

Vorzeichenwahl für Nullfolgen in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$

Aufgabe

Seien (x_n) und (y_n) reelle Folgen mit

$$x_n \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad y_n \rightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$.

(a) Zeige, dass es eine Folge von Vorzeichen (σ_n) mit

$$\sigma_n \in \{-1, +1\} \quad \text{für alle } n$$

gibt, sodass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n x_n$$

konvergiert.

(b) Muss es eine Folge von Vorzeichen (σ_n) geben, sodass sowohl

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n x_n$$

als auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n y_n$$

konvergieren?

Lösung

Teil (a)

Wir setzen

$$a_n := |x_n|.$$

Da $x_n \rightarrow 0$, gilt auch $a_n \rightarrow 0$. Es genügt, Vorzeichen

$$\varepsilon_n \in \{-1, +1\}$$

so zu wählen, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$$

konvergiert. Danach setzen wir

$$\sigma_n := \begin{cases} \varepsilon_n, & x_n \geq 0, \\ -\varepsilon_n, & x_n < 0. \end{cases}$$

Dann gilt

$$\sigma_n x_n = \varepsilon_n |x_n| = \varepsilon_n a_n,$$

und die Konvergenz von $\sum \sigma_n x_n$ folgt aus der Konvergenz von $\sum \varepsilon_n a_n$.

Da $a_n \rightarrow 0$, wählen wir eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen

$$N_1 < N_2 < N_3 < \dots$$

mit der Eigenschaft

$$a_n \leq 2^{-k} \quad \text{für alle } n \geq N_k.$$

Für $k \in \mathbb{N}$ betrachten wir den Block

$$I_k := \{N_k, N_k + 1, \dots, N_{k+1} - 1\}.$$

Für alle $n \in I_k$ gilt also

$$a_n \leq 2^{-k}.$$

Wir wählen die Vorzeichen ε_n innerhalb jedes Blocks rekursiv so, dass alle relativen Partialsummen im Block von 0 beschränkt bleiben. Genauer wählen wir sie so, dass für alle $n \in I_k$

$$\left| \sum_{j=N_k}^n \varepsilon_j a_j \right| \leq 2^{-k}.$$

Das geht wie folgt. Angenommen, wir haben bereits eine relative Partialsumme

$$r = \sum_{j=N_k}^m \varepsilon_j a_j$$

mit

$$|r| \leq 2^{-k}$$

erhalten. Für den nächsten Term $a_{m+1} \leq 2^{-k}$ wählen wir das Vorzeichen wie folgt:

- Ist $r \geq 0$, so setzen wir $\varepsilon_{m+1} = -1$. Dann ist die neue relative Partialsumme

$$r - a_{m+1}.$$

Es gilt

$$r - a_{m+1} \leq r \leq 2^{-k}$$

und

$$r - a_{m+1} \geq -a_{m+1} \geq -2^{-k}.$$

Also liegt die neue relative Partialsumme wieder in $[-2^{-k}, 2^{-k}]$.

- Ist $r < 0$, so setzen wir $\varepsilon_{m+1} = +1$. Dann ist die neue relative Partialsumme

$$r + a_{m+1}.$$

Es gilt

$$r + a_{m+1} \geq r \geq -2^{-k}$$

und

$$r + a_{m+1} \leq a_{m+1} \leq 2^{-k}.$$

Auch hier bleibt die relative Partialsumme in $[-2^{-k}, 2^{-k}]$.

Damit haben wir

$$\left| \sum_{j=N_k}^n \varepsilon_j a_j \right| \leq 2^{-k} \quad \text{für alle } n \in I_k.$$

Insbesondere ist die Blocksumme

$$B_k := \sum_{j \in I_k} \varepsilon_j a_j$$

abgeschätzt durch

$$|B_k| \leq 2^{-k}.$$

Daher ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} |B_k| < \infty.$$

Die Partialsummen der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$$

lassen sich nun so schreiben: Am Ende der Blöcke entstehen Partialsummen, die durch eine absolut konvergente Reihe von Blocksummen gebildet werden. Innerhalb des Blocks I_k weicht jede Partialsumme von der Partialsumme am Blockanfang höchstens um 2^{-k} ab. Da $2^{-k} \rightarrow 0$, ist die Folge aller Partialsummen eine Cauchy-Folge.

Somit konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n.$$

Damit konvergiert auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n x_n.$$

Das beweist Teil (a).

Teil (b)

Ja. Man kann sogar Vorzeichen (σ_n) wählen, sodass beide Reihen gleichzeitig konvergieren.

Dies folgt aus einem bekannten Satz von Steinitz und Kadets.

Satz 1 (Steinitz–Kadets). *Sei X ein endlichdimensionaler reeller normierter Raum und sei (v_n) eine Folge in X mit*

$$v_n \rightarrow 0.$$

Dann existieren Vorzeichen

$$\varepsilon_n \in \{-1, +1\}$$

mit der Eigenschaft, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n v_n$$

in X konvergiert.

Wir wenden diesen Satz auf

$$v_n := (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$$

an. Da

$$x_n \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad y_n \rightarrow 0,$$

gilt

$$v_n \rightarrow 0$$

im Raum $\mathbb{R}^2$. Nach dem Satz von Steinitz–Kadets existieren Vorzeichen

$$\sigma_n \in \{-1, +1\}$$

mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n v_n$$

konvergent in $\mathbb{R}^2$.

Konvergenz in $\mathbb{R}^2$ bedeutet koordinatenweise Konvergenz. Also konvergieren beide Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n x_n$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n y_n.$$

Damit ist Teil (b) gezeigt.

Bemerkung

Der entscheidende Punkt in Teil (b) ist, dass dieselben Vorzeichen gleichzeitig für beide Folgen funktionieren müssen. Für eine einzelne Nullfolge kann man das wie in Teil (a) durch geschicktes Blockieren der Beträge erreichen. Für zwei Folgen betrachtet man die Vektorfolge

$$(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$$

und nutzt die Tatsache, dass $\mathbb{R}^2$ endlichdimensional ist. Dort gilt das Steinitz–Kadets-Theorem.