhergehende Instabilitäten zu behandeln, hat DRUCKER das klassische Kriterium erweitert: Wieder wird eine beliebige Störung zur Zeit  $t_0$  aufgebracht, die den tatsächlichen Belastungspfad ändert. Die Struktur heißt stabil, wenn die Arbeit der zusätzlichen Spannungen an den Verzerrungsdifferenzen im tatsächlichen und im gestörten Zustand nicht negativ ist. Dieses erweiterte Kriterium ist eher ein Eindeutigkeits- als ein Stabilitätskriterium. Anders als in klassischen Stabilitätsanalysen, bei denen die Störungen als infinitesimal klein angenommen werden (*small-scale stability*), sind bei den DRUCKERSchen Postulaten auch endlich große Störungen zugelassen (*large-scale stability*).

Aus diesen Kriterien leitet DRUCKER die Definition der *Werkstoffstabilität* ab, indem er jegliche geometrischen Effekte vernachlässigt, die einen wesentlichen Effekt auf die Strukturstabilität haben können. Man mag sich zur Veranschaulichung einen materiellen Würfel unter einem homogenen Spannungs- und Verzerrungszustand vorstellen. Das Konzept dient der Klassifizierung des Werkstoffverhaltens entsprechend den aus der Stabilitätstheorie bekannten Kategorien und erlaubt grundlegende Schlussfolgerungen über die Gestalt der Fließfläche und die Fließregel (PALMER, MAIER & DRUCKER [1967]). Es ist widerspruchsfrei sowohl auf Werkstoffe als auch auf Bauteile und ganze Strukturen anwendbar, wobei die beiden letztgenannten geometrische Effekte einschließen (BROCKS & BURTH [1977]).

## 1. Erweiterte Postulate

### 1.1 Postulat im Großen (*large-scale*)

Der tatsächliche Lastpfad  $\sigma_{ij}(t)$  wird durch den hochgestellten Index (1) der gestörte durch (2) bezeichnet. Die Störung wird zur Zeit  $t_0$  aufgebracht. Für eine endlich große Störung wird

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} (\sigma_{ij}^{(2)} - \sigma_{ij}^{(1)}) (\dot{\epsilon}_{ij}^{(2)} - \dot{\epsilon}_{ij}^{(1)}) dt > 0 \quad (1)$$

gefordert.

### 1.1 Postulat im Kleinen (*small-scale*)

Aus einer TAYLOR-Entwicklung folgt für infinitesimal benachbarte Zustände

$$(\dot{\sigma}_{ij}^{(2)} - \dot{\sigma}_{ij}^{(1)}) (\dot{\epsilon}_{ij}^{(2)} - \dot{\epsilon}_{ij}^{(1)}) > 0. \quad (2)$$

## 2. Eingeschränkte Postulate

Wenn der Zustand (1) zeit-unabhängig ist, also  $\sigma_{ij}^{(1)}(t) = \sigma_{ij}^{(1)}(t_0) = \sigma_{ij}^0$  und  $\dot{\epsilon}_{ij}^{(1)} = 0$ , und der Index (2) weggelassen wird,  $\sigma_{ij}^{(2)} = \sigma_{ij}$ , liefern die Gln. (1) bzw. (2) das

### 2.1 Postulat im Großen (large-scale)

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0) \dot{\epsilon}_{ij} dt > 0, \quad (3)$$

bzw. das

### 2.2 Postulat im Kleinen (small-scale)

$$\dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} (\dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p) > 0, \quad (4)$$

wobei die additive Zerlegung der Verzerrungsraten

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p. \quad (5)$$

eingeführt wurde.

## 2. Postulate für Lastzyklen

Die genannten Postulate betreffen die Arbeit der äußeren Kräfte bei monotoner Belastung. Zusätzlich fordert DRUCKER, dass die während eines Belastungszyklus aus aufgebracht und wieder entfernten Störungen  $\sigma_{ij}(t)$  bei festem Ausgangszustand  $\sigma_{ij}^0$  mit  $\varphi(\sigma_{ij}^0) \leq 0$  verrichtete Arbeit nicht negativ ist. Die entsprechenden Postulate sind natürlich nur für inelastisches Materialverhalten relevant, da die Arbeit während eines vollständigen Belastungszyklus in einem elastischen Werkstoff verschwindet.

Das *eingeschränkte Postulat für einen Lastzyklus im Großen* lautet mit der Annahme (5)

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0) \dot{\epsilon}_{ij}^p \geq 0 \quad \text{für} \quad \varphi(\sigma_{ij}^0) \leq 0 \quad (6)$$

und *für einen Lastzyklus im Kleinen*

$$\dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p \geq 0. \quad (7)$$

Diese Postulate enthalten nicht mehr die Arbeit der Störspannungen an den reversiblen Anteilen der Deformationen.

Nimmt man als Anfangszustand  $\sigma_{ij}^0$  einen „sicheren Zustand“  $\sigma_{ij}^{(s)}$  mit  $\varphi(\sigma_{ij}^{(s)}) < 0$  innerhalb der Fließfläche an, folgt aus (6) für einen großen Lastzyklus

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)}) \dot{\epsilon}_{ij}^p > 0 \quad \text{für} \quad \varphi(\sigma_{ij}^{(s)}) < 0. \quad (6a)$$

Für ideal-plastisches Material gilt für einen kleinen Lastzyklus speziell

$$\dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p = 0. \quad (7a)$$

Das Postulat (6), auch als *Minimalprinzip* von PRAGER bekannt, liefert die grundlegende Beziehung für den Beweis der Grenzlasterätze der Plastizität (DRUCKER, PRAGER & GREENBERG

[1952]) und der Einspielsätze. Werkstoffe, die dieses Postulat erfüllen haben konvexe Fließflächen und die plastischen Verzerrungsraten stehen senkrecht zur Fließfläche<sup>1</sup> (PHILLIPS & SIERAKOWSKI [1965], JUSTUSSON & PHILLIPS [1966]),

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (8)$$

Die Postulate sind von unterschiedlicher Stringenz. Die größte Einschränkung liefert das Postulat (1) für endliche Störungen. Alle anderen können daraus durch Einführung geringerer Einschränkungen hergeleitet werden. Die weiteren Postulate sind aber nicht zwangsläufig äquivalent und folgen keiner strengen Hierarchie. Ein entfestigender Werkstoff verletzt das eingeschränkte Postulat im Kleinen (7) aber kann durchaus das Postulat im Großen (6) erfüllen (PALMER, MAIER & DRUCKER [1967]). Die geringste Einschränkung stellen die Postulate im Kleinen (2) bzw. (4) dar, wobei (4) das klassische Stabilitätskriterium ist, während (2) eine Bedingung für Gleichgewichtsverzweigung liefert (BROCKS & BURTH [1977]).

BROCKS, W., BURTH, K.: "Über den Zusammenhang von Elementstabilität und Systemstabilität von Tragwerken aus elastischem und ideal-plastischem Werkstoff", *Forsch. Ing. Wes.* 43 (1977), 190-198.

DRUCKER, D.C.: "A more fundamental approach to plastic stress-strain relations", *Proc. 1st US Nat. Congr. Appl. Mech.*, ASME, 1951, 487-491.

DRUCKER, D.C.: "A definition of stable inelastic material", *Trans. ASME* 81, Series E, *J. Appl. Mech.* 26 (1959), 101-106.

Drucker, D.C.: "On the postulate of stability of material in the mechanics of continua", *J. de Mécanique* 3 (1964), 235-249.

DRUCKER, D.C., PRAGER, W., GREENBERG, H.J.: "Extended limit design theorems for continuous media", *Quart. App. Math.* 9 (1952), 380-389.

JUSTUSSON, J.W., PHILLIPS, A.: "Stability and convexity in plasticity", *Acta Mechanica* 2 (1966), 251-267.

KACHANOV, L.M.: *Foundations of the Theory of Plasticity*. Amsterdam, London: North-Holland Publ. Comp. (1971).

PALMER, A.C., MAIER, G., DRUCKER, D.C.: "Normality relations and convexity of yield surfaces for unstable materials or structural elements", *Trans. ASME, J. Appl. Mech.* (1967), 464-470.

PHILLIPS, A., SIERAKOWSKI, R.L.: "On the concept of the yield surface", *Acta Mechanica* 1 (1965), 29-35.

PRAGER, W., HODGE, P.G.: "Theorie ideal plastischer Körper". Wien: Springer Verl. (1954).

---

<sup>1</sup> auch als *Normalitätsregel* oder *assoziierte Fließregel* bekannt

## Plastischer Grenzzustand (Kollaps): Definitionen und Sätze

**Definition (I):** Der *plastische Grenzzustand* einer Struktur aus ideal-plastischem Werkstoff ist derjenige Belastungszustand, unter dem in der Belastungsgeschichte zum ersten Mal die Verschiebungen  $u_i$  unter gleichbleibenden äußeren Kräften zunehmen können, wenn die begleitenden geometrischen Änderungen in den Gleichgewichtsbedingungen vernachlässigt werden,

$$\dot{u}_i^{(c)} \neq 0 \quad \text{für} \quad \begin{cases} \dot{f}_j = 0 & \text{in } V \\ \dot{t}_j = 0 & \text{auf } \partial V \end{cases} .$$

Dabei ist  $\dot{u}_i^{(c)}$  das Geschwindigkeitsfeld des *Kollapsmechanismus*,  $f_j$  sind die Volumenkräfte und  $t_j$  die Oberflächenkräfte auf den Körper.

Bei dieser Definition von Kollaps werden die Gleichgewichtsbedingungen in der unverformten Konfiguration angesetzt werden. Im Gegensatz dazu bezieht die Definition der *Traglast* auch geometrisch nichtlineares Verhalten ein. Für geometrisch lineare Systeme stimmen also Traglast- und plastische Grenzlast (Kollapslast) überein.

Da der plastische Grenzzustand (pl) ein Gleichgewichtszustand ist, gilt nach dem Prinzip der virtuellen Arbeiten

$$\delta A^a = \int_{\partial V} t_j^{\text{pl}} \delta u_j dS + \int_V f_j^{\text{pl}} \delta u_j dV = \delta A^i = \int_V \sigma_{ij}^{\text{pl}} \delta \varepsilon_{ij} dV , \quad (9)$$

wobei die virtuellen Verschiebungs- und Verzerrungsfelder  $\delta u_j$  und  $\delta \varepsilon_{ij}$  *kinematisch zulässig* sein, d.h. die geometrischen Randbedingungen und die Kompatibilitätsbedingungen erfüllen müssen. Diese Bedingungen werden natürlich vom tatsächlichen Geschwindigkeitsfeld im Grenzlastzustand, also dem Kollapsmechanismus erfüllt,

$$\delta u_j = \dot{u}_j^{(c)} \Delta t \quad , \quad \delta \varepsilon_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{(c)} \Delta t = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j}^{(c)} + \dot{u}_{j,i}^{(c)}) \Delta t \quad , \quad (10)$$

und Gl. (9) kann

$$\int_{\partial V} t_j^{\text{pl}} \dot{u}_j^{(c)} dS + \int_V f_j^{\text{pl}} \dot{u}_j^{(c)} dV = \int_V \sigma_{ij}^{\text{pl}} \dot{\varepsilon}_{ij}^{(c)} dV \quad (11)$$

geschrieben werden. Werden entsprechend der Definition (I) der plastischen Grenzlast alle geometrischen Änderungen vernachlässigt, folgt für eine Zustandsänderung während  $\Delta t$

$$\int_{\partial V} \dot{t}_j \dot{u}_j^{(c)} dS + \int_V \dot{f}_j \dot{u}_j^{(c)} dV = \int_V \dot{\sigma}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^{(c)} dV \quad (12)$$

und mit Gln. (1) und (5)

$$0 = \int_V \dot{\sigma}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^{(c)} dV = \int_V \dot{\sigma}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^{(c)e} dV + \int_V \dot{\sigma}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^{(c)p} dV . \quad (13)$$

Wegen der Bedingungen (4) und (7a) muss  $\dot{\sigma}_{ij} = 0$  und damit nach dem HOOKEschen Gesetz auch  $\dot{\epsilon}_{ij}^{(c)e} = 0$  werden.

Satz (I): Beim Erreichen der plastischen Grenzlast (Kollapslast) verschwinden alle elastischen Verzerrungsgeschwindigkeiten,  $\dot{\epsilon}_{ij}^{(c)e} = 0^2$ , es treten nur plastische Verzerrungsgeschwindigkeiten  $\dot{\epsilon}_{ij}^{(c)p}$  auf, und die Spannungen bleiben konstant,

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{(c)} = \dot{\epsilon}_{ij}^{(c)p} \quad , \quad \dot{u}_i^{(c)} = \dot{u}_i^{(c)p} \quad , \quad \dot{\sigma}_{ij} = 0 \quad .$$

Definition (II): Ein Spannungszustand  $\sigma_{ij}^{(z)}$  heißt *statisch zulässig*, wenn er die Gleichgewichtsbedingungen  $\sigma_{ij,i}^{(z)} + f_j = 0$  im Volumen  $V$  und die Randbedingungen  $n_i \sigma_{ij,i}^{(z)} = t_j$  auf dem Rand  $\partial V$  des Körpers sowie die Fließbedingung  $\varphi(\sigma_{ij}^{(z)}) \leq 0$  erfüllt. Er heißt *statisch zulässig* und *sicher*,  $\sigma_{ij}^{(s)}$ , wenn  $\varphi(\sigma_{ij}^{(s)}) < 0$  ist.

Satz (II): Statischer Satz

- a) Solange zu jeder Belastungsstufe eine statisch zulässige und sichere Spannungsverteilung  $\sigma_{ij}^{(s)}$  gefunden werden kann, tritt unter diesem Belastungszustand kein Kollaps ein.
- b) Solange kein Kollaps auftritt, kann zu jeder Belastungsstufe eine statisch zulässige und sichere Spannungsverteilung gefunden werden.

Würde ein Kollapsmechanismus  $\dot{u}_i^{(c)}$  existieren, obwohl eine statisch zulässige und sichere Spannungsverteilung  $\sigma_{ij}^{(s)}$  gefunden werden kann, führt dies auf einen Widerspruch zum DRUCKERSchen Postulat (6a).

Definition (III): Ein Geschwindigkeitsfeld  $\dot{u}_i^{(k)}$  heißt *kinematisch möglich* (Kollapsmechanismus), wenn die geometrischen Randbedingungen auf  $\partial V$  und die Inkompressibilitätsbedingung  $\dot{\epsilon}_{ii}^{(k)} = \dot{u}_{i,i}^{(k)} = 0$ , d.h.  $\dot{\epsilon}_{ij}^{(k)p} = \dot{\epsilon}_{ij}^{(k)} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j}^{(k)} + \dot{u}_{j,i}^{(k)})$  in  $V$  erfüllt sind und die nach der Fließregel  $\dot{\epsilon}_{ij}^{(k)} = \dot{\lambda} \partial \varphi / \partial \sigma_{ij}$  zugehörigen Spannungen die Fließbedingung  $\varphi(\sigma_{ij}^{(k)}) \leq 0$  im Volumen  $V$  erfüllen.

Satz (III): Kinematischer Satz

- a) Wenn für irgendeine Belastung ein kinematisch möglicher (Kollaps-)Mechanismus  $\dot{u}_i^{(k)}$  gefunden werden kann, für den

$$\int_{\partial V} t_j \dot{u}_j^{(k)} dS + \int_V f_j \dot{u}_i^{(k)} dV > \int_V \sigma_{ij}^{(k)} \dot{\epsilon}_{ij}^{(k)} dV$$

gilt<sup>3</sup>, so wird diese Belastung vom System nicht getragen.

---

<sup>2</sup> Entgegen manchmal in der Literatur vertretenen Auffassungen muss also zur Herleitung der Grenzlastergebnisse kein *starr*-(ideal)plastisches Werkstoffverhalten vorausgesetzt werden.

- b) Wenn für irgendeine Belastung ein kinematisch möglicher (Kollaps-)Mechanismus  $\dot{u}_i^{(k)}$  gefunden werden kann, für den

$$\int_{\partial V} t_j \dot{u}_j^{(k)} dS + \int_V f_j \dot{u}_j^{(k)} dV = \int_V \sigma_{ij}^{(k)} \dot{\epsilon}_{ij}^{(k)} dV$$

gilt, so tritt unter dieser Belastung Kollaps ein.

Der Beweis von Teil (a) des Satzes erfolgt wieder durch Nachweis eines Widerspruchs zum DRUCKERSchen Postulat (6a) für den angenommenen Fall, dass ein statisch zulässiger und sicherer Spannungszustand  $\sigma_{ij}^{(s)}$  existiert. Die Annahme eines statisch zulässigen Spannungszustandes  $\sigma_{ij}^{(z)}$  bei Erfüllung der Gleichgewichtsbedingung in (b) führt dagegen auf keinen Widerspruch.

Aus Satz (II) und (III) folgt unmittelbar

Satz (IV): Wenn für irgendeine Belastung ein statisch zulässiger Spannungszustand  $\sigma_{ij}^{(z)}$  und ein kinematisch möglicher Kollapsmechanismus  $\dot{u}_j^{(k)}$  gefunden werden können, ist dies die plastische Grenzlast der Struktur,  $\sigma_{ij}^{(z)} = \sigma_{ij}^{(k)} = \sigma_{ij}^{pl}$ .

Weitere Folgerungen sind:

- Hinzufügen von (gewichtlossem) Material kann die plastische Grenzlast nicht erniedrigen.
- Entfernen von (gewichtlossem) Material kann die plastische Grenzlast nicht erhöhen.
- Erhöhen der Fließspannung in einem Teilbereich kann die plastische Grenzlast nicht erniedrigen.
- Eigenspannungen und Restdeformationen haben keinen Einfluss auf die plastische Grenzlast<sup>4</sup>, solange sie nicht als Geometrieänderungen in den Gleichgewichtsbedingungen zu berücksichtigen sind.

Beim Beweis der Sätze werden stetige Spannungs- und Verschiebungsfelder in  $V$  vorausgesetzt. Eine Verallgemeinerung auf unstetige Felder ist möglich unter Beachtung, dass die in einem nicht gerissenen Kontinuum möglichen Unstetigkeiten lediglich große Gradienten des Feldes innerhalb einer sehr dünnen Schicht sind. Ein einfaches Unstetigkeitsfeld der Spannungen zur Konstruktion eines *statisch zulässigen Spannungszustandes* bei gekerbten Proben wird weiter unten behandelt. Unstetige Verschiebungsfelder für *kinematisch mögliche Mechanismen* können mit Hilfe der *Gleitlinientheorie* konstruiert werden.

---

<sup>3</sup> d.h. dass  $\sigma_{ij}^{(k)}$  die Gleichgewichtsbedingung verletzt

<sup>4</sup> Eigenspannungen bilden für sich einen Gleichgewichtszustand mit  $\int_V \tilde{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV = 0$ , können also wegen der Linearität der Gleichungen abgetrennt werden.

Spezialisierung auf proportionale Belastung

Volumenkräfte werden vernachlässigt,  $f_j = 0$ , da sie nicht proportional aufgebracht werden können. Oberflächenkräfte nehmen während der Belastungsgeschichte proportional zueinander zu,  $t_j = \kappa t_j^0$ ,  $\kappa \geq 0$ , mit  $t_j^0$  als fester Referenzverteilung. Dann bezeichnen

- $\kappa_z > 1$  einen im Sinne der Definition (II) *statisch zulässigen* Lastfaktor,  $t_j^{(z)} = \kappa_z t_j^0$ ,
- $\kappa_s > 1$  einen im Sinne der Definition (II) *statisch zulässigen* und *sicheren* Lastfaktor,  $t_j^{(s)} = \kappa_s t_j^0$ ,
- $\kappa_k > 1$  einen im Sinne der Definition (III) zu einem *kinematisch möglichen Kollapsmechanismus* gehörenden Lastfaktor,  $t_j^{(k)} = \kappa_k t_j^0$ ,
- $\kappa_{pl} > 1$  den *plastischen Grenzlastfaktor*,  $t_j^{pl} = \kappa_{pl} t_j^0$ .

Satz (IIa): Statischer Satz, untere Grenze

Der plastische Grenzlastfaktor ist der größte statisch zulässige Lastfaktor,  $\kappa^* \leq \kappa_{pl}$  bzw.  $\kappa_s < \kappa_z \leq \kappa_{pl}$ .

Satz (IIIa): Kinematischer Satz, obere Grenze

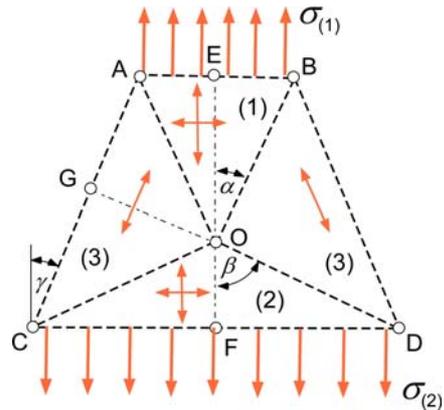
Der plastische Grenzlastfaktor ist der kleinste zu einem kinematisch möglichen Mechanismus führende Lastfaktor,  $\kappa_k \geq \kappa_{pl}$

Zusammenfassend gilt die Einschränkung des plastischen Grenzlastfaktors

$$\boxed{\kappa_s < \kappa_z \leq \kappa_{pl} \leq \kappa_k} \quad (14)$$

**Ein zweidimensionales Unstetigkeitsfeld der Spannungen**

Bei der Konstruktion *statisch zulässiger Spannungszustände* bedient man sich oft einfacher Unstetigkeitsfelder, die aus homogenen Teilfeldern zusammengesetzt sind. Als Beispiel wird das skizzierte Trapezfeld behandelt, das für die Anwendung auf gekerbte Strukturen geeignet ist. Die Geraden OA, OB, OC, OD sind Linien von Spannungsunstetigkeiten, entlang derer lediglich die Normalspannung  $\sigma$  und die Schubspannung  $\tau$  stetig sind.



- (a)  $\Delta AOB$ : Hauptspannungen  $\sigma_I^{(a)} = \sigma_a$  und  $\sigma_{II}^{(a)} \leq \sigma_I^{(a)}$   
 (b)  $\Delta COD$ : Hauptspannungen  $\sigma_I^{(b)} = \sigma_b < \sigma_a$  und  $\sigma_{II}^{(b)} \leq \sigma_I^{(b)}$

(c)  $\left\{ \begin{array}{l} \Delta AOC \\ \Delta BOD \end{array} \right\}$ : einachsiger Zug  $\sigma_1^{(c)}$  parallel zu AC bzw. BD<sup>5</sup>

Ein Spannungszustand heißt nach Definition (II) *statisch zulässig*, wenn er die Gleichgewichtsbedingungen und die Fließbedingung im gesamten Körpervolumen sowie die Randbedingungen auf der Körperoberfläche erfüllt. Nach Satz (IIa) liefert unter allen statisch zulässigen Belastungen  $\sigma_a^{(z)}$  die größte die beste Annäherung an die plastische Grenzlast  $\sigma_a^{pl}$ .

**Gleichgewichtsbedingungen** längs OA und OC

$$\sigma_{OA} = \sigma_I^{(a)} \sin^2 \alpha + \sigma_{II}^{(a)} \cos^2 \alpha = \sigma_I^{(c)} \sin^2 (\alpha + \gamma)$$

$$\tau_{OA} = (\sigma_I^{(a)} - \sigma_{II}^{(a)}) \sin \alpha \cos \alpha = \sigma_I^{(c)} \sin (\alpha + \gamma) \cos (\alpha + \gamma)$$

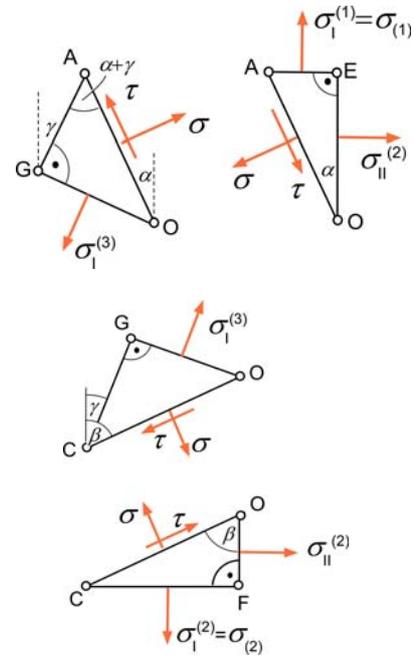
mit  $|\overline{AB'}| = |\overline{OA}| \sin \alpha$ ,  $|\overline{OB'}| = |\overline{OA}| \cos \alpha$   
 $|\overline{OC'}| = |\overline{OA}| \sin (\alpha + \gamma)$

$$\sigma_{OC} = \sigma_I^{(b)} \sin^2 \beta + \sigma_{II}^{(b)} \cos^2 \beta = \sigma_I^{(c)} \sin^2 (\beta - \gamma)$$

$$\tau_{OC} = (\sigma_I^{(b)} - \sigma_{II}^{(b)}) \sin \beta \cos \beta = \sigma_I^{(c)} \sin (\beta - \gamma) \cos (\beta - \gamma)$$

$$\sigma_I^{(a)} = \sigma_I^{(c)} \frac{\sin (\alpha + \gamma) \cos \gamma}{\sin \alpha}, \quad \sigma_{II}^{(a)} = \sigma_I^{(c)} \frac{\sin (\alpha + \gamma) \sin \gamma}{\cos \alpha}$$

$$\sigma_I^{(b)} = \sigma_I^{(c)} \frac{\sin (\beta - \gamma) \cos \gamma}{\sin \beta}, \quad \sigma_{II}^{(b)} = \sigma_I^{(c)} \frac{\sin (\beta - \gamma) \sin \gamma}{\cos \beta}$$



**Fließbedingungen**

*Ebener Spannungszustand (ESZ): VON MISES*

(a)  $\Delta AOB$ :  $(\sigma_I^{(a)})^2 - \sigma_I^{(a)} \sigma_{II}^{(a)} + (\sigma_{II}^{(a)})^2 \leq R_0 = \sqrt{3} \tau_0$

(b)  $\Delta COD$ :  $(\sigma_I^{(b)})^2 - \sigma_I^{(b)} \sigma_{II}^{(b)} + (\sigma_{II}^{(b)})^2 \leq R_0 = \sqrt{3} \tau_0$

(c)  $\left\{ \begin{array}{l} \Delta AOC \\ \Delta BOD \end{array} \right\}$ :  $\sigma_1^{(c)} \leq R_0 = \sqrt{3} \tau_0$

*Ebener Spannungszustand (ESZ): TRESCA*

(a)  $\Delta AOB$ :  $\sigma_I^{(a)} \leq 2 \tau_0 = R_0$

(b)  $\Delta COD$ :  $\sigma_I^{(b)} \leq 2 \tau_0 = R_0$

(c)  $\left\{ \begin{array}{l} \Delta AOC \\ \Delta BOD \end{array} \right\}$ :  $\sigma_1^{(c)} \leq 2 \tau_0 = R_0$

<sup>5</sup> Man beachte, dass hier der hochgestellte Index (c) die Dreiecke AOC bzw. BOD bezeichnet und nicht den Kollapsmechanismus.

*Ebener Verzerrungszustand (EVZ): VON MISES bzw. TRESCA*

$$(a) \Delta AOB: \quad \sigma_I^{(a)} - \sigma_{II}^{(a)} \leq 2\tau_0$$

$$(b) \Delta COD: \quad \sigma_I^{(b)} - \sigma_{II}^{(b)} \leq 2\tau_0$$

$$(c) \left\{ \begin{array}{l} \Delta AOC \\ \Delta BOD \end{array} \right\}: \quad \sigma_I^{(c)} \leq 2\tau_0$$

$$\text{mit der Schubfließgrenze } \tau_0 = \begin{cases} R_0/2 & \text{nach Tresca} \\ R_0/\sqrt{3} & \text{nach von Mises} \end{cases}$$

**Statisch zulässige Belastung**  $\sigma_a^{(z)} = [\sigma_I^{(a)}]_{\max} \leq \sigma_a^{\text{pl}}$

$$\text{ESZ VON MISES} \quad \sigma_a^{(z) \text{ ESZ(M)}} = [\sigma_I^{(a)}]_{\max} = \frac{2}{\sqrt{3}} R_0 = 2\tau_0$$

$$\sigma_{II}^{(a)} = \frac{1}{\sqrt{3}} R_0 = \tau_0$$

$$\cos^2 \gamma = 2 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{R_0}{\sigma_I^{(c)}} \right) \leq 2 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \Rightarrow \quad \boxed{\gamma \geq 23^\circ}$$

$$\text{ESZ TRESCA} \quad \sigma_a^{(z) \text{ ESZ(T)}} = [\sigma_I^{(a)}]_{\max} = 2\tau_0 = R_0$$

$$\text{sofern } \sigma_I^{(c)} \leq \sigma_I^{(a)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha \leq \frac{\pi}{2} - \gamma}$$

$$\text{EVZ} \quad \sigma_I^{(c)} = 2\tau_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha \geq \frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}} \quad \text{aus } \sigma_I^{(a)} - \sigma_{II}^{(a)} \leq \sigma_I^{(c)}$$

Wenn  $\sigma_a = \sigma_I^{(a)}$  den größten Wert annehmen soll, muss wegen der Gleichgewichtsbedingung  $\alpha = \pi/4 - \gamma/2$  als kleinster Wert der Ungleichung gewählt werden. Daraus folgt

$$\sigma_a^{(z) \text{ EVZ}} = [\sigma_I^{(a)}]_{\max} = 2\tau_0 \cos^2 \gamma \left[ 1 + \cot \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} \right) \tan \gamma \right]$$

Der Winkel  $\gamma$  ist entweder durch die Geometrie der Struktur vorgegeben oder kann wegen Satz (IIa) bzw. Gl. (14) aus einer Extremalbedingung bestimmt werden.

## ASTM E 1823:

### Standard Terminology Relating to Fatigue and Fracture Testing

**Crack extension,  $\Delta a$**  – an increase in crack size.

**Crack-extension force,  $G$**  – the elastic energy per unit of new separation area that is made available at the front of an ideal crack in an elastic solid during a virtual increment of forward crack extension.

**Crack-extension resistance,  $K_R$ ,  $G_R$  or  $J_R$**  – a measure of the resistance of a material to crack extension expressed in terms of the stress-intensity factor,  $K$ ; crack-extension force,  $G$ ; or values of  $J$  derived using the  $J$ -integral concept.

**Crack-mouth opening displacement (CMOD),  $2v_m$**  – the Mode I (also called opening-mode) component of crack displacement resulting from the total deformation (elastic plus plastic), measured under force at the location on a crack surface that has the greatest elastic displacement per unit force.

**Crack-tip opening displacement (CTOD),  $\delta$**  – the crack displacement resulting from the total deformation (elastic plus plastic) at variously defined locations near the original (prior to force application) crack tip.

**Crack-tip plane strain** – a stress-strain field (near the crack tip) that approaches plane strain to a degree required by an empirical criterion.

**Crack-tip plane stress** – a stress-strain field (near the crack tip) that is not in plane strain.

**Fracture toughness** – a generic term for measures of resistance to extension of a crack.

**$J$ -R curve** – a plot of resistance to stable crack extension,  $\Delta a_p$ .

**Plane-strain fracture toughness,  $K_{Ic}$**  – the crack-extension resistance under conditions of crack-tip plane strain in Mode I for slow rates of loading under predominantly linear-elastic conditions and negligible plastic-zone adjustment. The stress intensity factor,  $K_{Ic}$ , is measured using the operational procedure (and satisfying all of the validity requirements) specified in Test Method E 399, that provides for the measurement of crack-extension resistance at the onset (2% or less) of crack extension and provides operational definitions of crack-tip sharpness, onset of crack-extension, and crack-tip plane strain.

**Plane-strain fracture toughness,  $J_{Ic}$**  – the crack-extension resistance under conditions of crack-tip plane strain in Mode I with slow rates of loading and substantial plastic deformation. The  $J$ -integral,  $J_{Ic}$ , is measured using the operational procedure (and satisfying all of the validity requirements) specified in Test Method E 1820, that provides for the measurement of crack-extension resistance near the onset of stable crack extension.

**R curve** – a plot of crack-extension resistance as a function of stable crack extension,  $\Delta a_p$  or  $\Delta a_e$ .

**Stable crack extension** – a displacement-controlled crack extension beyond the stretch-zone width. The extension stops when the applied displacement is held constant.

**ASTM E 399:**  
**Standard Test Method for Linear-Elastic Plane-Strain Fracture Toughness**  
 **$K_{Ic}$  of Metallic Materials**

### Significance and Use

- Characterizes the resistance of a material to fracture in a neutral environment in the presence of a sharp crack under essentially linear-elastic stress and **severe tensile constraint**, such that (1) the state of stress near the crack front approaches **tritentile plane strain**, and (2) the **crack-tip plastic zone is small** compared to the crack size, specimen thickness, and ligament ahead of the crack;
- Is believed to represent a **lower limiting value** of fracture toughness;
- May be used to estimate the relation between failure stress and crack size for a material in service wherein the conditions of high constraint described above would be expected;
- Only if the dimensions of the product are sufficient to provide specimens of the size required for valid  $K_{Ic}$  determination.

### Specimen Size, Configuration and Preparation

- Specimen size

Ligament  $(W - a) \geq 2.5 \left( \frac{K_{Ic}}{\sigma_{YS}} \right)^2$  where  $\sigma_{YS}$  is the 0.2 % offset yield strength

Meeting this requirement cannot be assured in advance. Thus, specimen dimensions shall be conservatively selected for the first test in a series.

- Specimen configurations
  - **SE(B)**: Single-edge-notched and fatigue precracked beam loaded in three-point bending; support span  $S = 4 W$ , thickness  $B = W/2$ ,  $W =$  width;
  - **C(T)**: Compact specimen, single-edge-notched and fatigue precracked plate loaded in tension; thickness  $B = W/2$ ;
  - **DC(T)**: Disk-shaped compact specimen, single-edge-notched and fatigue precracked disc segment loaded in tension; thickness  $B = W/2$ ;
  - **A(T)**: Arc-shaped tension specimen, single-edge-notched and fatigue precracked ring segment loaded in tension; radius ratio  $r_1/r_2$  unspecified;
  - **A(B)**: Arc-shaped bend specimen, single-edge-notched and fatigue precracked ring segment loaded in bending; radius ratio  $r_1/r_2 = 0.6 \div 1.0$  for  $S/W = 4$  and  $r_1/r_2 = 0.4 \div 1.0$  for  $S/W = 3$ ;
- Specimen preparation
 

Fatigue precracking from starter notch; crack size (total size of crack starter plus fatigue crack)  $0.45 W \div 0.55 W$

### Calculation and Interpretation

Determination of force  $P_Q$  by a 5% offset secant in the force-displacement record; if  $P_{max}/P_Q \leq 1.1$  proceed to calculate  $K_Q$

$$K_Q = \frac{P_Q}{BW} Y \left( \frac{a}{W} \right) \quad \text{depending on specimen configuration}$$

If size condition  $(W - a) \geq 2.5 (K_Q / \sigma_{YS})^2$  is met, then  $K_{Ic} = K_Q$

**ASTM E 1820:**  
**Standard Test Method for Measurement of Fracture Toughness**

### Scope

Determination of fracture toughness of metallic materials using the parameters  $K$ ,  $J$ , and CTOD ( $\delta$ ).

### Terminology

- $\delta_{Ic}$  near the onset of slow stable crack extension,  $\Delta a_p = 0.2$  mm,  
 $\delta_c$  at the onset of unstable crack extension,  $\Delta a_p < 0.2$  mm,  
 $\delta_u$  at the onset of unstable crack extension,  $\Delta a_p > 0.2$  mm,  
 $\delta_c^*$  fracture toughness at fracture instability prior to the onset of significant stable tearing crack extension,  
 $J_c$  fracture toughness at fracture instability prior to the onset of significant stable tearing crack extension,  
 $J_u$  fracture instability after the onset of significant stable tearing crack extension,

### Significance and Use

Assuming the existence of a preexisting, sharp, fatigue crack, the material fracture toughness values identified by this test method characterize its resistance to

- (1) Fracture of a stationary crack
- (2) Fracture after some stable tearing
- (3) Stable tearing onset
- (4) Sustained stable tearing

This test method is particularly useful when the material response cannot be anticipated before the test.

- Serve as a basis for material comparison, selection and quality assurance; rank materials within a similar yield strength range;
- Serve as a basis for structural flaw tolerance assessment; awareness of differences that may exist between laboratory test and field conditions is required.

## Cautionary statements

- Fracture after some stable tearing ... is sensitive to material inhomogeneity and to constraint variations that may be induced to planar geometry, thickness differences, mode of loading, and structural details;
- $J$ - $R$  curve from bend-type specimens, SE(B), C(T), DC(T), has been observed to be conservative with respect to results from tensile loading configurations;
- The values of  $\delta_c$ ,  $\delta_u$ ,  $J_c$ , and  $J_u$ , may be affected by specimen dimensions.

**ASTM E 561–05:****Standard Test Method for  $K$ - $R$  curve Determination****Scope**

Determination of the resistance to fracture under Mode I loading ... using M(T), C(T), or crack-line wedge-loaded C(W) specimen; continuous record of toughness development in terms of  $K_R$  plotted against crack extension.

Materials are not limited by strength, thickness or toughness, so long as specimens are of sufficient size to remain predominantly elastic.

**Calculation and Interpretation**

Plot of crack extension resistance  $K_R$  as a function of effective crack extension  $\Delta a_e$ .

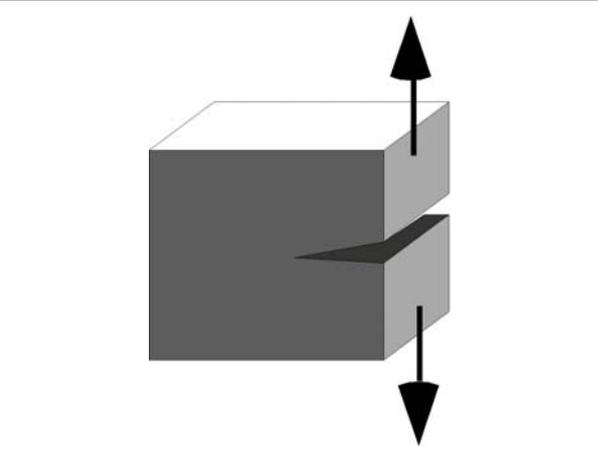
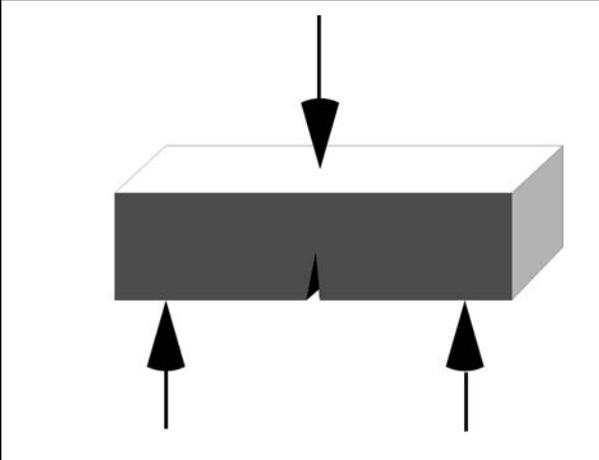
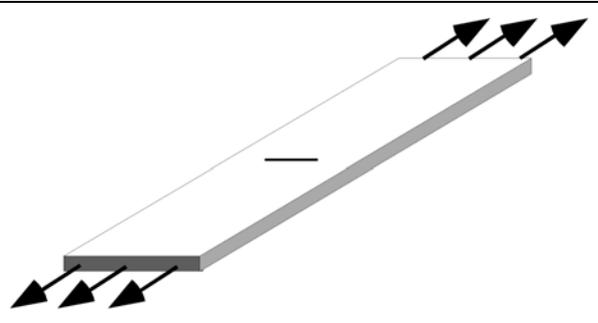
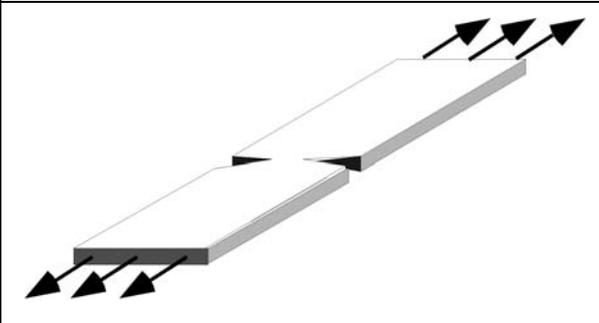
- Measurement of physical crack size by direct observation and then calculating the effective crack size  $a_e$  by adding the plastic zone size,  $r_Y = (1/2\pi)(K/\sigma_{YS})^2$ ;
- Measurement of physical crack size by unloading compliance and then calculating the effective crack size  $a_e$  by adding the plastic zone size,  $r_Y = (1/2\pi)(K/\sigma_{YS})^2$ ;
- Measurement of the effective crack size  $a_e$  directly by loading compliance.

**ASTM E 2472:****Standard Test Method for Determination of Resistance to Stable Crack Extension under Low-Constraint Conditions****Scope**

Determination of the resistance against stable crack extension of metallic materials under Mode I loading in terms of critical crack-tip opening angle (CTOA) and/or crack opening displacement (COD) as  $\delta_5$  resistance curve.

Materials are not limited by strength, thickness or toughness, as long as  $a/B \geq 4$  and  $b/B \geq 4$ , ensuring low constraint conditions in M(T) and C(T) specimens.

Fracture Mechanics Specimens

	
<p>C(T)</p>	<p>SE(B)</p>
	
<p>M(T)</p>	<p>DE(T)</p>

## Verformung, Schädigung, Bruch

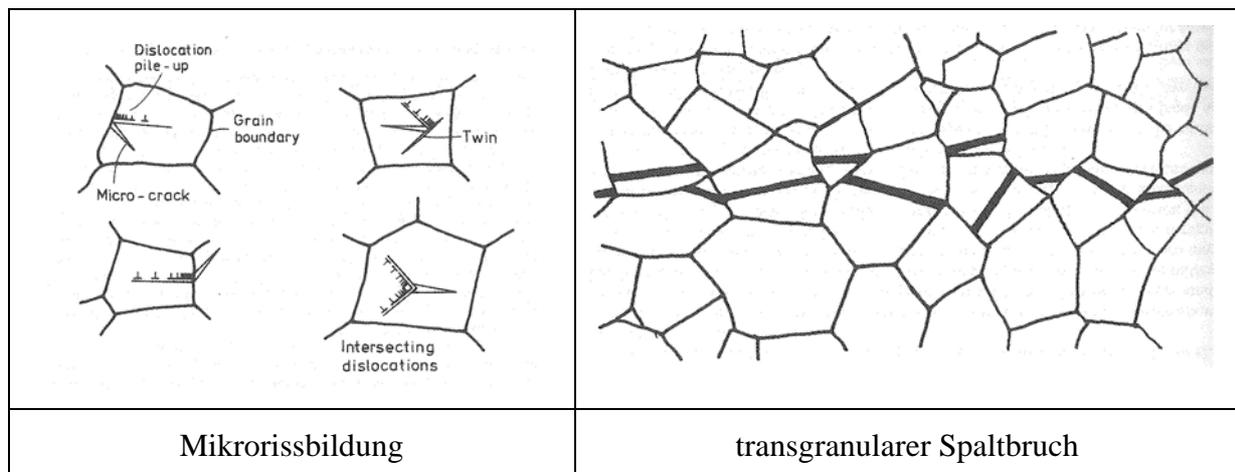
Bei **Verformungen** bleibt der Zusammenhalt der Materie erhalten. *Elastische* Verformungen (von Metallen) erfolgen auf der atomaren Ebene durch reversible Änderung der Atomabstände. *Plastische* Verformungen spielen sich auf der Kristallebene durch bleibende Verschiebung von Atomen gegeneinander, das Wandern von *Versetzungen*, ab. Das Materialverhalten ist auch bei inelastischen (irreversiblen) Verformungen im allgemeinen *verfestigend*, d.h. *stabil* im DRUCKERSchen Sinne <sup>1</sup>.

Demgegenüber treten bei **Schädigung** flächen- oder volumenhafte Diskontinuitäten auf der *Mikroebene* (Mikrorisse, -hohlräume) im Material auf. Ursachen sind lokale Verformungskonzentrationen, z.B. Bewegung und Aufstau von Versetzungen in Metallen, Veränderungen molekularer Bindungen in organischen Stoffen, Mikro-Dekohäsionen bei Mineralien. Schädigungsentwicklung ist ein irreversibler Prozess, dessen globale Erscheinung von inelastischen Verformungen zunächst nicht unterscheidbar ist. Die Auswirkungen von Schädigung sind aber entscheidend unterschiedlich zu Verformungen. Schädigung führt zu *entfestigendem*, d.h. *instabilem* Materialverhalten und kann makroskopische Rissentstehung und -wachstum sowie schließlich globales Versagen hervorrufen.

**Bruch** ist der Oberbegriff für die Entstehung flächen- oder volumenhafte Diskontinuitäten auf der *Makroebene*, die zum *globalen Versagen*, dem *Gewaltbruch*, führen. Versagen bei makroskopisch elastischen Verformungen heißt *Sprödbbruch* und ist auf der Mikroebene durch trans- oder interkristallinen *Spaltbruch* gekennzeichnet. *Fließbruch* nennt man das Versagen bei makroskopisch plastischen Verformungen, das auf der Bruchfläche als *Wabenbruch* erscheint. *Ermüdungsbruch* ist Rissentstehung und -wachstum durch Mikroplastizität unter Wechsellasten. Bei *Kriechbruch* erfolgen Rissentstehung und -wachstum aufgrund von Schädigung unter Temperaturbelastung. Beide führen nach Erreichen einer kritischen Risslänge zum globalen Versagen (Gewaltbruch).

### Lokale und mikromechanische Ansätze

- **Sprödbbruch / Spaltbruch**



<sup>1</sup> siehe Manuskript „Grenzlast“

Mikrorissbildung und -vereinigung sind spannungskontrolliert. Eine Übersicht über Modelle gibt FRANÇOIS [2001] in LEMAITRE [2001].

RITCHIE, KNOTT & RICE [1973] stellten als erste ein deterministisches Modell für eine kritische Versagensspannung  $\sigma_c$  (Spaltbruchspannung) auf, das nach den Autoren benannte RKR-Modell. Da in der LEBM die Spannungen an der Rissspitze singular sind, muss zusätzlich eine kritische Länge  $x_c$  als Abstand von der Rissspitze eingeführt werden, in dem die Spaltbruchspannung bei Initiierung von Spaltbruch überschritten wird:

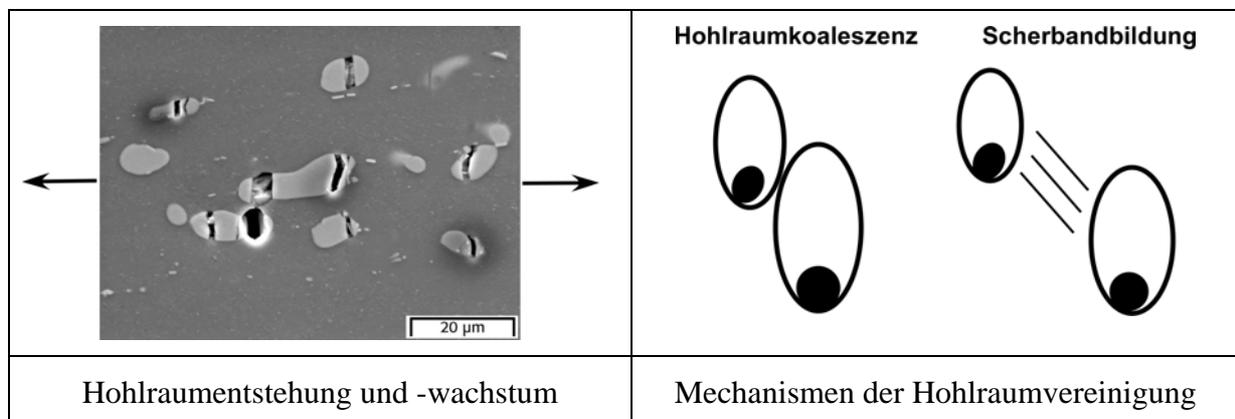
$$\sigma_{yy}(x_c) \leq \sigma_c. \quad (1)$$

Die kritische Länge ist materialspezifisch und von der Größenordnung zweier Korndurchmesser.

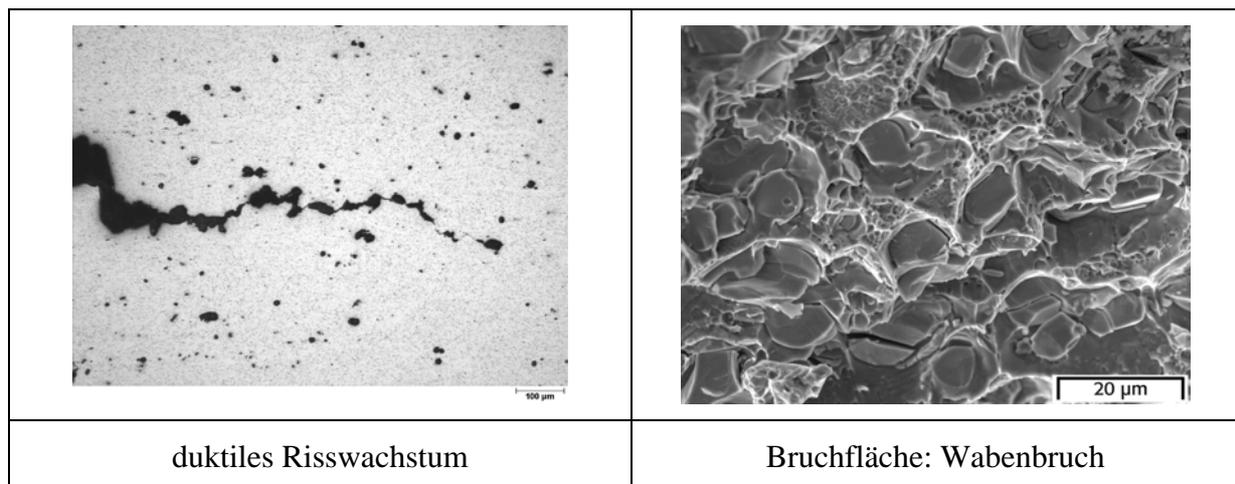
Das französische Autorenkollektiv<sup>2</sup> BEREMIN [1983] hat ein als *local approach* bezeichnetes statistisches Modell vorgeschlagen, das auf dem Konzept des *weakest link* und der WEIBULL-Spannung (WEIBULL [1951]) beruht und mit dessen Hilfe eine Versagenswahrscheinlichkeit berechnet werden kann (siehe HILD [2001] in LEMAITRE [2001]).

• **Duktile Schädigung und duktiles Rißwachstum**

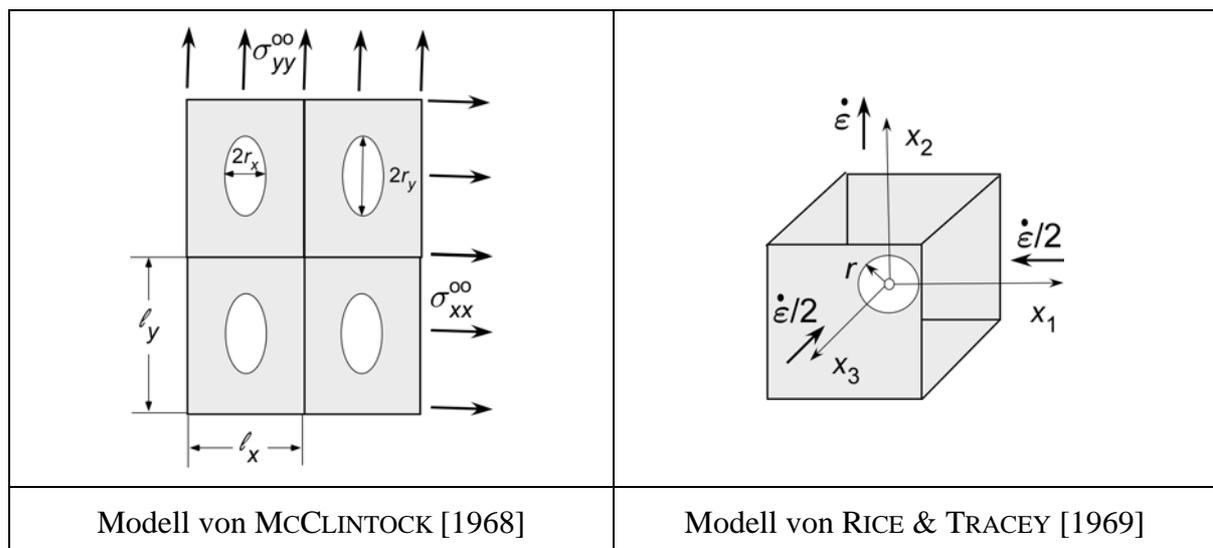
Duktile Schädigung in Metallen erfolgt durch Entstehung von Hohlräumen an Partikeln oder Ausscheidungen, deren Wachstum und -vereinigung. Sie erfolgt dehnungskontrolliert, ist aber abhängig vom hydrostatischen Spannungszustand.



<sup>2</sup> Dominique François, François Mudry, André Pineau



Die ersten Modelle zur Berechnung von Hohlraumwachstum in einem duktilen Material wurden von MCCLINTOCK [1968] und RICE & TRACEY [1969] entwickelt. Das Modell von MCCLINTOCK ist zweidimensional unter Annahme des EVZ, das Modell von RICE & TRACEY dreidimensional und kugelsymmetrisch. Beide Modelle zeigen die Bedeutung des hydrostatischen Spannungszustandes und erklären damit die von BRIDGMEN [1952] experimentell gefundene Abhängigkeit der Bruchdehnung vom hydrostatischen Spannungsanteil.



MCCLINTOCK [1968] betrachtet eine regelmäßige Anordnung von *Einheitszellen* der Abmessungen  $l_x \times l_y$  mit elliptischen Hohlräumen der Hauptachsen  $r_x, r_y$  im EVZ und führt das additive logarithmische Schädigungsmaß

$$\eta_{zx} = \int d\eta_{zx} = \int \frac{d[\ln(r_x/l_x)]}{\ln(l_x^0/r_x^0)} \leq 1. \quad (2)$$

ein, das bei Bruch, also Hohlraumvereinigung

$$2r_x = l_x. \quad (3)$$

den Wert 1 annimmt. Für ein nach der LUDVIK-Gleichung

$$\bar{\sigma} = c\bar{\varepsilon}^n. \quad (4)$$

potenzverfestigendes Material<sup>3</sup> kann unter Vernachlässigung der (reversiblen) elastischen Verformungen das Hohlraumwachstum berechnet werden

$$\frac{d\eta_{zx}}{d\bar{\varepsilon}^\infty} = \frac{1}{\ln(\ell_x^0/r_x^0)} \left[ \frac{\sqrt{3}}{2(1-n)} \sinh \left( \frac{\sqrt{3}(1-n)(\sigma_{xx}^\infty + \sigma_{yy}^\infty)}{2\bar{\sigma}} \right) + \frac{3}{4} \frac{\sigma_{xx}^\infty - \sigma_{yy}^\infty}{\bar{\sigma}} \right], \quad (5)$$

und mit dem Koaleszenzkriterium (3) erhält man die *Bruchdehnung*

$$\varepsilon_f = \frac{(1-n) \ln(\ell_x^0/r_x^0)}{\sinh \left( \left[ (1-n)(\sigma_{xx}^\infty + \sigma_{yy}^\infty) / (2\bar{\sigma}/\sqrt{3}) \right] \right)}, \quad (6)$$

die exponentiell von dem Quotienten aus hydrostatischer Spannung und Vergleichsspannung, der sog. *Spannungsmehrachsigkeit*

$$\frac{\sigma_h}{\bar{\sigma}} = \frac{\sigma_{kk}}{3\bar{\sigma}} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2\bar{\sigma}} \quad (\text{EVZ}) \quad (7)$$

abhängt.

RICE & TRACEY [1969] betrachten einen kugelförmigen Hohlraum in einem Dehnungsfeld<sup>4</sup>  $\dot{\varepsilon}_{yy} = \dot{\varepsilon}$ ,  $\dot{\varepsilon}_{xx} = \dot{\varepsilon}_{zz} = -\frac{1}{2}\dot{\varepsilon}$  eines „unendlichen“ *starr-idealplastischen* Kontinuums und berechnen dessen Dilationsrate näherungsweise für große Mehrachsigkeiten

$$D = \frac{\dot{r}}{\dot{\varepsilon}r} \approx 0.283 \exp \left( \frac{2\sigma_h}{3\bar{\sigma}} \right). \quad (8)$$

Auch dieses Modell zeigt die exponentielle Abhängigkeit des Hohlraumwachstums von der Spannungsmehrachsigkeit

Basierend auf dem Hohlraumwachstumsmodell hat BEREMIN [1981] den *local approach* für duktilen Risswachstum formuliert. Ebenso wie das Spaltbruchmodell erlaubt dieser Ansatz lediglich eine nachträgliche Berechnung der Schädigung aus dem mit einem klassischen elastisch-plastischen Stoffgesetz berechneten Spannungs- und Dehnungsfeld. Eine Kopplung, bei der die Schädigung als innere Variable in das Stoffgesetz eingeht, erfolgt in den Modellen von GURSON [1977] und ROUSSELIER [1987].

<sup>3</sup>  $\bar{\sigma}$ ,  $\bar{\varepsilon}$  sind die Vergleichsspannung bzw. Vergleichsdehnung nach VON MISES, siehe Gln. (15a) und (16a) im Manuskript „Plastizität“.

<sup>4</sup> Man beachte die Bedingung der Volumenkonstanz bei plastischen Deformationen  
 $\dot{\varepsilon}_{xx} + \dot{\varepsilon}_{yy} + \dot{\varepsilon}_{zz} = 0$

## Rissspitzenmodelle und Risswachstumskriterien

Die punktförmige *Rissspitze* der klassischen Bruchmechanik ist eine mathematische Idealisierung. In der Realität existiert ein endlicher Bereich, die *Prozesszone*, in dem das Material geschädigt und schließlich neue Rissoberflächen geschaffen werden. Dort spielen die mikro-mechanischen Prozesse von Schädigung und Separation eine wichtige Rolle. Es gibt drei Abstraktionsebenen der Modellierung:

1. In der klassischen *Bruchmechanik* findet keine spezielle Modellierung der Schädigungsprozesse statt. Zur Beschreibung des Materialverhaltens werden konventionelle Stoffgesetze verwendet, z.B. Elastizität, Plastizität, Viskoplastizität. Die Prozesszone ist ein Punkt, und ein *makroskopisches Bruchkriterium* zur Beschreibung von Risswachstum ist erforderlich, z.B. auf der Basis  $K$ ,  $J$ , CTOD, CTOA,  $C^*$  <sup>5</sup>.
2. Separation materieller Flächen wird modelliert. Die Prozesszone ist eine Fläche, und ein Separations- oder *Dekohäsionsgesetz* beschreibt die Schaffung neuer Oberflächen <sup>6</sup>. Das Material außerhalb der *Kohäsivzone* wird durch ein konventionelle Stoffgesetz beschrieben.
3. Eine Entfestigung des Werkstoffes wird durch Einführung weiterer interner Variable in das Werkstoffgesetz zur Beschreibung der lokalen Schädigung berücksichtigt. Die Prozesszone ist ein Volumen, und ein *Evolutionsgesetz für die Schädigungsvariable* repräsentiert das Bruchkriterium. Hierbei unterscheidet man
  - **mikromechanische Modelle**, die die *physikalischen* Prozesse der Schädigung auf der Mikroebene, also Initiierung, Wachstum und Vereinigung von Hohlräumen, Bildung von Mikrorissen usw. beschreiben, und
  - **kontinuumsmechanische Modelle**, die *phänomenologische* Stoffgleichungen für Spannungen und Verzerrungen unter Einbeziehung der Schädigungsentwicklung, häufig basierend auf thermodynamischen Prinzipien aufstellen.

## Konzept des repräsentativen Volumenelements

In der klassischen (lokalen) Kontinuumsmechanik sind materielle Elemente infinitesimale Umgebungen materieller Punkte,  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z \rightarrow 0$ . Für die betrachteten idealisierten Werkstoffe sind Materialeigenschaften, Spannungen und Dehnungen homogen im Volumen  $\Delta V$ . In realen Werkstoffen ist die materielle Umgebung dagegen nicht homogen, sondern das materielle Element hat eine komplexe und veränderliche Mikrostruktur.

Die *Mikromechanik* stellt sich die Aufgabe, das kontinuumsmechanische Stoffgesetz durch Größen auszudrücken, die die Mikrostruktur und deren Eigenschaften charakterisieren

---

<sup>5</sup>  $C^*$  ist das Äquivalent zum  $J$ -Integral bei viskoplastischem Materialverhalten (Kriechen)

<sup>6</sup> siehe Manuskript „Kohäsivmodell“

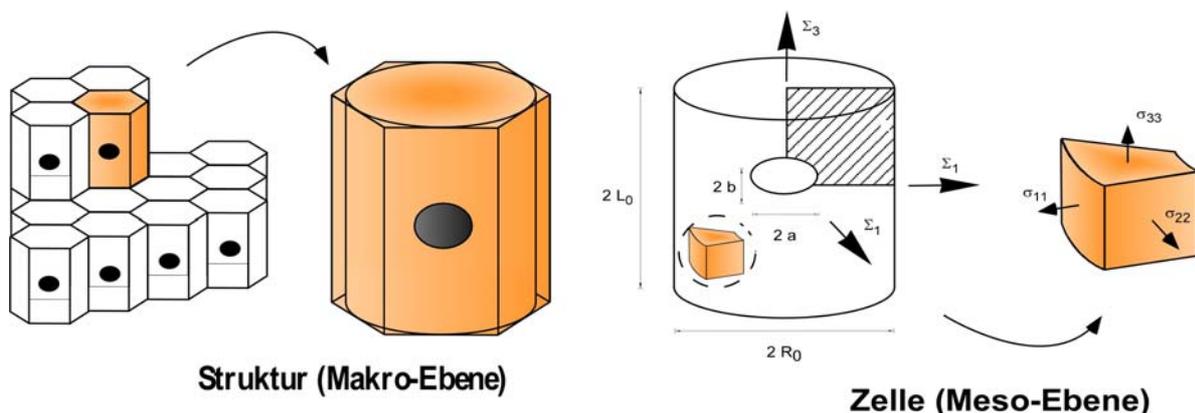
(NEMAT-NASSER & HORI [1993]). Hierzu bedient man sich des Konzeptes *repräsentativer Volumenelemente* (RVE). Ein RVE ist ein materielles Volumen, das als statistisch repräsentativ für die Umgebung eines beliebigen materiellen Punktes angesehen wird. Für periodische Mikrostrukturen spricht man auch von *Einheitszellen*.

Das konstitutive Verhalten wird auf einer *Meso-Ebene* durch mesoskopische Spannungs- und Verzerrungsfelder beschrieben, die durch *Homogenisierung*, d.h. Mittelung über das RVE definiert sind

$$\Sigma_{ij} = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \sigma_{ij}(x_k) dV = \frac{1}{V_0} \int_{\partial V_0} x_i t_j dS, \quad (9)$$

$$E_{ij} = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) dV = \frac{1}{V_0} \int_{\partial V_0} \frac{1}{2} (n_i u_j + n_j u_i) dS. \quad (10)$$

Typische Einheitszellen zur Beschreibung von duktiler Schädigung sind Zylinder mit kugelförmigen oder ellipsoidischen Hohlräumen (KOPLIK & NEEDLEMAN [1988], BROCKS et al. [1995]). Die Entwicklung von Stoffgesetzen für „poröse“ plastische Werkstoffe (porous metal plasticity) ist aber nur ein mögliches Anwendungsgebiet der Mikromechanik.



## Das GURSON-Modell

GURSON [1977] hat durch Homogenisierung die mesoskopischen Fließfläche für zwei- und dreidimensionale rotationssymmetrische Einheitszellen bei idealplastischem Werkstoff berechnet,

$$\frac{\bar{\Sigma}^2}{R_0^2} + 2f \cosh\left(\frac{3\Sigma_h}{2R_0^2}\right) - 1 - f^2 = 0, \quad (11)$$

die vom (lokalen) Hohlraumanteil

$$f = \frac{\Delta V_{\text{void}}}{\Delta V_{\text{RVE}}}, \quad (12)$$

also der Schädigung abhängt. Für  $f=0$  geht Gl. (11) in die VON MISESSche Fließbedingung  $\bar{\Sigma}^2 - R_0^2 = 0$  über, wobei  $\bar{\Sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \Sigma'_{ij} \Sigma'_{ij}}$  die mesoskopische Vergleichsspannung im Sinne von Gl. (9) und  $R_0$  die Fließspannung des Matrixmaterials ist. Das Hohlraumwachstum folgt der

Evolutionsgleichung

$$\dot{f} = (1-f) \dot{E}_{kk}^p \quad (13)$$

die sich aus der Volumenkonstanz des plastischen Matrixmaterials ( $\Delta V_{\text{RVE}} - \Delta V_{\text{void}}$ ) ergibt. Man beachte aber, dass die mesoskopische plastische Volumendilatationsrate  $\dot{E}_{kk}^p$  des RVE wegen des Hohlraumes nicht Null ist. Gl. (11) beschränkt sich auf idealplastischen Werkstoff und berücksichtigt keine Interaktion zwischen benachbarten Hohlräumen. Für die Anwendung auf duktilen Risswachstum haben deshalb TVERGAARD und NEEDLEMAN zwischen 1982 und 1987 mehrere phänomenologische Modifikationen des Modells eingeführt. Hierzu gehören die Erweiterung auf verfestigenden Werkstoff, indem die Fließspannung  $R_0$  durch die Fließkurve  $R_F(\varepsilon_p)$  ersetzt wird, und die Einführung von drei Anpassungsparametern  $q_1, q_2, q_3$  sowie eines Schädigungsparameter  $f^*$  anstelle von  $f$ . Die so modifizierte Fließbedingung lautet

$$\frac{\bar{\Sigma}^2}{R_F^2(\varepsilon_p)} + 2q_1 f^* \cosh\left(q_2 \frac{3\Sigma_h}{2R_F^2(\varepsilon_p)}\right) - 1 - (q_3 f^*)^2 = 0. \quad (14)$$

Der Schädigungsparameter hängt mit dem Hohlraumanteil über die Gleichung

$$f^*(f) = \begin{cases} f & \text{für } f \leq f_c \\ f_c + \frac{f_u - f_c}{f_f - f_c} (f - f_c) & \text{für } f > f_c \end{cases}, \quad (15)$$

zusammen, mit den Hohlraumanteilen  $f_c$ , bei beginnender Koaleszenz und  $f_f$  bei finalem Versagen als weiteren Materialparametern, sowie

$$f_u = \frac{q_1 - \sqrt{q_1^2 - q_3}}{q_3} \quad (16)$$

als dem Maximalwert von  $f^*$ .

Die Fließfunktion (14) und die Schädigungsevolutionsgleichung (13) sind als GTN-Modell bekannt (TVERGAARD & NEEDLEMAN [2001] in LEMAITRE [2001]) und finden häufige Anwendungen bei der Simulation von duktilem Risswachstum in Metallen (z.B. BROCKS et al. [1995], BERNAUER & BROCKS [2002]).

Gl. (13) beschreibt das Hohlraumwachstum ausgehend von einem Anfangshohlraumanteil  $f_0$ . Evolutionsgleichungen für spannungs- oder dehnungsinduzierte Hohlraum nucleierung wurden von CHU & NEEDLEMAN [1980] eingeführt.

Eine ähnliche Fließfunktion hat ROUSSELIER [1987] auf der Grundlage der Kontinuumschädigungsmechanik (CDM) hergeleitet, siehe auch ROUSSELIER [2001] in LEMAITRE [2001].

## Kontinuumsschädigungsmechanik (Continuum Damage Mechanics, CDM)

Die Grundidee der CDM beruht auf der Vorstellung, dass innere Defekte, also Mikrohohlräume oder -risse zu einer Schwächung des Materials führen, indem sie die tragende Fläche eines Volumenelementes reduzieren, so dass anstelle des Querschnitts  $\Delta A$  eines RVE in einer Ebene senkrecht zur Flächennormalen  $\mathbf{n}$  nur eine „effektive“ Fläche

$$\Delta \tilde{A} = \Delta A - \Delta A_D \quad (16)$$

zur Übertragung der Spannungen zur Verfügung steht. Die Flächendichte der Defekte (Mikrorisse oder Schnitte von Mikrohohlräumen mit der Ebene) ist

$$D_{(\mathbf{n})} = \frac{\Delta A_D}{\Delta A} \quad (17)$$

und hängt i.a. von der Orientierung  $\mathbf{n}$  der Schnittebene ab. Für isotrope Schädigung ist die Defektdichte unabhängig von  $\mathbf{n}$ , und die Schädigung kann durch eine *skalare Variable*  $D$  beschrieben werden:

$$\Delta \tilde{A} = (1 - D) \Delta A \quad \text{mit} \quad D = \frac{\Delta A_D}{\Delta A} \quad (18)$$

Anisotrope Schädigung erfordert tensorielle Schädigungsvariable als

- Tensor 2. Stufe  $D_{ij}$ :  $\tilde{n}_i \Delta \tilde{A} = (\delta_{ij} - D_{ij}) n_j \Delta A$  (19)

- Tensor 4. Stufe  $D_{ijkl}$ :  $\tilde{\sigma}_{ij} m_i \tilde{n}_j \Delta \tilde{A} = \tilde{\sigma}_{ij} (\delta_{ik} \delta_{jl} - D_{ijkl}) m_k n_l \Delta A$  (20)

mit den Symmetrien  $D_{ijkl} = D_{ijlk} = D_{jikl} = D_{klij}$ .

Letztgenannter stellt den allgemeinsten Fall dar.

Mit Hilfe der effektiven Fläche werden *effektive Spannungen* definiert, und zwar

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{1 - D} \quad (21)$$

für *isotrope Schädigung* und

$$\tilde{\sigma}_{ij} = (\delta_{ik} \delta_{jl} - D_{ijkl})^{-1} \sigma_{kl} \quad (22)$$

für *anisotrope Schädigung* mit einem Schädigungstensor 4. Stufe. Bei Verwendung eines Schädigungstensors 2. Stufe sind zusätzliche Bedingungen erforderlich, u.a. die Gewährleistung der Symmetrie des effektiven Spannungstensors, da  $\tilde{\sigma}_{ij} = (\delta_{ik} - D_{ik})^{-1} \sigma_{kj}$  nicht symmetrisch ist.

CDM ist eine phänomenologische Theorie, die auf dieser Idee der effektiven Spannungen und dem *Prinzip der Verzerungsäquivalenz* beruht:

Das Stoffgesetz für ein geschädigtes Material ergibt sich aus den konstitutiven Gleichungen des ungeschädigten Materials, indem die Spannungen durch effektive Spannungen ersetzt werden.

Im Rahmen einer thermodynamisch konsistenten Theorie werden die Evolutionsgleichungen für die inneren Variablen von Verfestigung und Schädigung aus einem *Dissipationspotential*  $\Phi(\sigma_{ij}, \bar{\sigma}, \alpha_{ij}, Y)$  hergeleitet, das eine konvexe Funktion aller zu den Zustandsvariablen  $\varepsilon_{ij}^p, \bar{\varepsilon}^p, \xi_{ij}, D$  energetisch konjugierten Variablen ist.

$$\begin{aligned}
 \dot{\varepsilon}_{ij}^p &= \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} && \text{(Fließregel)} \\
 \dot{\bar{\varepsilon}}^p &= \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\sigma}} && \text{(isotrope Verfestigung)} \\
 \dot{\alpha}_{ij} &= \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial (-\xi_{ij})} && \text{(kinematische Verfestigung)} \\
 \dot{D} &= \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \quad \text{oder} \quad \dot{D}_{ij} = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial Y_{ij}} && \text{(Schädigung)}
 \end{aligned} \tag{23}$$

Das Dissipationspotential ist eine Verallgemeinerung des Fließpotentials der Plastizitätstheorie, und Gl. (23)<sub>1</sub> stellt die Fließregel (Normalitätsregel) dar. Es gewährleistet, dass der zweite Hauptsatz der Thermodynamik (positive Dissipationsleistung) erfüllt wird. Das Problem, wie es konkret für einen realen Werkstoff aussieht, kann allerdings allein durch eine thermodynamisch konsistente Formulierung nicht gelöst werden.

Eine umfassende Darstellung der CDM findet man in LEMAITRE [2001], Kapitel 6 und LEMAITRE & CHABOCHE [1990], Kapitel 7.

## Parameteridentifikation

Mit der zunehmenden Zahl von Parametern in konstitutiven Gleichungen stellt sich das Problem ihrer experimentellen Bestimmung. Im Gegensatz zu klassischen „Materialkennwerten“ wie *E*-Modul, Fließgrenze, die direkt aus einem Zugversuch bestimmt (gemessen) werden können, erfordern komplexe Materialmodelle *hybride Verfahren*, bei denen die Versuche numerisch simuliert und die Modellparameter durch Vergleich von rechnerischen und experimentellen Ergebnisse identifiziert werden (Mahnken [2004], BROCKS & STEGLICH [2007]). Neben der Methode der finiten Elemente (FEM) zur Lösung des mechanischen Randwertproblems (RWP) kommen dabei auch numerische Optimierungsverfahren, Evolutionsstrategien oder neuronale Netze zum Einsatz.

Das *Identifikationsproblem* wird wie folgt mathematisch formuliert:

Es sei  $\mathbf{R}(\mathbf{x}, t)$  die Reaktion oder Antwort einer Struktur in Form messbarer mechanischer Größen auf mechanische oder thermische Einwirkungen  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$  mit  $\mathbf{x}$  als den Ortskoordinaten und  $t$  als der Zeit. Die Antwort eines entsprechenden Modells kann durch ein Funktional,

$$\mathbf{R}_{\text{mod}}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}_{\tau=0}^t \{ \mathcal{G}, \mathbf{c}, \mathbf{F}(\mathbf{x}, \tau) \}, \quad (24)$$

in Abhängigkeit der Geometrie  $\mathcal{G}$ , der Materialparameter  $\mathbf{c}$  und der Belastungsgeschichte  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$  beschrieben werden. Das Funktional  $\mathcal{F}$  ist durch eine i.a. numerische Lösung des RWP's gegeben. Gl. (24) heißt *direktes Problem*, bei dem  $\mathcal{G}$ ,  $\mathbf{c}$  und  $\mathbf{F}$  Eingangsgrößen und  $\mathbf{R}_{\text{mod}}(\mathbf{x}, t)$  die Ausgangsgröße ist. Die Strukturantwort ist natürlich nur an einer endlichen Zahl geometrischer Punkte  $\mathbf{x}_i$  ( $i = 1, \dots, M$ ) und Zeitschritte  $t_j$  ( $j = 1, \dots, K$ ) gegeben. Für feste Geometrie  $\mathcal{G}$  und Belastungsgeschichte  $\mathbf{F}$  sowie unter der Annahme, dass eine eindeutige Lösung des direkten Problems Gl. (24) und ein Verfahren, sie zu finden, existieren, reduziert sich das Funktional  $\mathcal{F}$  zu einer Abbildung,

$$\mathbf{c} \mapsto_{\mathcal{G}, \mathbf{F}} \mathbf{R}_{\text{mod}} : \mathbf{R}_{\text{mod}} = \mathcal{R}(\mathbf{c}), \quad (25)$$

mit  $\mathbf{c} \in \mathbb{C}$  bzw.  $\mathbf{R}_{\text{mod}} \in \mathbb{R}$  als Mengen physikalisch sinnvoller Materialparameter bzw. Systemantworten. Das zugehörige *inverse Problem*, besteht darin, die Modellparameter  $\mathbf{c}$  für eine gegebene, experimentell gemessene Systemantwort  $\mathbf{R}$  zu finden:

$$\mathbf{R} \mapsto \mathbf{c} : \mathbf{c} = \mathcal{R}^{-1}(\mathbf{R}) \Big|_{\mathcal{G}, \mathbf{F}(\mathbf{x}_i, t_j)}. \quad (26)$$

Mathematisch bedeutet dies, dass die vorhandenen Informationen eine eindeutige Lösung erlauben, d.h.  $\mathcal{R}^{-1}$  eindeutig und  $\mathbf{R}$  vollständig sein müssen. Damit die Werte  $\mathbf{c}$  Materialparameter genannt werden dürfen, muss  $\mathcal{R}^{-1}$  innerhalb eines bestimmten Anwendungsbereiches unabhängig von  $\mathcal{G}$  und  $\mathbf{F}$  sein. Dennoch sind Probengeometrie und Belastungsgeschichte für die Bestimmung von Materialparametern für übliche Stoffgesetze der Elastizität, der Plastizität, des Kriechens usw. in Testprozeduren und Normen festgeschrieben. Entsprechende Prozeduren wären auch für neuere hochentwickelte konstitutive Modelle erforderlich.

Methoden der Parameteridentifikation sind

- *Graphische Anpassung*, wenn die Materialparameter direkt in Beziehung zu aufgezeichneten Versuchsdaten gebracht werden können,
- *Versuch und Irrtum* mit optischer Kontrolle der Übereinstimmung der Simulationsergebnisse mit den Messdaten, eine einfache aber oft zeitaufwendige Prozedur mit benutzerabhängigem Ergebnis,
- *numerische Optimierungsverfahren*, die die Abweichung zwischen Simulations- und Versuchsdaten im Hinblick auf eine Ziel- oder Qualitätsfunktion,

$$q(\mathbf{c}) = \|\mathbf{r}(\mathbf{c})\| = \|\mathbf{R}_{\text{mod}}(\mathbf{c}) - \mathbf{R}\| \rightarrow \min_{\mathbf{c} \in \mathbb{C}}, \quad (27)$$

minimieren, wobei deterministische (z.B. *Gradientenverfahren*, MAHNKEN & STEIN [1994]) oder stochastische Verfahren (Monte Carlo) sowie *Evolutionsstrategien* (SCHWEFEL [1995]) zum Einsatz kommen können,

- *neuronalen Netze*, die über ein Training lernen, nichtlineare Zusammenhänge zu erkennen, und deren Konzept aus Beobachtungen des Informationsflusses zwischen biologischen Neuronen abgeleitet ist (BROESE & LÖFFLER [2004]).

Ziel ist die Ermittlung eines eindeutigen Satzes von Materialparametern, um diesen dann auf beliebige Bauteilgeometrien übertragen zu können. Es gibt allerdings keine Möglichkeit, die Eindeutigkeit nachzuweisen, sondern es ist nur der Gegenbeweis möglich. Selbst beim Einsatz von Optimierungsalgorithmen ist nicht zwangsläufig ein objektives Ergebnis zu erwarten, da sie eine Anzahl von Benutzerentscheidungen implizieren, wie die Quantifizierung der Abweichungen zwischen Experiment und Rechnung (Wahl der Zielfunktion), die Gewichtung einzelner Experimente, die Auswahl von in den Algorithmus einbezogenen Parametern.

### Längenskalen und lokale Instabilität

Anders als bei lokalen Materialmodellen der klassischen Kontinuumsmechanik ist eine die Mikrostruktur berücksichtigende Modellierung auf der Mesoebene nicht invariant gegenüber Änderungen der Längenskala. Dies hat insbesondere in der Schädigungsmechanik schwerwiegende Auswirkungen. Da die Schädigung als homogen im RVE angesehen und durch eine mittlere Defektdichte beschrieben wird, kann nicht zwischen vielen kleinen und wenigen großen Hohlräumen oder Mikrorissen unterschieden werden. Für das reale Materialverhalten ist dieser Unterschied allerdings entscheidend.

Bei *entfestigendem* (instabilem) Material tritt Lokalisierung von plastischen Deformationen (Gleitbänder) und Schädigung auf. Im realen Werkstoff wird diese Lokalisierung durch die Mikrostruktur (Kongröße) begrenzt, in der numerischen Simulation durch die gewählte Diskretisierung (Elementgröße des FE-Netzes). Damit liefern Schädigungsmodelle netzabhängige Ergebnisse. Es existiert keine konvergente Lösung bei Netzverfeinerung wie für stabiles Werkstoffverhalten der Elasto-Plastizität oder Viskoplastizität (siehe DRUCKERSche Postulate), sondern die berechnete Bruchlast wird bei Netzverfeinerung beliebig klein. Dieser Effekt wird manchmal als grundsätzlicher Einwand gegen die Schädigungsmechanik vorgebracht, wobei übersehen wird, dass nicht nur ein praktisches Interesse an der Modellierung von Materialentfestigung zur Vorhersage von Versagenslasten besteht, sondern auch dass der Verformungs- und Schädigungslokalisierung ein physikalisch durchaus reales Phänomen zugrunde liegt.

Eine realistische Abbildung des Material- und Strukturverhaltens erfordert die Einführung eines zusätzlichen Materialparameters, nämlich einer charakteristischen *Mikrostrukturlänge* (SUN & HÖNIG [1994]), die der Größe des RVE bzw. der Einheitszelle entspricht. Eine theoretisch saubere Umsetzung stellen nichtlokale Theorien dar, bei denen Verformungs- und/oder Schädigungsgradienten in die konstitutiven Gleichungen einbezogen werden. Derartige konstitutive Theorien sind aber in kommerziellen FE-Programmen nur aufwendig zu realisieren. Eine übliche ingenieurmäßige Vorgehensweise führt die Elementgröße des FE-Netzes in der Prozesszone als Materialparameter ein (SIEGMUND & BROCKS [1995]).

## Literatur

- Beremin, F.M.: "Cavity formation from inclusion in ductile fracture of A 508 steel", Metallurgical Transactions A, Vol. **12A** (1981), 723-731.
- Beremin, F.M.: "A local criterion for cleavage fracture of a nuclear pressure vessel steel", Metallurgical Transactions A, Vol. **14A** (1983), 2277-2287
- Bernauer, G.; Brocks, W.: "Micro-mechanical modelling of ductile damage and tearing - Results of a European numerical round robin", Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct. **25** (2002), 363-384.
- Bridgman, P.W.: Studies in large plastic flow and fracture, McGraw-Hill, 1952.
- Brocks, W.; Klingbeil, D.; Künecke, G.; Sun, D.Z.: "Application of the Gurson model to ductile tearing resistance", 2<sup>nd</sup> Symp. on Constraint Effects, ASTM STP 1224 (Hrsg. M. Kirk, A. Bakker), Philadelphia, 1995, 232-252
- Brocks, W.; Steglich, D.: "Hybrid methods", in Comprehensive Structural Integrity (Hrsg. I. Milne, R.O. Ritchie, B. Karahaloo), Vol. 11, Elsevier, 2007, 107-136.
- Brocks, W.; Sun, D.-Z.; Höning, A.: "Verification of the transferability of micromechanical parameters by cell model calculations for visco-plastic materials", Int. J. Plasticity **11** (1995), 971-989.
- Broese, E.; Löffler, H.-U.: "Artificial neural networks", in Continuum Scale Simulation of Engineering Materials (Hrsg. D. Raabe, F. Roters, F. Barlat, L.Q. Chen), Wiley-VCH, Weinheim, 2004, 185-199.
- Chu, C.C.; Needleman, A.: "Void nucleation effects in biaxially stretched sheets", Trans. ASME, J. Eng. Mater. Technol. **102**, (1980), 249-256.
- François, D.: "Brittle fracture", in: Handbook of Materials Behavior (J. Lemaitre, Hrsg.), Vol. II, Failures of Materials, Academic Press, London, 2001, 566-576.
- Gurson, A. L.: "Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I - Yield criteria and flow rules for porous ductile media", J. Engng. Materials and Technology **99** (1977), pp 2-15.
- Hild, F.: "Probabilistic approach to fracture: The Weibull model", in: Handbook of Materials Behavior (J. Lemaitre, Hrsg.), Vol. II, Failures of Materials, Academic Press, London, 2001, 558-562.
- Koplik, J.; Needleman, A.: "Void growth and coalescence in porous plastic solids", Int. J. Solids Structures **24** (1988), 835-853.
- Lemaitre, J. (Hrsg.): Handbook of Materials Behavior, Vol. II, Failures of Materials, Academic Press, London, 2001.
- Lemaitre, J.; Chaboche, J.-L.: Mechanics of Solid Materials, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- Mahnken, R.: "Identification of material parameters for constitutive equations", in Encyclopedia of Computational Mechanics (Hrsg. E. Stein, R. de Borst, Th.J.R. Hughes), John Wiley & Sons, Chichester, 2004, 637.

- Mahnken, R.; Stein, E.: "The parameter identification of viscoplastic models via finite-element-methods and gradient methods", *Model. Simulation Mat. Sci. Eng.* **2** (1994), 597-616.
- McClintock, F.A.: "A criterion for ductile fracture by the growth of holes", *Trans. ASME, J. Appl. Mech.* **35** (1968), 363-371.
- Needleman, A.; Tvergaard, V.: "An analysis of ductile rupture in notched bars", *J. Mech. Phys. Solids* **32** (1984), 461-490.
- Needleman, A.; Tvergaard, V.: An analysis of ductile rupture at a crack tip, *J. Mech. Phys. Solids* **35** (1987), 151-183.
- Nemat-Nasser, S.; Hori, M.: *Micromechanics - overall properties of heterogeneous materials*, North-Holland, Amsterdam, 1993.
- Rice, J.R.; Tracey, D.M.: "On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields", *J. Mech. Phys. Solids* **17** (1969), 201-217.
- Ritchie, R.O.; Knott, J.F.; Rice, J.R.: „On the relationship between critical tensile stress and fracture toughness in mild steel“, *J. Mech. Phys. Solids* **21** (1973), 395-410.
- Rousselier, G.: "Ductile fracture models and their potential in local approach of fracture", *Nucl. Engng. and Des.* **105** (1987), 97-111.
- Rousselier, G.: "The Rousselier model for porous metal plasticity and ductile fracture", in: *Handbook of Materials Behavior (J. Lemaitre, Hrsg.)*, Vol. II, *Failures of Materials*, Academic Press, London, 2001, 436-445.
- Schwefel, H.P.: *Evolution and Optimum Seeking*, Wiley-Interscience Publ., New York, 1995.
- Siegmund, T.; Brocks, W.: "Local fracture criteria: Lengthscales and applications", *Journal de Physique IV*, Vol. **8** (1998), 349-356.
- Sun, D.-Z.; Hömig, A.: "Significance of the characteristic length for micromechanical modelling of ductile fracture", in *Proc. 3<sup>rd</sup> Int. Conf. on Localized Damage (Hrsg. M.H. Aliabadi, A. Carpinteri, S. Kalisky, D.J. Cartwright)*, *Comp. Mechanics Publication*, Southampton, 1994, 287-296.
- Tvergaard, V.: "On localization in ductile materials containing spherical voids", *Int. J. Fracture* **18** (1982), 237-252
- Tvergaard, V.; Needleman, A.: "Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar", *Acta metall.* **32** (1984), 157-169.
- Tvergaard, V.; Needleman, A.: "The modified Gurson model", in: *Handbook of Materials Behavior (J. Lemaitre, Hrsg.)*, Vol. II, *Failures of Materials*, Academic Press, London, 2001, 430-435.
- Weibull, W.: "A statistical distribution function if wide applicability", *Annual Meeting of The American Society of Mechanical Engineers*, Atlantic City, NJ, Nov. 25-30, 1951

## Das Modell der Kohäsivzone

### 1. Numerische Simulation von Risswachstum

Risswachstum kann auf unterschiedliche Weise mit Finite-Elemente-Modellen simuliert werden <sup>1</sup>:

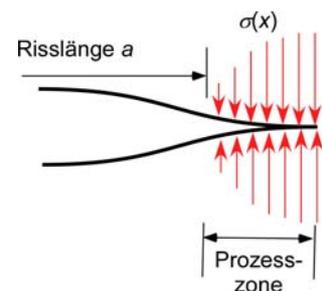
- Lösung von Elementknoten in Abhängigkeit eines globalen bruchmechanischen Steuerungsparameters ( $J$ -Integral, COD, CTOD, CTOA),
- Konstitutivgesetze der Schädigungsmechanik (Modelle von GURSON, ROUSSELIER, LEMAITRE), oder
- Kohäsiv(zonen)modelle.

Eine Übersicht über die Methoden, ihre Anwendungsmöglichkeiten sowie Vor- und Nachteile geben BROCKS et al. [2003].

Das Kohäsivmodell ist ein phänomenologisches Modell mit hoher Flexibilität, vielseitigen Anwendungen, einer gegenüber Schädigungsmodellen geringen Zahl von Modellparametern, die plausible physikalische Interpretationen erlauben, und numerischer Stabilität auch für langes Risswachstum.

### 2. Das Modell der Kohäsivzone

Die Idee einer Kohäsivzone an der Rissspitze, die unphysikalische Spannungssingularitäten vermeidet, geht auf BARENBLATT [1959, 1962] und DUGDALE [1960] zurück <sup>2</sup>. Es werden zwei Bereiche des Risses unterschieden: die spannungsfreien Rissflanken und eine Prozesszone, in der Kohäsivspannungen wirken.



Während DUGDALE als Kohäsivspannungen eine konstante Fließspannung  $\sigma_0$  annahm, was nur für den ebenen Spannungszustand und ideal-plastisches Material gilt, ging BARENBLATT von einer Spannungsverteilung  $\sigma(x)$  aus, die spezifisch für das Material und unabhängig von der Belastung ist. Allerdings ist diese Spannungsverteilung unbekannt und kann auch nicht gemessen werden. Eine Anwendung hat dieses Konzept erst im Zusammenhang mit den Möglichkeiten numerischer Simulationen gewonnen.

Das BARENBLATT-Modell wurde durch Einführung eines *Separationsgesetzes*  $\sigma(\delta)$  weiterentwickelt, nach dem die Kohäsivspannungen nicht mehr vom Rissspitzenabstand  $x$  sondern von der Separation

$$\delta = [\mathbf{u}] = \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^- \quad (1)$$

als dem Vektor der Verschiebungsdiskontinuität in der Prozesszone abhängen. Dieser zuerst von HILLERBORG et al. [1976] für Beton verwendete Ansatz liegt allen modernen Realisierungen des Kohäsivmodells im Rahmen der Finite-Elemente-Methode (FEM) zugrunde. Kohäsivspannungen und Separation sind i.a. Vektoren  $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_n, \sigma_t, \sigma_s\}$  und  $\boldsymbol{\delta} = \{\delta_n, \delta_t, \delta_s\}$  mit

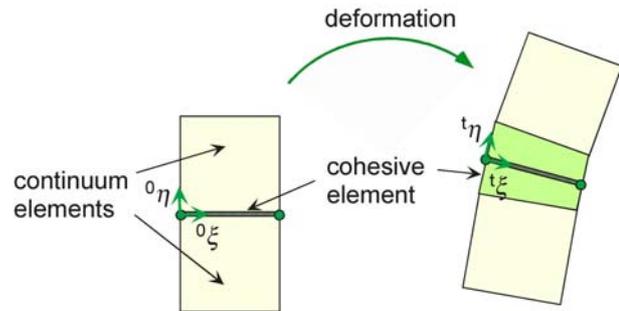
<sup>1</sup> siehe auch Manuskript „Schaedigung“

<sup>2</sup> siehe Manuskript „BM-SSY“

je einer Normalkomponente  $\sigma_n$  bzw.  $\delta_n$  (entsprechend Modus I) und zwei Tangentialkomponenten  $\sigma_t, \sigma_s$  bzw.  $\delta_t, \delta_s$ . Die Prozesszone wird im FE-Modell mit Hilfe von Flächen- bzw. Linienelementen zwischen den zwei- oder dreidimensionalen Kontinuums-elementen in einem lokalen mitrotierenden Koordinatensystem abgebildet. Verformung und Schädigung werden also durch unterschiedliche Elementtypen repräsentiert. Für isotrope Werkstoffe sind die Separationsgesetze in beiden Tangentialrichtungen identisch, so dass nur zwei Funktionen  $\sigma_n(\delta_n, \delta_t)$  und  $\sigma_t(\delta_n, \delta_t)$  verbleiben.

Kohäsivelement an der Grenze zweier Kontinuums-elemente im unverformten Zustand  $\{^0\xi, ^0\eta\}$  und verformten Zustand  $\{^t\xi, ^t\eta\}$ .

$$\delta_\eta \triangleq \delta_n, \delta_\xi \triangleq \delta_t$$



Die Kohäsivelemente öffnen sich als Folge von Materialschädigung und verlieren bei einer *kritischen Separation*  $\delta_n^c$  bzw.  $\delta_t^c$  vollständig ihre Steifigkeit, so dass die angrenzenden Kontinuums-elemente getrennt werden. Der Riss kann in diesem Modell nur entlang der durch die Vernetzung vorgegebenen Elementgrenzen wachsen. Neben der kritischen Separation werden die maximalen Spannungen  $\sigma_n^c$  und  $\sigma_t^c$ , auch *Kohäsivfestigkeiten* genannt, als Modellparameter eingeführt. Die Integration der Spannungs-Separations-Kurven liefert die in einem Kohäsivelement während des Schädigungsprozesses bis zum vollständigen Versagen dissipierten mechanischen Arbeiten bei Normal- bzw. Scherseparation,

$$\Gamma_n^c = \int_0^{\delta_n^c} \sigma_n(\delta_n) \Big|_{\delta_t=0} d\delta_n \quad \text{bzw.} \quad \Gamma_t^c = \int_0^{\delta_t^c} \sigma_t(\delta_t) \Big|_{\delta_n=0} d\delta_t, \quad (2)$$

die *Separationsenergien*, die alternativ zu den kritischen Separationen als Modellparameter verwendet werden können. Sie stellen *Energiefreisetzungsraten* im GRIFFITHSchen Sinne<sup>3</sup> dar. Für quasi-statisches duktilen Risswachstum ist die Separationsenergie  $\Gamma_n^c$  unter den Gültigkeitsvoraussetzungen eines HRR-Feldes<sup>4</sup> an der Rissspitze gleich dem *J-Integral*<sup>5</sup> von RICE unter Modus I bei Rissinitierung, und für reale elastisch-plastische Werkstoffe gilt

$$\Gamma_n^c \leq J_i. \quad (3)$$

### 3. Kohäsivgesetze

Im Gegensatz zu Stoffgleichungen (Konstitutivgesetzen) der Kontinuumsmechanik, welche Relationen zwischen Spannungen und Verzerrungen herstellen, sind Separations- oder Kohäsivgesetze Beziehungen zwischen Spannungen und Verschiebungen. Ihre jeweilige Form hängt vom Separationsmechanismus ab, und in der Literatur gibt es deshalb eine Vielfalt von Ansätzen für Spannungs-Separations-Kurven, siehe die Übersichten bei BROCKS

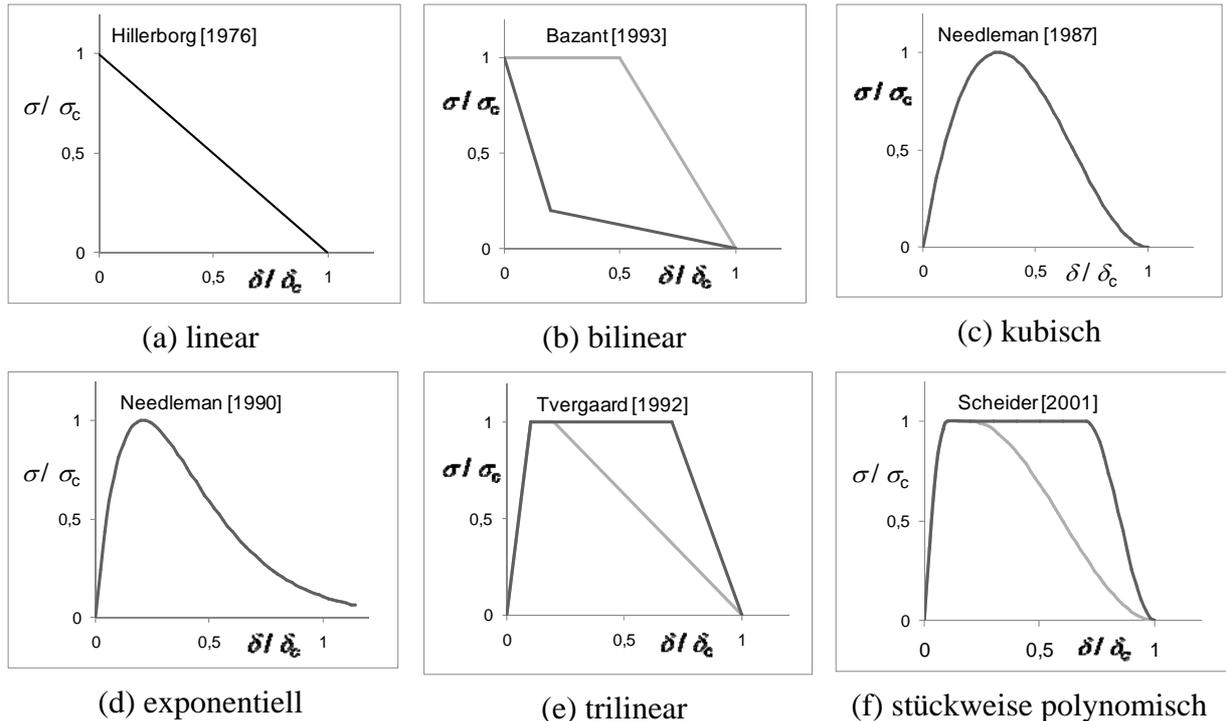
<sup>3</sup> siehe Manuskript „Griffith“

<sup>4</sup> siehe Manuskript „HRR-Feld“

<sup>5</sup> siehe Manuskript „J-Integral“

et al. [2003] und SCHWALBE et al. [2009]. Ihre Eignung, Risswachstum in einer Struktur zu beschreiben, kann anhand von Vergleichen makroskopischer experimenteller und numerischer Daten beurteilt werden. Für einen bestimmten Schädigungsmechanismus kann man auch aus entsprechenden mikromechanischen Simulationen auf das Kohäsivgesetz schließen (SIEGMUND & BROCKS [1999]. KRULL & YUAN [2011]) und so den Modellparametern Kohäsivfestigkeit und Separationsenergie eine mikromechanische Interpretation geben (BROCKS [2005]).

In der folgenden Übersicht steht  $\sigma(\delta)$  für  $\sigma_n(\delta_n)$  bzw.  $\sigma_t(\delta_t)$  bei Modus I bzw. Modus II.



HILLERBORG et al. [1976] haben für die FE-Simulation von Risswachstum in Beton ein einfaches lineares Entfestigungsgesetz (a) benutzt <sup>6</sup>

$$\sigma = \sigma_c \left( 1 - \frac{\delta}{\delta_c} \right), \quad \Gamma_c = \frac{1}{2} \sigma_c \delta_c. \quad (4a)$$

Es ist allgemein für spröde, z.B. mineralische Werkstoffe geeignet.

Das von BAŽANT [1993] eingeführte bilineare Gesetz (b)

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_c \left( 1 - \frac{\delta}{\delta_1} \right) + \sigma_1 \frac{\delta}{\delta_1} & \text{für } 0 \leq \delta \leq \delta_1 \\ \sigma_1 \left( 1 - \frac{\delta - \delta_1}{\delta_c - \delta_1} \right) & \text{für } \delta_1 \leq \delta \leq \delta_c \end{cases}, \quad \Gamma_c = \frac{1}{2} \sigma_c \delta_c \left( \frac{\delta_1}{\delta_c} + \frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) \quad (4b)$$

<sup>6</sup> die Buchstaben (a) bis (f) in den Gleichungsnummern beziehen sich auf die entsprechenden graphischen Darstellungen der Separationsgesetze.

enthält zwei zusätzliche „Formparameter“  $\sigma_1$  und  $\delta_1$ . In der „konkaven“ Form (z.B.  $\sigma_1 = 0.2 \sigma_c$ ,  $\delta_2 = 0.2 \delta_c$ ) wird es für Beton verwendet (BAŽANT [1993, 2003], MAIER et al. [2006]), in der „konvexen“ Form (z.B.  $\sigma_1 = \sigma_c$ ,  $\delta_2 = 0.5 \delta_c$ ) ist es für duktilen Risswachstum geeignet.

Für duktile Werkstoffe hat NEEDLEMAN [1987] als Kohäsivgesetz für Modus I ein Polynom 3. Grades (c) eingeführt, das TVERGAARD [1990] auch für ein Modus-II-Problem, die Ablösung von Fasern in einem faserverstärkten Metall eingesetzt hat,

$$\sigma = \sigma_c \frac{27}{4} \frac{\delta}{\delta_c} \left(1 - \frac{\delta}{\delta_c}\right)^2, \quad \Gamma_c = \frac{9}{16} \sigma_c \delta_c. \quad (4c)$$

Das exponentielle Kohäsivgesetz (d) von NEEDLEMAN [1990]

$$\sigma = \sigma_c \frac{16}{9} e^2 \frac{\delta}{\delta_c} \exp\left(-\frac{16}{9} e \frac{\delta}{\delta_c}\right), \quad \Gamma_c = \frac{9}{16} \sigma_c \delta_c, \quad (4d)$$

mit  $e = \exp(1)$  wurde aus einer Energiefunktion für atomare Bindungskräfte von ROSE et al. [1981] hergeleitet. Die Besonderheit dieses Modells besteht darin, dass für  $\delta = \delta_c$  die Kohäsivspannung nicht Null wird, sondern den Wert  $\sigma(\delta_c) = 0.105 \sigma_c$  hat. Die Separationsenergie bei  $\delta = \delta_c$  ist die gleiche wie für das Modell (c). Es wurde sowohl für spröde (XU & NEEDLEMAN [1994]) als auch für duktile Werkstoffe (SIEGMUND & BROCKS [1998]) eingesetzt.

Ein trilineares Separationsgesetz (e) für duktilen Risswachstum unter Modus I und Modus II mit zwei zusätzlichen Formparametern  $\delta_1$  und  $\delta_2$  stammt von TVERGAARD & HUTCHINSON [1992, 1993]

$$\sigma = \sigma_c \begin{cases} \frac{\delta}{\delta_1} & \text{für } \delta \leq \delta_1 \\ 1 & \text{für } \delta_1 \leq \delta \leq \delta_2, \\ \frac{\delta_c - \delta}{\delta_c - \delta_2} & \text{für } \delta_2 \leq \delta \leq \delta_c \end{cases}, \quad \Gamma_c = \frac{1}{2} \sigma_c \delta_c \left(1 - \frac{\delta_1}{\delta_c} + \frac{\delta_2}{\delta_c}\right). \quad (4e)$$

Die Formparameter erhöhen die Flexibilität seines Einsatzes für verschiedenartige Separationsprozesse. In der Darstellung (e) ist  $\delta_1 = 0.1 \delta_c$  und  $\delta_2 = 0.7 \delta_c$  bzw.  $\delta_2 = 0.2 \delta_c$ . Als Sonderfälle erhält man das Modell (a) von HILLERBORG für  $\delta_2 = \delta_1 \rightarrow 0$  und das sogen. „rechteckige“ Kohäsivgesetz (LIN et al. [1998]) für  $\delta_1 \rightarrow 0$ ,  $\delta_2 \rightarrow \delta_c$ .

Der trilinearen Funktion (4e) von TVERGAARD & HUTCHINSON ähnlich ist die von SCHEIDER [2001] vorgeschlagene Funktion

$$\sigma = \sigma_c \begin{cases} 2 \left(\frac{\delta}{\delta_1}\right) - \left(\frac{\delta}{\delta_1}\right)^2 & \text{für } \delta \leq \delta_1 \\ 1 & \text{für } \delta_1 \leq \delta \leq \delta_2, \\ 2 \left(\frac{\delta - \delta_2}{\delta_c - \delta_2}\right)^3 - 3 \left(\frac{\delta - \delta_2}{\delta_c - \delta_2}\right)^2 + 1 & \text{für } \delta_2 \leq \delta \leq \delta_c \end{cases}$$

$$\Gamma_c = \frac{1}{2} \sigma_c \delta_c \left( 1 - \frac{2}{3} \frac{\delta_1}{\delta_c} + \frac{\delta_2}{\delta_c} \right) \quad (4f)$$

die an den Übergängen zwischen den drei Bereichen stetig differenzierbar ist. Auch sie hat den Vorteil der Flexibilität für verschiedenartige Separationsprozesse. In der Darstellung (f) ist  $\delta_1 = 0.1 \delta_c$  und  $\delta_2 = 0.7 \delta_c$  bzw.  $\delta_2 = 0.2 \delta_c$ . Für  $\delta_1 = \delta_2 = 0.33 \delta_c$  ist sie der kubischen Funktion (4c) von NEEDLEMAN sehr ähnlich und ihr Entfestigungsteil identisch. SCHEIDER & BROCKS [2003a] haben damit ein *Mixed-Mode*-Problem, die Simulation des Teller-Tassen-Bruches in einer Rundzugprobe behandelt.

Die Wahl des Separationsgesetzes liegt in der Entscheidung des Anwenders und entscheidet sich an seiner Eignung, einen bestimmten Separationsprozess anhand gemessener makroskopischer Daten wie z.B. Risswiderstandskurven mit hinreichender Genauigkeit vorherzusagen. Da die Form des Separationsgesetzes das Simulationsergebnis beeinflusst (SCHEIDER & BROCKS [2003b]), sind die für ein Material identifizierten Modellparameter an die einmal gewählte Funktion gebunden, und die Übertragbarkeit ist nur unter Beibehaltung dieser Kurve gewährleistet.

Während der Formparameter  $\delta_2$  in den Gln. (4e) und (4f) spezifisch für einen bestimmten Separationsprozess ist, hat  $\delta_1$  eine vorwiegend numerische Funktion. Da die Kohäsivelemente lediglich die Schädigung, also die Entfestigung des Werkstoffs beschreiben sollen, während die Verformung durch die Kontinuumselemente modelliert wird, sollte die „elastische“ Anfangssteigung  $E_{\text{coh}} = \sigma_c / \delta_1$  der  $\sigma(\delta)$ -Kurve möglichst groß werden,  $E_{\text{coh}} \Delta / E \gg 1$ ,<sup>7</sup> also  $\delta_1 / \Delta \ll 1$  mit  $\Delta$  als Elementgröße im Ligament. Der Idealfall  $\delta_1 = 0$  wie in den Gesetzen (a) und (b) ist allerdings praktisch meist nicht zu realisieren, da er zu Konvergenzproblemen führt. Zu große Anfangssteigungen der  $\sigma(\delta)$ -Kurve können in den Simulationen zu numerischen Artefakten führen (siehe z.B. ELICES et al. [2002]). Hierin ist ein Nachteil der Kohäsivgesetze (c) und (d) von NEEDLEMAN zu sehen, da die Anfangssteigungen nicht unabhängig gewählt werden können, sondern von den Materialparametern  $\sigma_c$  und  $\delta_c$  abhängen.

Weitere Modellannahmen müssen für Ent- und Wiederbelastungsprozesse sowie für Druckspannungen gemacht werden. Dabei sind zwei *Grenzfälle* möglich:

- Eine Entlastung  $\dot{\delta} < 0$  vom Punkt A aus erfolgt in Analogie zur Plastizität auf einer Geraden parallel zur Anfangssteigung der  $\sigma(\delta)$ -Kurve und bei Wiederbelastung zurück auf der gleichen Geraden bis zum Erreichen des ursprünglichen Wertes (A) der  $\sigma(\delta)$ -Kurve vor der Entlastung. Für  $\sigma = 0$  hat man eine bleibende Separation. Für Drucknormalspannungen  $\sigma_n < 0$  ist die Separation Null, jedoch muss aus numerischen Gründen eine Gerade mit großer Steigung für  $\sigma_n(\delta_n)$  eingeführt werden. Eine Umkehr des Vorzeichens der Schubspannungen erfolgt zunächst entlang der Entlastungsgeraden bis im Punkt B die betragsmäßig gleiche Kohäsivspannung  $\sigma_t^{(B)} = -\sigma_t^{(A)}$  erreicht wird, wie im Punkt A. Für weiteres  $\dot{\delta}_t < 0$  nehmen die Scherkohäsivspannungen bis auf Null ab. Dieses Modell beschreibt duktile Schädigungsprozesse.

<sup>7</sup>  $E$  bezeichnet den Elastizitätsmodul (YOUNG's modulus)

- Eine Entlastung  $\dot{\delta} < 0$  vom Punkt A aus führt zurück in den Ursprung der  $\sigma(\delta)$ -Kurve. Es gibt keine bleibende Separation für  $\sigma = 0$ . Die Werkstoffschädigung äußert sich in einer Verringerung des „elastischen“ Kohäsivmoduls  $E_{coh}$ . Dieses Modell beschreibt spröde Schädigungsprozesse.

Für ein bestimmtes Material können ggf. kombinierte Modelle entwickelt werden.

	Normalscheparation (Modus I)	Scherseparation
duktil		
spröde		

Zur Behandlung von *Mixed-Mode*-Beanspruchungen ist die Interaktion von Normal- und Scherseparation zu berücksichtigen, also die Reduzierung der Kohäsiv-Normalspannungen durch Scherseparation  $\sigma_n(\delta_n, \delta_t)$  und umgekehrt  $\sigma_t(\delta_t, \delta_n)$ . Dies kann zum Beispiel durch Einführung einer Schädigungsvariablen

$$D = \left[ \left( \frac{\delta_n}{\delta_n^c} \right)^\alpha + \left( \frac{\delta_t}{\delta_t^c} \right)^\alpha \right]^{1/\alpha} \quad (5)$$

mit einem Interaktionsparameter  $\alpha$  erfolgen (SCHEIDER [2001]). Für  $\alpha = 2$  und  $\delta_n^c = \delta_t^c = \delta_c$  ist diese Schädigungsvariable proportional dem Betrag der Separation

$$\delta = D\delta_c = \sqrt{\delta_n^2 + \delta_t^2} \quad (6)$$

Weitere Details sind bei BROCKS et al. [2003] zu finden.

Die Behandlung der Parameteridentifikation mithilfe numerischer Simulationen von bruchmechanischen Versuchen würde den Rahmen dieser Einführung sprengen. Stattdessen wird

u.a. auf die Darstellungen von MAIER et al. [2006], BROCKS & STEGLICH [2007] oder BROCKS & SCHEIDER [2010] verwiesen.

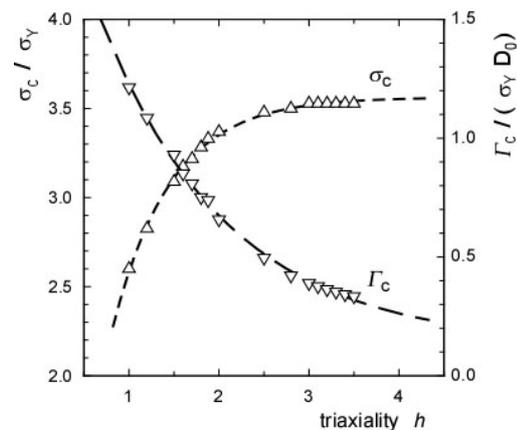
#### 4. Mehrachsighkeitsabhängigkeit der Kohäsivparameter

In erster Näherung kann das Kohäsivgesetz als materialspezifisch und geometrie-unabhängig angesehen werden. Mikromechanische Analysen an Zellmodellen mit Hohlräumen, die den Schädigungsvorgang von Hohlraumwachstum und -koaleszenz bei duktilem Risswachstum abbilden<sup>8</sup>, zeigen jedoch, dass die Kohäsivfestigkeit  $\sigma_c$  und die Separationsenergie  $\Gamma_c$  von der *Mehrachsigkeit (triaxiality)* des Spannungszustandes

$$h = \frac{\sigma_h}{\bar{\sigma}} = \frac{\frac{1}{3}\sigma_{kk}}{\sqrt{\frac{3}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}}} \quad (7)$$

abhängen (SIEGMUND & BROCKS [1999], SCHEIDER [2009]).

Die Kohäsivfestigkeit steigt, die Separationsenergie sinkt mit steigender Mehrachsigkeit, und beide Werte streben gegen Grenzwerte<sup>9</sup>. Dieser Zusammenhang ist aus makroskopischen Tests an glatten und gekerbten Rundzugproben bekannt: Die Maximalkraft steigt, die Bruchdehnung sinkt mit zunehmendem Kerbradius.



Diese Abhängigkeit kann, sofern quantitativ bekannt, bei numerischen Rissfortschrittssimulationen mit dem Kohäsivmodell berücksichtigt werden. Es hat sich allerdings gezeigt, dass die numerisch vorhergesagten R-Kurven bruchmechanischer Proben unter EVZ-ähnlichen Bedingungen wenig davon abhängen, ob mit oder ohne Mehrachsighkeitsabhängigkeit der Kohäsivparameter gerechnet wird, da die Separationsenergie  $\Gamma_c$  nur einen geringen Beitrag zur globalen dissipierten Arbeit bei Risswachstum leistet, nämlich weniger als 10 % bei C(T)-Proben und ungefähr nur 1 % bei M(T)-Proben (BROCKS [2005], BROCKS et al. [2010]). Der Hauptanteil resultiert aus makroskopischen plastischen Verformungen, woraus sich die Geometrieabhängigkeit von R-Kurven erklärt. Hinzu kommt, dass in bruchmechanischen Proben und dickwandigen Bauteilen an der Risspitze hohe Mehrachsighkeiten herrschen, bei denen die Abhängigkeit ohnehin nur noch gering ist. Allerdings verbietet die dargestellte Abhängigkeit der Kohäsivparameter von der lokalen Mehrachsighkeit natürlich eine Übertragung dieser Parameter von dicken (unter näherungsweise ebenem Verzerrungszustand) auf dünne Strukturen (unter näherungsweise ebenem Spannungszustand).

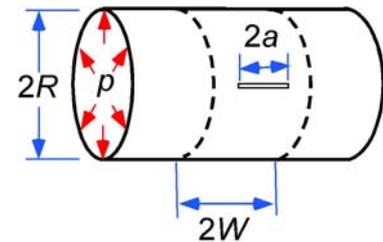
<sup>8</sup> siehe Manuskript „Schaedigung“

<sup>9</sup> An der Abszisse des Diagramms bezeichnen  $D_0$  die Größe der Einheitszelle und  $\sigma_Y = R_0$  die Fließspannung.

## 5. Simulation von Risswachstum in dünnen Strukturen

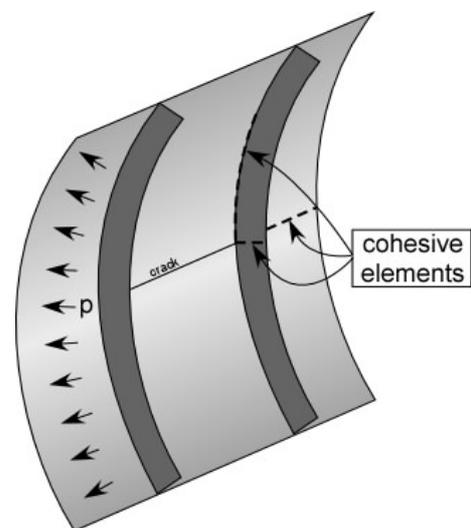
Duktiles Risswachstum in dicken ebenen bruchmechanischen Proben oder Bauteilen unter Modus I mit Rissflanken senkrecht zur Belastung kann näherungsweise mit zweidimensionalen FE-Modellen unter ebenem Verzerrungszustand simuliert werden. In dünnen Blechen stellen sich dagegen auch bei globaler Modus-I-Belastung die Rissflächen als sogenannter *Schrägbruch* unter  $45^\circ$  zur Belastungsebene ein. Der lokale Separationsmodus setzt sich also aus Modus I und Modus III zusammen. Will man diesen Vorgang näherungsweise als Modus I durch ein zweidimensionales FE-Modell unter ebenem Spannungszustand oder durch Schalenelemente behandeln, sind zwei Dinge zu beachten. Erstens stellen die Kohäsivparameter  $\sigma_c$  und  $\Gamma_c$  „effektive“ Werte eines in Wirklichkeit vorhandenen *Mixed-Mode*-Bruches dar, und zweitens muss bei der Berechnung der Kohäsivspannungen im Rissligament die Einschnürung des Bleches bzw. der Schale in Dickenrichtung berücksichtigt werden, weil es andernfalls entsprechend dem DUGDALE-Modell zum plastischen Kollaps der Kontinuums-elemente ohne Risswachstum kommen kann (SCHEIDER & BROCKS [2003c]). Die aus den angrenzenden Kontinuums-elementen berechnete Einschnürung ist als Information an die Kohäsiv-elemente zu übergeben. Mit einem derart modifizierten Kohäsivmodell können numerisch stabile Simulationen auch bei langem Risswachstum durchgeführt und zuverlässige Vorhersagen der Restfestigkeit dünnwandiger Strukturen gemacht werden (SCHEIDER et al. [2006], CORNEC et al. [2009]).

Das Beispiel der Simulation von duktilem Risswachstum in einer versteiften Kreiszyklinderschale unter Innendruck mit einem axialen Einfeldriss, also einem Riss, der sich zwischen zwei Spanten erstreckt, zeigt darüber hinaus, wie auch Verzweigungen des Risspfades vorhergesagt werden können (BROCKS & SCHEIDER [2008]).

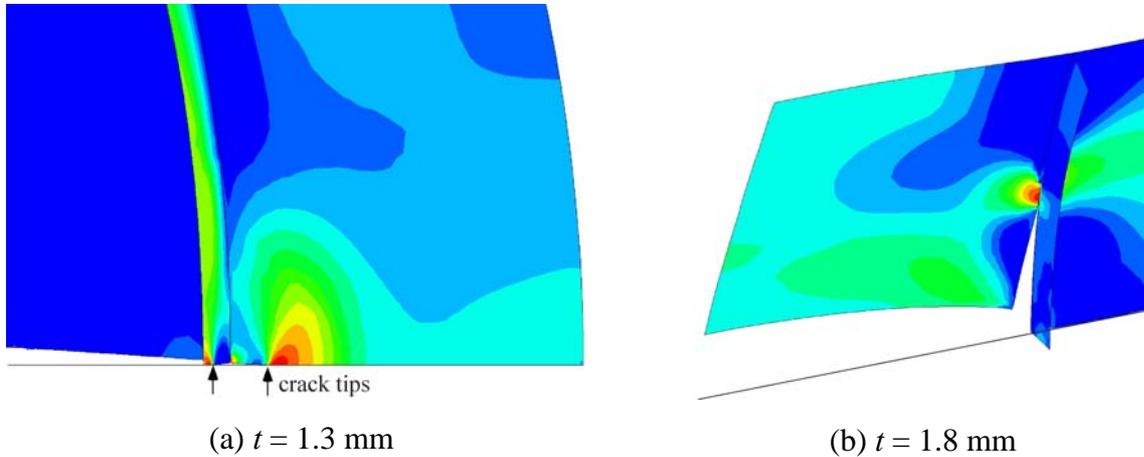


Die Schale mit dem Durchmesser  $2R = 200$  mm, der Breite  $2W = 200$  mm und der Hautdicke  $t = 1$  mm aus dem Material Al 6056 T78 kann als ein vereinfachtes und verkleinertes Modell eines Flugzeugrumpfes angesehen werden.

Die Festigkeitsdaten der Legierung  $E = 70$  GPa,  $R_0 = 302$  MPa und die Kohäsivparameter  $\sigma_c = 550$  MPa  $= 1,82 R_0$ ,  $\Gamma_c = 20,5$  Jm $^{-2}$  wurden aus Versuchen ermittelt, die Formparameter als Erfahrungswerte zu  $\delta_1/\delta_c = 0,01$  und  $\delta_2/\delta_c = 0,50$  angenommen. Ziel der numerischen Studie, bei der die Spantdicke zwischen 1,3 und 2,4 mm variiert wurde, ist die Untersuchung möglicher Rissverzweigung am Spant. Hierzu wurden Kohäsiv-elemente im Ligament der Zylinderhaut und im Spant sowie in Umfangsrichtung zwischen Haut und Spant eingefügt.



Tatsächlich wechselt der Risspfad in Abhängigkeit der Spantdicke. Während bei Spantdicken unterhalb von 1,8 mm der Riss axial im Ligament der Schale weiterläuft und dabei auch den Spant durchtrennt, Bild (a), weicht er bei Dicken ab 1,8 mm in Umfangsrichtung aus, ohne den Spant zu durchtrennen, Bild (b). Die Änderung des Rissmechanismus wirkt sich auch auf die Restfestigkeit der Schale, also den maximal ertragbaren Innendruck aus.



Rissverzweigung, die hier als Effekt der Spantdicke aufgetreten ist, kann auch durch Variation der Bindungsfestigkeit (Schweißnaht) der Spanten an die Haut auftreten. Entsprechende Effekte des Abschälens von Spanten von der Zylinderhaut wurden in Experimenten beobachtet. Das Kohäsivmodell ist geeignet, Phänomene dieser Art zu beschreiben und ihre Auswirkungen auf die Restfestigkeit vorherzusagen.

## 6. Schlussfolgerungen

Das auf BARENBLATT zurück gehende phänomenologische Modell einer Kohäsivzone vor der Risspitze hat im Zusammenhang mit der FE-Methode eine weite Verbreitung und vielseitige Anwendungen gefunden. Sein Vorteil gegenüber mikromechanischen Schädigungsmodellen liegt vor allem in seiner geringen Zahl von Modellparametern und seiner numerischen Stabilität auch für langes Risswachstum. Die zwei Parameter Kohäsivfestigkeit und Separationsenergie erlauben eine physikalisch plausible Interpretation von Risszähigkeit mit Bezug zu den mikromechanischen Mechanismen duktiler Schädigung. Das Modell lässt vielfältige Erweiterungen zu und hat ein großes Potential für Anwendungen in der Praxis.

## Literatur

- Barenblatt, G.I. [1959]: The formation of equilibrium cracks during brittle fracture: general ideas and hypothesis, axially symmetric cracks. *Appl. Math. Mech.* 23, 623-636.
- Barenblatt, G.I. [1962]: The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Adv. Appl. Mech.* 7, 55-129.
- Bažant, Z.P. [1993]: Current status and advances in the theory of creep and interaction with fracture. In: Z.P. Bažant, I. Carol, Proc. 5<sup>th</sup> Int. RILEM Symp. on Creep and Shrinkage of Concrete, E & FN Spon, London and New York, 291-307.
- Bažant, Z.P. [2003]: Concrete fracture models: testing and practice. *Eng. Fract. Mech.* 69, 165-205.
- Brocks, W [2005]: Cohesive strength and separation energy as characteristic parameters of fracture toughness and their relation to micromechanics. *Struct. Integr. Durab.* 1, 233-243.
- Brocks, W.; Anuschewski, A.; Scheider, I. [2010]: Ductile tearing resistance of metal sheets. *Engng. Fail. Anal.* 17, 607-616.
- Brocks, W., A. Cornec, I. Scheider [2003]: Computational aspects of nonlinear fracture mechanics. In: I. Milne, R.O. Ritchie, B. Karihaloo (eds.), *Comprehensive Structural Integrity*, Vol. 3, Elsevier, 127-209, GKSS-Bericht 2003/30.
- Brocks, W.; Scheider, I. [2008]: Prediction of crack path bifurcation under quasi-static loading by the cohesive model. *Struct. Durab. Health Monit.* 70, 1-11.
- Brocks, W.; Scheider, I. [2010]: Identification of material parameters for structural analyses. *Struct. Durab. Health Monit.* 161, 1-24.
- Brocks, W.; Steglich, D. [2007]: Hybrid methods. In: I. Milne, R.O. Ritchie, B. Karihaloo (eds.), *Comprehensive Structural Integrity*, Online Update Vol. 11, Elsevier, 107-136.
- Cornec, A.; Schönfeld, W.; Schwalbe, K.-H.; Scheider, I. [2009]: Application of the cohesive model for predicting the residual strength of a large scale fuselage structure with a two-bay crack. *Engng. Fail. Anal.* 16, 2541-2558.
- Dugdale, D.S. [1960]: Yielding of steel sheets containing slits. *J. Mech. Phys. Solids* 8, 100-104.
- Elices, M.; Guinea, G.V.; Gómez, J.; Planas, J. [2002]: The cohesive zone model: advantages, limitations and challenges. *Eng. Fract. Mech.* 69, 137-163.
- Hillerborg, A.; Modeer, M.; Petersson, P.E. [1976]: Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement Concrete Res.* 6, 773-782.
- Krull, H.; Yuan, H. [2011]: Suggestions to the cohesive traction–separation law from atomistic simulations. *Eng. Fract. Mech.* 78, 525-533.
- Lin, G.; Cornec, A.; Schwalbe, K.-H. [1998]: Three-dimensional finite element simulation of crack extension in aluminium alloy 2024 FC. *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.* 21, 1159-1173.
- Maier, G.; Bocciarelli, M.; Bolzon, G.; Fedele, R. [2006]: Inverse analyses in fracture mechanics. *Int. J. Fracture* 138, 47-73.
- Rose, J.; Ferrante, J.; Smith, J.: [1981]: Universal binding energy curves for metals and bimetallic interfaces. *Phys. Rev. Lett.* 75, 675-678-
- Scheider, I. [2001]: Bruchmechanische Bewertung von Laserschweißverbindungen durch numerische Rißfortschrittsanalysen mit dem Kohäsivzonenmodell. Doktorarbeit,

Technische Universität Hamburg-Harburg, Bericht GKSS 2001/3, GKSS-Forschungszentrum Geesthacht.

- Scheider, I. [2009]: Derivation of separation laws for cohesive models in the course of ductile fracture. *Engng. Fract. Mech.* 76, 1450-1459.
- Scheider, I.; Brocks, W. [2003a]: Simulation of cup-cone fracture using the cohesive model. *Engng. Fract. Mech.* 70, 1943-1961.
- Scheider, I.; Brocks, W. [2003b]: The effect of the traction separation law on the results of cohesive zone crack propagation analyses. *Key Engng. Mater.* 251-252, 313-318.
- Scheider, I.; Brocks, W. [2003c]: Cohesive elements for thin-walled structures. *Comp. Mater. Sci.* 37, 101-109.
- Scheider, I.; Schödel, M.; Brocks, W.; Schönfeld, W. [2006]: Crack propagation analysis with CTOA and cohesive model: Comparison and experimental validation. *Engng. Fract. Mech.* 73, 252-263.
- Schwalbe, K.-H.; Scheider, I.; Cornec, A. [2009]: SIAM CM09 – The SIAM method for applying cohesive models to the damage behaviour of engineering materials and structures. Report GKSS 2009/1, GKSS-Forschungszentrum Geesthacht.
- Siegmund, Th.; Brocks, W. [1998]: Tensile decohesion by local failure criteria. *Technische Mechanik* 18, 261-270.
- Siegmund, Th.; Brocks, W. [1999]: Prediction of the work of separation and implications to modeling. *Int. J. Fract.* 99, 97-116.
- Tvergaard, V. [1990]: Effect of fibre debonding in a whisker-reinforced metal. *Mater. Sci. Eng. A* 190, 203-213.
- Tvergaard, V.; Hutchinson, J.W. [1992]: The relation between crack growth resistance and fracture process parameters in elastic-plastic solids. *J. Mech. Phys. Solids* 40, 1377-1397.
- Xu, X.; Needleman, A. [1994]: Numerical simulations of fast crack growth in brittle solids. *J. Mech. Phys. Solids* 42, 1397-1434.