Im Folgenden geht es um die Erklärung für den mathematischen Zusammenhang zwischen MLS- und Hadamard-Matrix und seinen praktischen Nutzen.

Faktorisierung der Hadamard-Matrix

Die Zahlenbeispiele im folgenden Text sind aus der Diplomarbeit von Udo Barth von 1998 entnommen (http://www.udobarth.de/Profil/Doku/Uni/Diplom.pdf).

Die $2^L \times 2^L$ Hadamard-Matrix $\boldsymbol{H}$ kann man als „Produkt“ einer $2^{L-1} \times 2^L$ -Matrix $\boldsymbol{P}$ mit einer $2^L \times 2^{L-1}$ -Matrix $\boldsymbol{Q}$ darstellen (Faktorisierung):

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{P} \circ \boldsymbol{Q}$$

Beispiel: 8×8 Hadamard-Matrix:

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}^T$$

Die Elemente von $\boldsymbol{P}$ entstehen aus den Binärstellen K_j der Zahlen 0 bis 7:

$$k_l = \sum_{l=0}^{L-1} K_l 2^l \quad \text{bzw.} \quad j_l = \sum_{l=0}^{L-1} J_l 2^l$$

Die erste Zeile von $\boldsymbol{P}$ bzw. die erste Spalte von $\boldsymbol{Q}$ stellt die Null dar, die zweite die Eins usw. . Das LSB steht ganz links:

$$P_{k,j} = K_{L-j-1} \quad \text{bzw.} \quad Q_{i,j} = P^T_{i,j} = J_i$$

Die Verknüpfung von $\boldsymbol{P}$ und $\boldsymbol{Q}$ zu $\boldsymbol{H}$ erfolgt durch eine Operation, die mit dem Symbol $\circ$ dargestellt wird. Sie ist so gemeint

$$H_{i,k} = \{\boldsymbol{P} \circ \boldsymbol{Q}\}_{j,k} = \sum_{j=0}^{L-1} (-1)^{(P_{i,j} \cdot Q_{j,k}) mod\, 2}$$

Beipiele:

$$H_{0,0} = (-1)^{(0 \cdot 0 + 0 \cdot 0)\, mod\, 2} = (-1)^{0\, mod\, 2} = 1$$
$$H_{1,3} = (-1)^{(1 \cdot 1 + 0 \cdot 1)\, mod\, 2} = (-1)^{1\, mod\, 2} = -1$$
$$H_{3,3} = (-1)^{(1 \cdot 1 + 1 \cdot 1)\, mod\, 2} = (-1)^{(2\, mod\, 2)} = (-1)^0 = 1$$

Die 8×8 Hadamard-Matrix ist dann

$$H_8 = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Faktorisierung klappt also tatsächlich.

Die mathematische Verbindung zwischen MLS- und Hadamard-Matrizen

Aus jeder MLS der Länge 2^L-1 lässt sich eine MLS-Matrix $\boldsymbol{M}$ erzeugen. Die erste Zeile der Matrix ist die MLS selbst. Die zweite ist die um eine Stelle zyklisch nach rechts rotierte Folge, die dritte ist die um zwei Stellen rotierte usw. Insgesamt bekommt man so eine $(2^L-1)\times(2^L-1)$ -Matrix.

Beispiel: 7×7 MLS-Matrix aus der MLS $\{0,0,0,1,0,1,1\}$:

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Bezug zur Praxis

Wenn ein Lautsprecher also eine MLS in den Raum sendet, dann empfängt ein irgendwo aufgestelltes Mikrophon ein Signal, das der Überlagerung lauter zeitverschobener und mehr oder weniger stark gedämpfter Kopien der Original-MLS besteht. Das Mikrophonsignal wird synchron, d.h. mit demselben Takt abgetastet, mit dem auch die MLS zum Lautsprecher geschoben wird. Das Zeitintervall eines Taktes ist Δt . Die MLS wird als Folge

$$MLS : \{\mu_{0,}\ \mu_{1,}\ \mu_{2,\dots},\ \mu_{M-1}\}$$

mit

$$M = 2^L-1 \quad \text{und} \quad \mu_k \in \{0,1\};k \in \{0,1,2,\dots,M-1\}$$

dargestellt. Eine vollständige Periode T der MLS beträgt also

$$T = M\cdot\Delta t$$

Die MLS soll mit der gleichbleibender Amplitude A ausgesandt werden. Der Lautsprecher sendet die MLS in ständig wiederholter Folge aus; d.h. immer nach M Impulsen geht's wieder von vorn los.

Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass die Laufzeiten aller reflektierten Signale kleiner als T sind. Nach vielen Wiederholungen hat sich in dem Raum ein stationäres Wellenfeld ausgebildet, bei dem auch die Amplituden der reflektierten Signale mit gleicher Laufzeit gleich sind. Das ohne Verzögerung empfangene Signal soll die Amplitude a_0 haben, das um Δt verzögerte die Amplitude a_1 usw.

Weil die ausgesandte MLS sich immer nach M Signalen wiederholt, ist es sinnvoll, auch die Zeit in Vielfachen und Divisionsresten von M anzugeben: N ist die Gesamtzahl ausgesandter Signale zum Zeitpunkt $N \cdot \Delta t$. Es ist zweckmässig, diese Zahl als Summe aus der Anzahl m vollständiger Signalfolgen und der Anzahl n der Signale innerhalb einer MLS-Periode darzustellen

$$N = m \cdot M + n$$

mit

$$m = N \div M \text{ und } n = N \bmod M \text{ , d.h. } n \in \{0,1,2,\ldots,M-1\} \text{ .}$$

Das Signal, das genau eine MLS-Periode früher, d.h. zum Zeitpunkt

$$\begin{aligned}(N-M) \cdot \Delta t &= \{M \cdot (N-M) \div M + (N-M) \bmod M\} \cdot \Delta t \\ &= (m-1) \cdot M \cdot \Delta t + n \cdot \Delta t = (m-1) \cdot T + n \cdot \Delta t\end{aligned}$$

gesendet wurde, ist folglich genau dasselbe wie das, das zum Zeitpunkt $N \cdot \Delta t$ ausgesandt wurde. Demnach ist das Signal, das zum Zeitpunkt $(N-M+1) \cdot \Delta t$ ausgesandt wurde, dasselbe, das zum Zeitpunkt $(N+1) \cdot \Delta t$ noch ausgesendet werden wird. Wenn im Folgenden die Zusammensetzung der zum Zeitpunkt $N \cdot \Delta t$ empfangenen Signale besprochen wird, darf man sich also nicht daran stören, wenn auch Signale mit Nummern $n+1$, $n+2$ usw. vorkommen, obwohl das zuletzt versandte Signal die Nummer n hat.

Die Signale, die zum Zeitpunkt

$$N \cdot \Delta t = m \cdot T + n \cdot \Delta t \text{ , mit } m \gg 1$$

am Mikrophon ankommen, sind jeweils unter ihrer Laufzeit in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Bei der Laufzeit (1. Zeile) ist jeweils nur das Vielfache von Δt eingetragen

	0	***1***	***2***	**...**	***n-1***	***n***	***n+1***	**...**	***M-3***	***M-2***	***M-1***
n	μ_n	μ_{n-1}	μ_{n-2}	...	μ_1	μ_0	μ_{M-1}	...	μ_{n+3}	μ_{n+2}	μ_{n+1}
n-1	μ_{n-1}	μ_{n-2}	μ_{n-3}	...	μ_0	μ_{M-1}	μ_{M-2}	...	μ_{n+2}	μ_{n+1}	μ_n

Das jüngst ausgesandte Signal μ_n das jetzt am Mikrophon ankommt, ist ohne Zeitverzögerung direkt dort angekommen. Das Signal, das nach der Laufzeit $n \cdot \Delta t$ am Mikrophon ankommt, ist das Signal μ_0 , das ganz am Anfang der gegenwärtigen MLS-Periode gesendet wurde, usw.

Wegen der Periodizität der MLS werden die Messungen ebenfalls als Folgen von M Messwerten

$$\{E_n, E_{n-1}, E_{n-2}, \dots, E_0, E_1, E_{M-1}, E_{M-2}, \dots, E_{n+2}, E_{n+1}\}$$

verarbeitet. Die aufeinanderfolgende Messwerte E_n und E_{n-1} bestehen jeweils aus den um ein Signal gegeneinander verschobenen Signalfolgen

$$\begin{aligned} E_n &= a_0\mu_n + a_1\mu_{n-1} + \dots + a_{n-1}\mu_1 + a_n\mu_0 + a_{n+1}\mu_{M-1} + a_{n+2}\mu_{M-2} + \dots + a_{M-2}\mu_{n+2} + a_{M-1}\mu_{n+1} \\ E_{n-1} &= a_0\mu_{n-1} + a_1\mu_{n-2} + \dots + a_{n-1}\mu_0 + a_n\mu_{M-1} + a_{n+1}\mu_{M-2} + \dots + a_{M-2}\mu_{n+1} + a_{M-1}\mu_n \end{aligned}$$

Offensichtlich kann man E_n als Skalarprodukt

$$E_n = \vec{a}\,\vec{\mu}_n$$

auffassen, mit den Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ \dots \\ a_{M-3} \\ a_{M-2} \\ a_{M-1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{\mu}_n = \begin{pmatrix} \mu_n \\ \mu_{n-1} \\ \mu_{n-2} \\ \dots \\ \mu_1 \\ \mu_0 \\ \mu_{M-2} \\ \dots \\ \mu_{n+3} \\ \mu_{n+2} \\ \mu_{n+1} \end{pmatrix} \quad .$$

Der Vektor $\vec{a}$ stellt die Amplituden der mit verschiedenen Laufzeiten reflektierten Signale dar. Er hängt nur von den Eigenschaften des Raumes ab. Der Vektor $\vec{\mu}_n$ enthält die um n Signale gegenüber der Urfolge $\{\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{M-2}, \mu_{M-1}\}$ verschobene Signalfolge. $n\,\Delta t$ ist die Laufzeit, nach der das erste Signal am Mikrophon ankommt.

Fasst man alle M Elemente der Messwertfolge zum Messwertvektor $\vec{E}$ zusammen

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \\ \dots \\ E_{M-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a}\,\vec{\mu}_n \\ \vec{a}\,\vec{\mu}_{n+1} \\ \vec{a}\,\vec{\mu}_{n+2} \\ \dots \\ \vec{a}\,\vec{\mu}_{M-n-1} \end{pmatrix} \quad ,$$

dann kann man $\vec{E}$ als Resultat einer Matrixmultiplikation auffassen

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} \mu_n & \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \cdots & \mu_{M-n-2} & \mu_{M-n-1} \\ \mu_{n-2} & \mu_{n-1} & \mu_{n-3} & & \mu_{M-n-3} & \mu_n \\ \mu_{n+2} & \mu_{n+3} & \mu_{n+4} & \cdots & \mu_n & \mu_{n+1} \\ \cdots & & & \cdots & & \cdots \\ \mu_{M-n-1} & \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{M-n-3} & \mu_{M-n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_{M-1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{M}_n \vec{a} \quad .$$

Indem man die Messwerte streng synchron zur Aussendung aufnimmt, und die Messreihen jeweils mit dem Beginn einer neuen MLS-Periode

$$t_m = m \cdot M \cdot \Delta t = mT$$

beginnt, kann man erreichen, dass die erste Messung immer E_0 mit der Nummer $n = 0$ ist.

Unter dieser Voraussetzung ist

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{M-2} & \mu_{M-1} \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & & \mu_{M-1} & \mu_0 \\ \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \cdots & \mu_0 & \mu_1 \\ \cdots & & & \cdots & & \cdots \\ \mu_{M-1} & \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{M-3} & \mu_{M-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_{M-1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{M}_0 \vec{a} = \boldsymbol{M} \vec{a}$$

Die Matrix $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_0$ ist die MLS-Matrix. Wenn es nun gelingt, sie zu invertieren, dann kann man den Amplitudenvektor $\vec{a}$ berechnen

$$\vec{a} = \boldsymbol{M}^{-1} \vec{E} \quad ,$$

der die Raumakustik wiedergibt. Es zeigt sich, dass man die Matrixinversion gar nicht durchführen braucht, weil man der Zusammenhang zwischen der MLS- und der Hadamard-Matrix einen viel eleganteren Weg eröffnet.

Faktorisierung der MLS-Matrix

Auch die MLS-Matrix $\boldsymbol{M}$ lässt sich in eine $(2^{L-1}-1)\times(2^L-1)$ -Matrix $\boldsymbol{R}$ und eine $(2^{L-1}-1)\times(2^L-1)$ -Matrix $\boldsymbol{S}$ faktorisieren

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S}$$

Beispiel: Zur oben gezeigte 7×7 MLS-Matrix $\boldsymbol{M}$ gehören

$$R = \begin{pmatrix} -1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 \\ -1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & +1 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad S = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & +1 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix $\boldsymbol{R}$ wird erzeugt, in dem man die Zahlen

$$\{4,2,1,6,3,7,5\}$$

binär darstellt

$$k = \sum_{j=0}^{L-1} K_j 2^j$$

und anschliessend aus den Bits K_j mit der Formel

$$r_{k,j} = (-1)^{K_j}$$

die Elemente der Matrix berechnet. Das LSB steht jeweils ganz links. Analog geht bei den Elementen von $\boldsymbol{S}$ von, nur ist die Zahlenfolge hier

$$\{4,6,7,3,5,2,1\} \quad .$$

Vergleicht man Zahlenfolge der Matrix $\boldsymbol{R}$ mit der von $\boldsymbol{P}$ aus der Faktorisierung der Hadamard-Matrix und lässt dabei die führende Null weg, dann stellt man folgende Entsprechungen fest:

$$\begin{array}{lccccccc} \boldsymbol{R}: & 4 & 2 & 1 & 6 & 3 & 7 & 5 \\ \boldsymbol{P}: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}$$

Das heisst, man kann die Matrix $\boldsymbol{R}$ in die Matrix $\boldsymbol{P}$ überführen, indem man ihre Zeilen vertauscht: Zeile 1 wird zu Zeile 4, Zeile 2 bleibt wo sie ist, Zeile 3 wird zu Zeile 1, Zeile zu Zeile 4 usw.

Entsprechendes gilt für die Spalten der Matrix $\boldsymbol{S}$

$$\begin{array}{lccccccc} \boldsymbol{S}: & 4 & 6 & 7 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ \boldsymbol{Q}: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}$$

Hier wandert die Spalte 1 in Spalte 4, Spalte 2 wird zu Spalte 6, Spalte 3 zu Spalte 7 usw.

Wenn man die Zeilen und Spalten der MLS-Matrix $\boldsymbol{M}$ nach diesen Regeln vertauscht, dann wird daraus, bis auf die fehlende erste Zeile und Spalte, eine Hadamard-Matrix:

Beispiel: Die oben gezeigte MLS-Matrix $\boldsymbol{M}$ ist

$$
\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

Vertauscht man die Zeilen entsprechend der Vorschrift

$$
\begin{array}{lcl} 4 & \rightarrow & 1 \\ 2 & \rightarrow & 2 \\ 1 & \rightarrow & 3 \\ 6 & \rightarrow & 4 \\ 3 & \rightarrow & 5 \\ 7 & \rightarrow & 6 \\ 5 & \rightarrow & 7 \end{array}
$$

wird daraus die Matrix

$$
\boldsymbol{M'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .
$$

Anschliessend werden die Spalten gemäss

$$
\begin{array}{lcl} 4 & \rightarrow & 1 \\ 6 & \rightarrow & 2 \\ 7 & \rightarrow & 3 \\ 3 & \rightarrow & 4 \\ 5 & \rightarrow & 5 \\ 2 & \rightarrow & 6 \\ 1 & \rightarrow & 7 \end{array}
$$

vertauscht und man bekommt die Matrix

$$
\boldsymbol{M}'' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

Ergänzt man noch die erste Spalte und Zeile mit lauter Einsen, bekommt man

$$
\boldsymbol{M}''' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{\boldsymbol{H}}_8 \quad .
$$

Um daraus die Hadamard-Matrix zu machen, braucht man nur die Nullen durch -1 ersetzen.

Das Beispiel demonstriert, dass aus einer MLS-Matrix durch Vertauschen von Zeilen und Spalten und Ergänzen der ersten Zeile und Spalte tatsächlich eine Hadamard-Matrix entsteht.

Der Bezug zur Praxis

Das erstaunliche Ergebnis dieser ganzen Frickelei ist, dass sich jede $(2^L-1)\times(2^L-1)$ MLS-Matrix, durch Vertauschen der Zeilen und Spalten untereinander mit anschliessendem Ergänzen der ersten Zeile und der ersten Spalte, zu einer $2^L\times 2^L$ Hadamard-Matrix umformen lässt.

Die Matrix $\boldsymbol{V}$ soll das Vertauschen der Zeilen, die Matrix $\boldsymbol{W}$ das Vertauschen der Spalten der Hadamard-Matrix bewirken. Dann ist

$$
\boldsymbol{M} = \boldsymbol{V}^T \tilde{\boldsymbol{H}} \boldsymbol{W}
$$

Setzt man das in die Darstellung der Messwertvektors ein, bekommt man

$$
\vec{E} = \boldsymbol{M}\vec{a} = \boldsymbol{V}^T \tilde{\boldsymbol{H}} \boldsymbol{W} \vec{a}
$$

Die Multiplikation mit $\boldsymbol{V}^T$ bewirkt genau die Umkehrung der Vertauschungen, die durch Multiplikation mit $\boldsymbol{V}$ erzeugt wurden; d.h. die Matrixmultiplikation

$$
\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}^T = \mathbf{1}
$$

erzeugt die Einheitsmatrix $\mathbf{1}$. Damit lässt wird aus der Gleichung für den Messwertvektor

$$\boldsymbol{V}\vec{E} \;=\; \boldsymbol{V}\boldsymbol{V}^T\tilde{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{W}\vec{a} \;=\; \tilde{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{W}\vec{a}$$

Jetzt werden links und rechts an den Vektoren $\boldsymbol{V}\vec{E}$ und $\boldsymbol{W}\vec{a}$ je die erste Spalte ergänzt, so dass die Vektoren $\overline{(\boldsymbol{V}\vec{E})}$ und $\overline{(\boldsymbol{W}\vec{a})}$ entstehen. Gleichzeitig werden an $\tilde{\boldsymbol{H}}$ die erste Zeile und die erste Spalte ergänzt, die aus lauter Einsen bestehen. Dadurch entsteht daraus die Hadamard Matrix:

$$\overline{(\boldsymbol{V}\vec{E})} \;=\; \boldsymbol{H}\overline{(\boldsymbol{W}\vec{a})}$$

Diese Gleichung kann man nach $\vec{a}$ auflösen

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{H}\overline{(\boldsymbol{V}\vec{E})} \;&=\; \boldsymbol{H}\,\boldsymbol{H}\overline{(\boldsymbol{W}\vec{a})}\\
\boldsymbol{H}\overline{(\boldsymbol{V}\vec{E})} \;&=\; \frac{1}{2^M}\overline{(\boldsymbol{W}\vec{a})}\\
\boldsymbol{H}\overline{(\boldsymbol{V}\vec{E})} \;&=\; \frac{1}{2^M}\overline{(\boldsymbol{W}\vec{a})}\\
2^M\boldsymbol{W}^T\tilde{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{V}\vec{E}) \;&=\; \boldsymbol{W}^T\boldsymbol{W}\vec{a}\\
\vec{a} \;&=\; 2^M\boldsymbol{W}^T\left(\tilde{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{V}\vec{E})\right)
\end{aligned}$$

Man kann also den Amplitudenvektor $\vec{a}$ nach folgendem Algorithmus aus dem Messvektor $\vec{E}$ berechnen:

1. Die Zeilen von $\vec{E}$ vertauschen (entsprechend der Vorgabe von $\boldsymbol{V}$)
2. Dem dadurch entstandenen Vektor $\overline{\vec{E}}$ eine zusätzliche erste Komponente mit dem Wert 1 zufügen.
3. Diesen Vektor Hadamardtransformieren
4. Vom neu entstandenen Vektor die erste Komponente weglassen
5. Die Spalten des so entstandenen Vektors vertauschen (entsprechend der Vorgabe von $\boldsymbol{W}$)
6. Der so erhaltene Vektor, multipliziert mit 2^M ist der gesuchte Amplitudenvektor $\vec{a}$.

Was hier, der Anschaulichkeit wegen am Beispiel der Raumakustik, beschrieben wurde, lässt sich analog auf jedes andere lineare, zeitinvariante System (LTI-System) übertragen. Die besondere Beziehung zwischen Hadamard- und MLS-Matrix lässt sich also dazu benutzen, um die Übertragungsfunktion eines LTI-Systems sehr effizient zu berechnen. Es werden nur Vertauschungen, Additionen, Subtraktionen und M Multiplikationen mit 2^M benötigt.

Impulsantwort LTI Systeme

Die Impulsantwort eines LTI Systems ist das Ausgangssignal, das nach Anregung des Systems mit einem Dirac-Impuls

$$\delta(t) \;=\; \begin{Bmatrix} 1 & \text{für } t \;=\; 0 \\ 0 & \text{für } t \;\neq\; 1 \end{Bmatrix} \quad .$$

Kennt man die Impulsantwort $\sigma(t)$, dann kann man auch das Ausgangssignal $\alpha(t)$ des Systems zu jedem beliebigen Eingangssignal $\epsilon(t)$ berechnen

$$\alpha(t) \;=\; \int_{-\infty}^{t} d\tau \;\; \epsilon(\tau)\sigma(t-\tau) \quad .$$

Man könnte das Integral auch bis $+\infty$ erstreckt werden, aber es auch klar, dass die Impulsantwort bei t abbricht, weil sie keinen Beitrag aus der Zeit nach t , also aus der Zukunft enthalten kann. Natürlich kann man den Zeitmasstab auch umkehren

$$\alpha(t) \;=\; \int_{t}^{-\infty} d\tau \;\; \epsilon(t-\tau)\sigma(\tau) \;=\; -\int_{-\infty}^{t} d\tau \;\; \epsilon(t-\tau)\sigma(\tau)$$

Daraus folgt die Reprozitätsbeziehung

$$\epsilon(\tau)\sigma(t-\tau) \;=\; -\epsilon(t-\tau)\sigma(\tau)$$

In der Praxis verwendet man periodische Rechtecksignale, um das System anzuregen. Das periodische Rechtecksignal $\rho(t)$ wird durch

$$\rho(t) \;=\; \begin{Bmatrix} 1 & \text{für } (t \;\; \text{mod} \;\; T) \;=\; 0 \\ 0 & \text{für } (t \;\; \text{mod} \;\; T) \;\neq\; 1 \end{Bmatrix}$$

dargestellt. Im zugehörigen Ausgangssignal wird sich nach sehr vielen Perioden ein stationäres Ausgangssignal einstellen; der Verlauf über die Dauer einer Periode ist dann immer derselbe. Man kann t also auf das Zeitintervall einer Periode beschränken

$$0 \;\leq\; t \;<\; T \quad .$$

Die Systemantwort ist dann

$$\alpha(t) \;=\; \sum_{l=-\infty}^{L} \int_{0}^{t} d\tau\, \rho(\tau)\sigma(t-\tau-l\cdot T) \quad \text{mit} \quad L \;=\; t \;\; \text{div} \;\; T$$

Jetzt geht man zur diskreten Abtastung des Ausgangssignals über: Gemessen wird in regelmässig in Zeitabständen von Δt gemessen. Das Ausgangssignal zum Zeitpunkt

$$\alpha(t_j) \;=\; \sum_{l=-\infty}^{L} \left\{ \left\{ \sum_{k=0}^{j} \int_{0}^{\Delta t} d\,\tau\, \rho(\tau)\sigma(t-\tau-l\cdot T) \right\} + \int_{j\cdot\Delta T}^{t} d\,\tau\, \rho(\tau)\sigma(t-\tau-l\cdot T) \right\}$$