Restwelligkeit von geglätteten PWM Signalen

K. Albers

14. Juni 2010

Es wird die Restwelligkeit eines passiven RC-Tiefpassfilters erster bis dritter Ordnung abgeschätzt. Dazu wird das Ausgangssignal der ersten Oberwelle eines PWM Signals mit 50 % Tastverhältnis berechnet. Am Ende wird alles in einem Graphen für die praktische Auslegung des Tiefpassfilters zusammengefasst und mit einigen Messwerten verglichen.

Inhaltsverzeichnis

1 PWM Signal

Abb. 1 zeigt ein PWM-Signal mit Signalamplitude U_0 und Periodendauer T bei 50 % Puls-Pausen-Verhältnis. Bei diesem Tastverhältnis ist laut
http://focus.ti.com/lit/an/spra490/spra490.pdf
die größte Restwelligkeit zu erwarten. Die Periodendauer der PWM beträgt bei einem AVR mit Hardware-PWM:

$$T = \frac{1}{f_Q} \cdot 2^{res} \cdot prescale \tag{1}$$

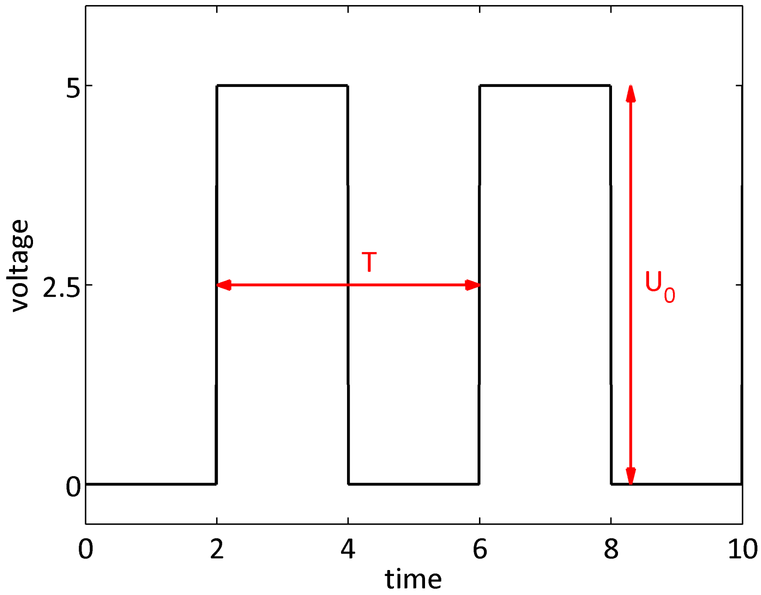

Abbildung 1: PWM Signal mit 50% Puls-Pausen-Verhältnis

Entsprechend beträgt die PWM-Frequenz f_{PWM}:

$$f_{\mathrm{PWM}} = \frac{1}{T} = \frac{f_Q}{2^{res} \cdot prescale} \tag{2}$$

f_Q ist die Quarzfrequenz, res ist die Auflösung der PWM (8 für 8 bit, 9 für 9 bit, ...) und $prescale$ der eingestellte Taktfrequenzteiler des Timers ($prescale = 1,\ 8,\ 64$,...). Das PWM Signal kann mittels Fourierreihe in eine Summe harmonischer Sinuswellen zerlegt werden. Da es achsensymmetrisch ist, fallen alle Sinusterme raus. Außerdem fallen die geraden Oberwellen raus. Die Fourierzerlegung lautet:

$$U(t) = \frac{U_0}{2} + \sum \frac{2U_0}{(2n-1)\pi} \cdot \sin\left((2n-1) f_{\mathrm{PWM}} t\right) \tag{3}$$

Quelle: http://www.physik.uni-kl.de/aeschlimann/lectures/EXP1SS06/23.Vorlesung25.07.06.pdf

Abb. 2 zeigt eine Fourierzerlegung des PWM Signals in seinen Gleichspannungsanteil und die ersten drei Oberwellen, sowie die Summe der Komponenten.

2 Tiefpassfilter

Um aus dem PWM Signal eine saubere DC Spannung zu erzeugen, wird im praktischen Fall ein passiver Tiefpassfilter verwendet, der die harmonischen Sinusschwingungen aus dem Signal filtert. Man kann sicher

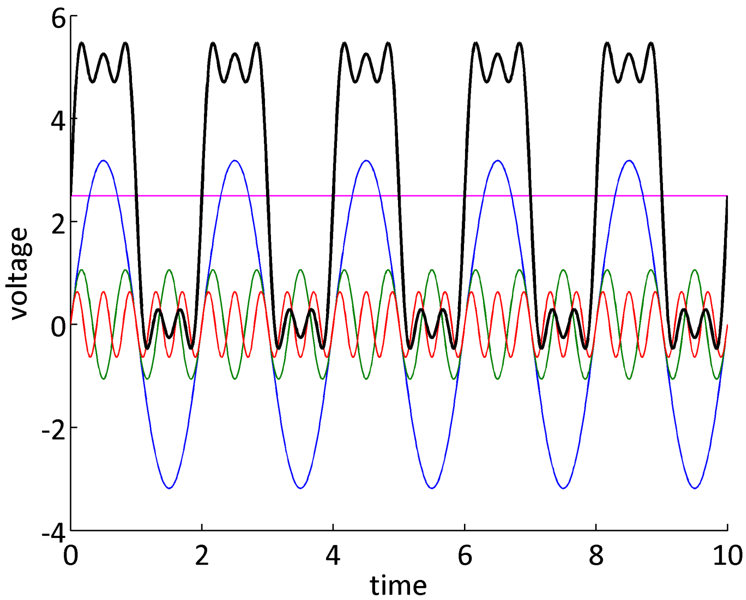

Abbildung 2: Fourierzerlegung des PWM Signals in den Gleichspannungsanteil (magenta) und die ersten 3 Oberwellen, sowie die Summe der Komponenten

diskutieren, daß aktive Filter sinnvoller sind, aber persönlich bin ich der Meinung, daß man sich dann ab einem gewissen Filteraufwand besser gleich einen DAC kauft. Hier sollen nur passive RC Filter betrachtet werden. Bei der Wahl eines RC Filters zur PWM Glättung ist ein Kompromiss aus 2 Eigenschaften zu finden. Zum einen soll die Restwelligkeit des Signals möglichst gering sein. Zum anderen soll die gewünschte Spannung möglichst schnell erreicht werden. Leider sorgt eine starke Unterdrückung der Restwelligkeit automatisch auch für eine langsamere Einstellbarkeit der Spannung. Die blauen Kurven in Abb. 3 zeigen das Verhalten eines einzelnen RC Filters. Oberhalb einer Grenzfrequenz f_G fällt die übertragene Amplitude mit 20 dB pro Dekade ab. Die Grenzfrequenz beträgt

$$f_G = \frac{1}{2\pi RC} \tag{4}$$

Eine Sinusschwingung bei der Grenzfrequenz wird um das $\sqrt{2}$-fache abgeschwächt. Schaltet man mehrere identische Tiefpassfilter hintereinander, ändert sich das Verhalten entsprechend der grünen Kurven (2-facher Filter) oder roten Kurven (3-facher Filter). Die Grenzfrequenz bleibt gleich, aber die Abschwächung bei hochfrequenten Signalen beträgt jetzt 40 dB bzw. 60 dB pro Dekade. Wie in der Sprungantwort unten rechts dargestellt, ändert sich auch die Zeit zum Erreichen einer neuen Ausgangsspannung ein wenig.

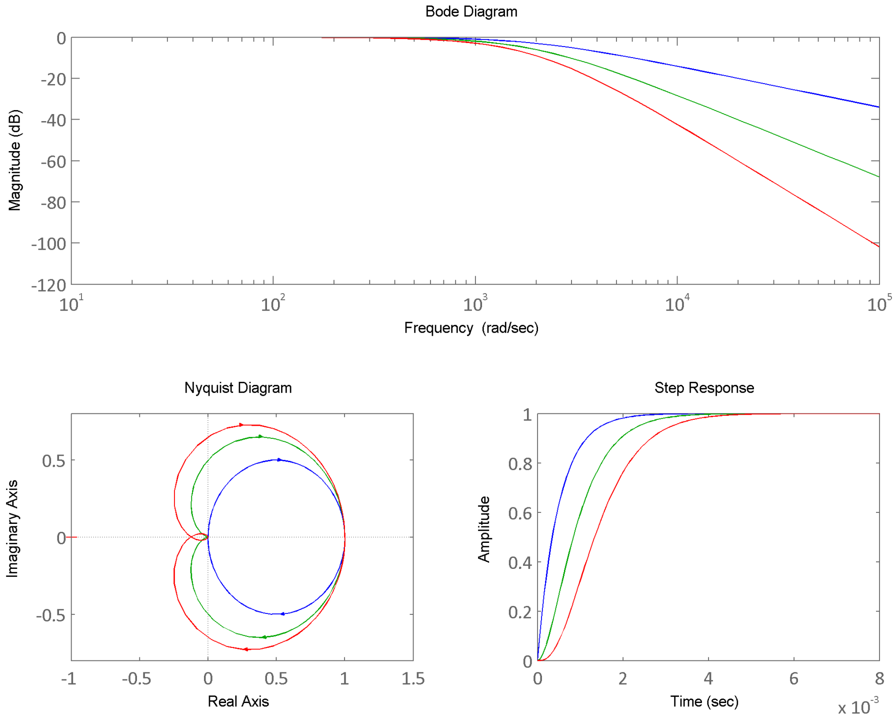

Abbildung 3:

Die Frage ist nun, wie ein RC Filter ausgelegt werden soll und welche Performance (Ausregelgeschwindigkeit und Restwelligkeit) erwartet werden kann. Die Ausregelgeschwindikeit ist relativ einfach, denn ein neuer Spannungswert wird nach ungefähr $t = 5RC$ erreicht. Damit beträgt die DAC Bandbreite f_{DAC} ca.

$$f_{DAC} \leq \frac{1}{5RC} \tag{5}$$

Die Restwelligkeit ist komplizierter zu berechnen. Im Folgenden soll die Restwelligkeit mittels Laplacetransformation abgeschätzt werden.

2.1 1-facher RC Tiefpassfilter

Die Übertragungsfunktion $G(s)$ eines RC-Gliedes lautet

$$G(s) = \frac{1}{1 + RCs} \tag{6}$$

Nach Abb. 2 wird der stärkste Einfluss auf die Restwelligkeit von der ersten Oberwelle erwartet. Diese erfährt zudem die geringste Dämpfung durch den Tiefpassfilter. Um die Restwelligkeit abzuschätzen, wird daher das Ausgangssignal eines Tiefpassfilters für ein Eingangssignal $U_{in}(t)$

berechnet, daß aus dem Gleichspannungsanteil und der ersten Oberwelle besteht.

$$U_{in}(t) = \frac{U_0}{2} + \frac{2U_0}{\pi} \cdot \sin(2\pi f_{\mathrm{PWM}} t) \tag{7}$$

Die Laplacetransformierte $U_{in}(s)$ des Eingangssignals lautet:

$$U_{in}(s) = \frac{U_0}{2s} + \frac{2U_0\omega}{\pi(s^2+\omega^2)} \tag{8}$$

Es gilt $\omega = 2\pi f_{\mathrm{pwm}}$. Die Lösung für das Ausgangssignal $U_{out}(s)$ im Bildraum lautet

$$U_{out}(s) = G(s) \cdot U_{in}(s) = \frac{1}{1+RCs} \cdot \left(\frac{U_0}{2s} + \frac{2U_0\omega}{\pi(s^2+\omega^2)}\right) \tag{9}$$

Das Ausgangssignal läßt sich als Summe des Ausgangssignals für die Gleichspannung und des Ausgangssignals für die Oberwelle schreiben. Für den Gleichspannungsanteil $U_{out}^{gleich}(s)$ gilt:

$$U_{out}^{gleich}(s) = G(s) \cdot U_{in}(s) = \frac{1}{1+RCs} \cdot \frac{U_0}{2s} \tag{10}$$

Im Zeitbereich ist das einfach die Aufladekurve eines Kondensators, was nicht erstaunt:

$$U_{out}^{gleich}(t) = \frac{U_0}{2} \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right) \tag{11}$$

Diese Gleichung beschreibt im Prinzip, wie der Tiefpass auf eine Änderung der gewünschten Ausgangsspannung reagiert. Für die Restwelligkeit ist das Ausgangssignal der ersten Oberwelle verantwortlich. Im Bildbereich lautet das Ausgangssignal $U_{out}^{ober}(s)$:

$$U_{out}^{ober}(s) = \frac{1}{1+RCs} \cdot \frac{2U_0\omega}{\pi(s^2+\omega^2)} \tag{12}$$

Nach Rücktransformation lautet das zeitliche Ausgangssignal $U_{out}^{ober}(t)$:

$$U_{out}^{ober}(t) = \frac{2U_0 \sin(t\omega) + 2C\,R\,U_0\,\omega\left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{C\,R}} - \cos(t\omega)\right)}{\pi\,(1 + C^2\,R^2\,\omega^2)} \tag{13}$$

Für große Zeiten $t > 5RC$, also dann, wenn der neue Ausgangsspannungswert anliegt, wird die e-Funktion Null und es bleibt nur die Restwelligkeit. Das gleiche Resultat ergibt sich durch Berechnung des Betrages der Übertragungsfunktion. Dies wäre hier einfacher, hat aber den Nachteil, daß nicht beliebige Eingangsspannungssignalformen berechnet werden können. Unter Zusammenfassung der Sinusterme und Vernachlässigung der Phase des Sinus (interessiert nicht für die Restwelligkeitsamplitude):

$$U_{out}^{welle}(t) = \frac{2U_0}{\pi\sqrt{1 + C^2\, R^2\, \omega^2}} \cdot \sin\left(2\pi f_{\mathrm{PWM}} t\right) \tag{14}$$

Die maximale Spitze-Spitze Restwelligkeit ΔU_{ss} bei 50 % PWM Tastverhältnis und einem einfachen RC-Filter beträgt also:

$$\Delta U_{ss} = \frac{4U_0}{\pi\sqrt{1 + C^2\, R^2\, \omega^2}} \tag{15}$$

2.2 2-facher RC Tiefpassfilter

Die Übertragungsfunktion von 2 hintereinandergeschalteten RC-Gliedern lautet:

$$G(s) = \frac{1}{(1 + RCs)^2} \tag{16}$$

Die langsame Änderung von Spannungssignalen ergibt sich wieder aus der Reaktion auf den Gleichspannungsanteil:

$$U_{out}^{gleich}(s) = G(s) \cdot U_{in}(s) = \frac{1}{(1 + RCs)^2} \cdot \frac{U_0}{2s} \tag{17}$$

Und damit:

$$U_{out}^{gleich}(t) = \frac{U_0}{2} \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{R\,C}}\right) - \frac{U_0\, t}{2\, C\, R} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{R\,C}} \tag{18}$$

Ließe sich weiter vereinfachen, aber es ist bereits erkennbar, daß neue Ausgangsspannungen nach ca. $5RC$ anliegen. Das Ausgangssignal der ersten Oberwelle im Bildbereich lautet:

$$U_{out}^{ober}(s) = \frac{1}{(1 + RCs)^2} \cdot \frac{2U_0\omega}{\pi(s^2 + \omega^2)} \tag{19}$$

Nach Rücktransformation erhält man:

$$U_{out}^{ober}(t) = \frac{2\, U_0}{\pi\, \left(C^2\, R^2\, \omega^2 + 1\right)^2} \cdot \left[\sin(t\,\omega) \cdot \left(1 - C^2\, R^2\, \omega^2\right) - 2\, C\, R\omega\, \cos(t\,\omega) + \mathrm{e}^{-\frac{t}{C\,R}} \cdot \left(t\,\omega + 2\, C\, R + C^2\, R^2\, t\,\omega^3\right)\right] \tag{20}$$

Auch hier interessiert nur der eingeschwungene Zustand nach $5RC$, so daß der e-Funktionsteil rausfällt. Dann gilt:

$$U_{out}^{welle}(t) = \frac{2\, U_0}{\pi\, \left(C^2\, R^2\, \omega^2 + 1\right)^2} \cdot \left[\sin(t\,\omega) \cdot \left(1 - C^2\, R^2\, \omega^2\right) - 2\, C\, R\omega\, \cos(t\,\omega)\right] \tag{21}$$

Unter Vernachlässigung der Phasenverschiebung lassen sich *cos* und *sin* Term zusammenfassen:

$$U_{out}^{welle}(t) = U_0 \cdot \underbrace{\frac{2\sqrt{\left(1 - C^2\,R^2\,\omega^2\right)^2 + 4\,C^2\,R^2\,\omega^2}}{\pi\left(1 + C^2\,R^2\,\omega^2\right)^2}}_{\text{Daempfung}} \cdot \sin(t\,\omega) \tag{22}$$

Die maximale Spitze-Spitze Restwelligkeit ΔU_{ss} bei 50 % PWM Tastverhältnis und einem zweifachen RC-Filter beträgt also:

$$\Delta U_{ss} = U_0 \cdot \frac{4\sqrt{\left(1 - C^2\,R^2\,\omega^2\right)^2 + 4\,C^2\,R^2\,\omega^2}}{\pi\left(1 + C^2\,R^2\,\omega^2\right)^2} \tag{23}$$

2.3 3-facher Tiefpassfilter

Die Übertragungsfunktion von 3 hintereinandergeschalteten RC-Gliedern lautet:

$$G(s) = \frac{1}{\left(1 + RCs\right)^3} \tag{24}$$

Die langsame Änderung von Spannungssignalen ergibt sich wieder aus der Reaktion auf den Gleichspannungsanteil:

$$U_{out}^{gleich}(s) = G(s) \cdot U_{in}(s) = \frac{1}{\left(1 + RCs\right)^3} \cdot \frac{U_0}{2s} \tag{25}$$

Und damit:

$$U_{out}^{gleich}(t) = -\frac{U\,\left(\frac{2\,C^2}{\mathrm{e}^{\frac{t}{C\,R}}} - 2\,C^2\right)}{4\,C^2} - \frac{\frac{U\,t^2}{4\,\mathrm{e}^{\frac{t}{C\,R}}} + \frac{C\,R\,U\,t}{2\,\mathrm{e}^{\frac{t}{C\,R}}}}{C^2\,R^2} \tag{26}$$

Hab ich nicht mehr vereinfacht.
Ähnlich wie oben ergibt sich das zeitliche Ausgangssignal der Oberwelle für den eingeschwungenen Zustand:

$$U_{out}^{welle}(t) = \frac{2U_0}{\pi\left(1 + C^2R^2\omega^2\right)^3} \cdot \left[\left(C^3R^3\omega^3 - 3CR\omega\right)\cos\left(\omega t\right) + \left(1 + 3C^2R^2\omega^2\right)\sin\left(\omega t\right)\right] \tag{27}$$

Unter Vernachlässigung der Phase ergibt das

$$\Delta U_{ss} = U_0 \cdot \frac{4\sqrt{\left(C^3R^3\omega^3 - 3CR\omega\right)^2 + \left(1 + 3C^2R^2\omega^2\right)^2}}{\pi\left(1 + C^2\,R^2\,\omega^2\right)^3} \tag{28}$$

3 Filterauslegung

Mit obigen Berechnungen läßt sich die prozentuale Restwelligkeit $\frac{\Delta U_{ss}}{U_0}$ eines PWM Signals gegenüber dem Produkt aus RCf_{PWM} ermitteln. Die

Spannungsauflösung der PWM beträgt $U_0/2^{res}$. Es scheint im Prinzip nicht sinnvoll, die Restwelligkeit deutlich geringer als die Spannungsauflösung zu wählen. Daher zeigt Abb. 4 die relative Restwelligkeit gemeinsam mit der Spannungsauflösung für verschiedene Bit-Tiefen in einem Graphen. Aus diesem Graph kann das erforderliche Produkt $R\,C\,f_{\mathrm{PWM}}$ für den Tiefpassfilter ermittelt werden. Mit der erreichbaren PWM-Frequenz kann dann das erforderliche Produkt für RC berechnet werden. Der Graph zeigt zusätzlich Messwerte für die Dämpfung bei Sinussignalen (Sternchen) und bei einer Rechtfunktion (Kreise). Abweichungen sind vermutlich Bauteiltoleranzen (hab den Kondensator nicht nachgemessen). Die Messung wurde mit einem Frequenzgenerator und einem Oszi bei einem Widerstand von 10k und einem 33nF Kondensator durchgeführt. Offenkundig ist die Näherung für die Berechnung der Restwelligkeit über die erste Oberwelle schon ganz gut. Bei „langsamen“ Signalen sind die theoretischen Kurven falsch, da sie nur für eingeschwungene Zustände gelten. Die theoretischen Kurven wurden hier aus Tippfaulheit einfach über den Betrag der Übertragungsfunktion berechnet (die berechneten Verläufe von oben liegen aber bei höheren Frequenzen drauf, sollten also stimmen).

Ein paar Aussagen aus dem Graphen:

- Die Berechnung der Restwelligkeit mit Hilfe der Dämpfung der ersten Oberwelle (PWM Frequenz) ist gut genug
- Der Umstieg von einem einfachen auf einen zweifachen Tiefpassfilter bringt auf jeden Fall eine Menge, da der zweifache Tiefpassfilter die gleiche Dämpfung bereits bei weniger als 1/20 des RC Produktes erreicht (ca. 20-fache DAC-Frequenz möglich). Weiteres Erhöhen der Filterordnung bringt dann immer weniger.
- Verdopplung der PWM Frequenz halbiert benötigtes RC Produkt (Verdopplung der möglichen DAC-Frequenz)

Im Prinzip ist die Wahl des Widerstandes egal, nur das RC Produkt muss stimmen. Würde aber aus Sicherheitsgründen den Widerstand so wählen, daß bei versehentlichem Ein- und Ausschalten eines DC Signals am PWM Pin die Strombelastungsgrenze des Pins nicht überschritten wird (also irgendwas im kΩ Bereich). Gibt's da vielleicht noch andere Kriterien?

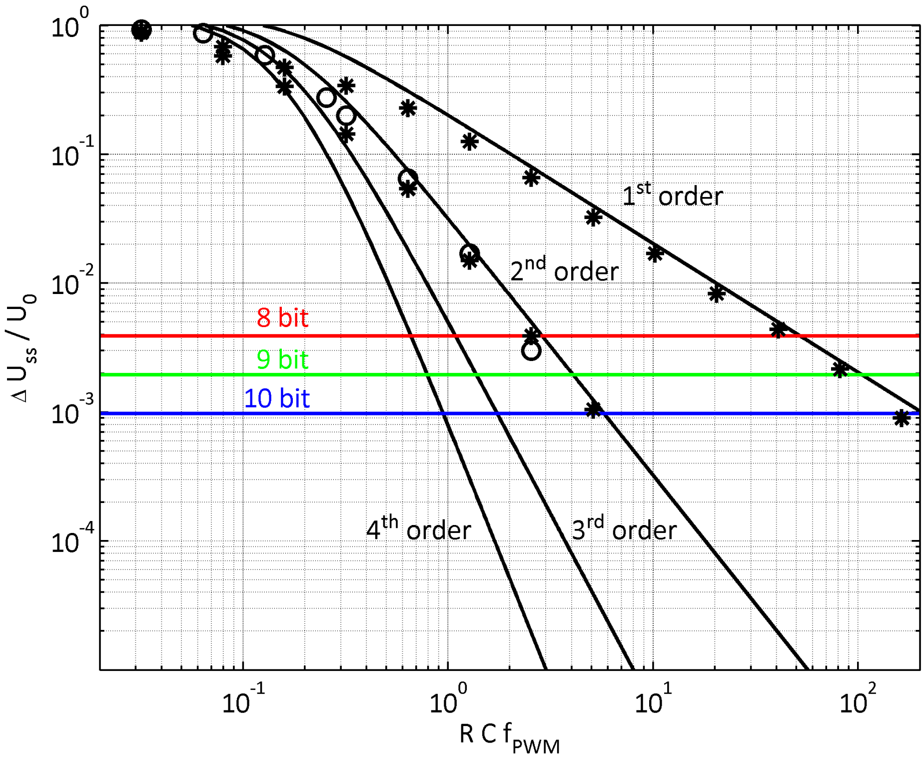

Abbildung 4: Spitze-Spitze Restwelligkeit der ersten Oberwelle für verschiedene Tiefpassordnungen gegenüber dem Produkt aus $R\,C\,f_{\mathrm{PWM}}$ und Spannungsauflösungsgrenze der PWM; Symbole: Sternchen: Messwerte für Sinusdämpfung, Kreise: Messwerte für Rechteckfunktionsdämpfung mit 2-fachem RC-Filter