Summe von Zweierpotenzen

Autor: yalu, 6. 2. 2010

Eine Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ kann als Summe von Zweierpotenzen 2^i mit $i \in \mathbb{N}_0$ dargestellt werden, wobei jede dieser Zweierpotenzen höchstens dreimal als Summand in der Summe auftreten darf:

$$n = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \cdot 2^i \quad (0 \leq c_i \leq 3) \tag{1}$$

Die Anzahl der Möglichkeiten, dies zu tun, d. h. die Anzahl unterschiedlicher Belegungen für die c_i, die (1) erfüllen, sei $f(n)$.

Behauptung:

Die Anzahl möglicher Summen ist

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n+2}{2} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{n+1}{2} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \tag{2}$$

Beweis:

Der Beweis erfolgt mit vollständiger Induktion:

$f(0) = 1$, da die einzige Möglichkeit, 0 als Summe von Zweierpotenzen zu schreiben, die leere Summe ist, also $c_i = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$. Für $n = 0$ ist also (2) erfüllt.

Es wird nun gezeigt, dass unter der Annahme, dass die Behauptung für alle $k < n$ gilt, sie auch für $n > 0$ gilt.

Formt man (1) etwas um, ergibt sich

$$n = c_0 \cdot 2^0 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i \cdot 2^i = c_0 + 2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} c_{i+1} \cdot 2^i$$

Hieraus folgt

$$\frac{n - c_0}{2} = \sum_{i=0}^{\infty} c_{i+1} \cdot 2^i \tag{3}$$

Die rechte Seite von (3) hat – bis auf die Indizes von c – die gleiche Form wie die rechte Seite von (1). Wenn man also bei gegebenem n für c_0 einen festen Wert einsetzt, gibt es für die restlichen c_i insgesamt $f((n - c_0)/2)$ mögliche Belegungen.

Ist n gerade, kann c_0 nur 0 oder 2 sein. Ist $c_0 = 0$, so gibt es $f((n - 0)/2)$ unterschiedliche Belegungen für die restlichen c_i. Für $c_0 = 2$ sind es $f((n - 2)/2)$ Belegungen. Die Gesamtzahl der möglichen Belegungen ist die Summe dieser beiden Ausdrücke, also $f(n/2) + f((n - 2)/2)$.

Ist n ungerade, kann c_0 nur 1 oder 3 sein. Entsprechend gibt es für die restlichen c_i $f((n-1)/2)$ bzw. $f((n-3)/2)$ Belegungen, zusammen also $f((n-1)/2) + f((n-3)/2)$ mögliche Belegungen.

Zusammengefasst ist also

$$f(n) = \begin{cases} f\left(\frac{n}{2}\right) + f\left(\frac{n-2}{2}\right) & \text{falls } n \text{ gerade} \\ f\left(\frac{n-1}{2}\right) + f\left(\frac{n-3}{2}\right) & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \tag{4}$$

Die Funktionsargumente auf der rechten Seite von (4) sind alle kleiner n und größer oder gleich 0. Entsprechend der Induktionsannahme können damit die Funktionswerte aus (2) eingesetzt werden. Dazu werden gemäß dem Rest bei der Division von n durch 4 vier Fälle unterschieden:

Fall 1: $n \equiv 0 \pmod 4$

n ist geradzahlig, also ist

$$f(n) = f\left(\frac{n}{2}\right) + f\left(\frac{n-2}{2}\right) \tag{5}$$

$n/2$ ist ebenfalls gerade und $(n-2)/2$ ungerade. Einsetzen von (2) in (5) ergibt

$$f(n) = \frac{\frac{n}{2}+2}{2} + \frac{\frac{n-2}{2}+1}{2} = \frac{n+2}{2}$$

was mit der Behauptung übereinstimmt.

Fall 2: $n \equiv 1 \pmod 4$

$$f(\underbrace{n}_{\text{ung.}}) = f\Bigg(\underbrace{\frac{n-1}{2}}_{\text{ger.}}\Bigg) + f\Bigg(\underbrace{\frac{n-3}{2}}_{\text{ung.}}\Bigg) = f(n) = \frac{\frac{n-1}{2}+2}{2} + \frac{\frac{n-3}{2}+1}{2} = \frac{n+1}{2}$$

Fall 3: $n \equiv 2 \pmod 4$

$$f(\underbrace{n}_{\text{ger.}}) = f\Bigg(\underbrace{\frac{n}{2}}_{\text{ung.}}\Bigg) + f\Bigg(\underbrace{\frac{n-2}{2}}_{\text{ger.}}\Bigg) = f(n) = \frac{\frac{n}{2}+1}{2} + \frac{\frac{n-2}{2}+2}{2} = \frac{n+2}{2}$$

Fall 4: $n \equiv 3 \pmod 4$

$$f(\underbrace{n}_{\text{ung.}}) = f\Bigg(\underbrace{\frac{n-1}{2}}_{\text{ung..}}\Bigg) + f\Bigg(\underbrace{\frac{n-3}{2}}_{\text{ger.}}\Bigg) = f(n) = \frac{\frac{n-1}{2}+1}{2} + \frac{\frac{n-3}{2}+2}{2} = \frac{n+1}{2}$$

Damit wurde für alle vier möglichen Fälle gezeigt, dass der Wert von $f(n)$ tatsächlich der Behauptung entspricht. Zusammen mit dem eingangs betrachteten Fall für $n = 0$ folgt daraus die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}_0$. ■