1 Einleitung

Der hier dargelegte Algorithmus wurde von Herrn. D. Austin veröffentlicht.

2 Physikalische Gesetze

Winkelgeschwindigkeit einer gleichförmigen Drehbewegung: Gl. [2.1] $\omega = \frac{\delta\gamma}{\delta t}$

Winkelbeschleunigung einer beschleunigten Drehbewegung: Gl. [2.2] $\alpha = \frac{\delta\omega}{\delta t}$

Zurückgelegter Winkel bei einer beschleunigten Drehbewegung: Gl. [2.3] $\gamma = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$

3 Die Grundlagen

Die Weiterschaltung der Schritte soll mit Hilfe eines Timers auf dem Mikrocontroller erfolgen. Dieser wird mit Hilfe eines internen Taktgebers und einem Zähler realisiert, welcher mit jedem Takt um eine Stelle erhöht wird wird.

Timertakt - Gl. [3.1] $T_t = \frac{1}{F_t}$ - mit Ft = Taktfrequenz in Hz nach Taktteilung

Erreicht der Zählerwert den voreingestellt Wert, erfolgt die Ausgabe eines neuen Schritts.
Die Zeit zwischen zwei Schritten bestimmt sich somit als Vielfache des Timertakts:

Schrittdauer - Gl. [3.2] $\delta t = cnt \cdot T_t = \frac{cnt}{F_t}$

Der dabei zurückgelegte Weg bestimmt sich aus dem Aufbau des verwendeten Schrittmotors.

Schrittwinkel des Motors - Gl. [3.3] $\beta = \frac{(2 \cdot \Pi)}{spr}$ - wobei spr = Schritte je Umdrehung.

Nach n Schritten legt der Rotor des Motors dementsprechend einen Winkel zurück von: $\gamma = n * \beta$

Damit soll nun eine Funktion hergeleitet werden, mit deren Hilfe der Zählerwert cnt zwischen zwei Schritten bestimmt werden kann.

Ziel : $cnt_n = f_{(t_{[n+1]} - t_n)}$

4 Bestimmung der Schrittdauer

Es gilt die Zeitdauer zwischen den einzelnen Schritten zu bestimmen. Während eines Schrittes ergibt sich eine mittlere Schrittgeschwindigkeit, welche sich gemäß Gleichung 2.1 bestimmt durch den zurückgelegten Winkel $\delta\gamma=\beta$ und Dauer des Schrittes $\delta t_x = cnt_x \cdot T_t$ ….

Mittlere Winkelgeschwindigkeit eines Schrittes - Gl. [4.1] $\bar{\omega}_x = \frac{\beta}{cnt_x \cdot T_t}$

Nach n Schritten ergibt sich daraus der gesamte zurückgelegte Winkel von $\gamma = n * \beta$. Die Veränderung der mittleren Winkelgeschwindigkeiten zwischen diesen Schritten wird durch die Winkelbeschleunigung bestimmt. Diesen Zusammenhang liefert Gleichung 2.3, welche den Drehwinkel anhand von α und der vergangenen Zeit bestimmt.

Setzt man diesen in Gleichung 2.3 ein $\gamma = n \cdot \beta = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$, so ergibt sich für die …

Dauer bis zum Erreichen des Schrittes n - Gl. [4.2] $t_n = \sqrt{\frac{2 \cdot n \cdot \beta}{\alpha}}$

Damit lässt sich nun die Zeit zwischen dem Schritt n und dem darauf folgenden Schritt n+1 bestimmen in dem die Differenz der beiden bis dahin abgelaufenen Zeiten gebildet wird:

$$\delta t_{(n)} = t_{n+1} - t_n = \sqrt{\frac{2 \cdot (n+1) \cdot \beta}{\alpha}} - \sqrt{\frac{2 \cdot n \cdot \beta}{\alpha}}$$

Dauer des Schrittes n - Gl. [4.3] $\delta t_{(n)} = \sqrt{\frac{2 \cdot \beta}{\alpha}} \cdot (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

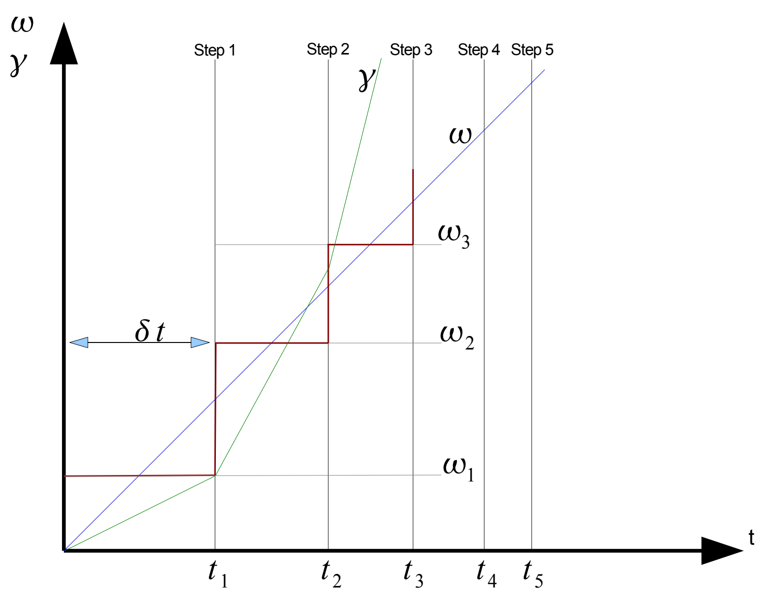

Bild 4.1)

Mit der so erlangten Gleichung 4.3 lässt sich nun die Frage nach dem Zählwert für den ersten Schritt beantworten, in dem wir für n=0 in die Gleichung einsetzen....

$$\delta t_{(n=0)}=\sqrt{\frac{2\cdot\beta}{\alpha}}\cdot(\sqrt{0+1}-\sqrt{0})=\sqrt{\frac{2\cdot\beta}{\alpha}}$$ → eingesetzt in Gl. 3.2 $$\delta t=\frac{cnt}{F_t}=\delta t_{(n=0)}=\sqrt{\frac{2\cdot\beta}{\alpha}}$$

Zählerwert für ersten Schritt - - Gl. [4.4] $$cnt_0=F_t\cdot\sqrt{\frac{2\cdot\beta}{\alpha}}$$

Die Zählerwerte aller folgenden Schritte lassen sich in gleicher Weise bestimmen.

Zählerwert für Schritt n - Gl. [4.5] $$cnt_n=F_t\cdot\sqrt{\frac{2\cdot\beta}{\alpha}}\cdot(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=cnt_0\cdot(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

Der Zählerwert für den Timer kann nun für jeden Schritt n berechnet werden, unter der Voraussetzung das die Schritte während der Beschleunigungsphase durch einen **Schrittzähler** mit gezählt werden.

Zur weiteren Vereinfachung werden zwei aufeinander folgende Zählerwerte in relativen Bezug genommen...

$$\frac{cnt_n}{cnt_{n-1}}=\frac{cnt_0\cdot(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{cnt_0\cdot(\sqrt{n-1+1}-\sqrt{n-1})} \quad\text{->}\quad \frac{cnt_n}{cnt_{n-1}}=\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})}$$

Rekursiver Zählerwert für Schritt n Gl. [4.6] $$\frac{cnt_n}{cnt_{n-1}}=\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1}{1-\sqrt{1-\frac{1}{n}}}$$

Mit diesem Ausdruck könnte nun der Zählwert cnt_n aus der aktuellen Schrittnummer und dem vorherigen Zählwert bestimmt werden. Dazu wäre aber eine ständige Berechnung der beiden Quadratwurzeln verbunden, was für kleinere Mikrocontroller keine leichte Aufgabe ist. Aus diesem Grund wird für den Algorithmus eine Näherung mit Hilfe einer Taylor-Reihe vorgenommen, welche die beiden Wurzeln wie folgt approximiert.

Approximation durch Taylor - Gl. [4.7] $$\sqrt{1\pm\frac{1}{n}}\approx 1\pm\frac{1}{2\cdot n}-\frac{1}{8\cdot n^2}$$

Setzt man diese Approximation in Gleichung 4.6 so ergibt sich

$$\frac{cnt_n}{cnt_{n-1}}=\frac{1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}-1}{1-(1-\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2})} \quad\text{->}\quad \frac{cnt_n}{cnt_{n-1}}=\frac{\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}}{\frac{1}{2n}+\frac{1}{8n^2}}=\frac{8n^2-2n}{8n^2+2n}$$

Approximierter rekursiver Zählerwert für Schritt n - Gl. [4.8] $$\frac{cnt_n}{cnt_{n-1}}=\frac{4n-1}{4n+1}=1-\frac{2}{4n+1}$$

Die Beschleunigungsphase ist aber natürlich letztlich mit dem Erreichen der vorgegebenen Endgeschwindigkeit beendet, welcher durch die Gleichung 2.2 bestimmt wird und zusammen mit der Gleichung 4.2 die Anzahl der Schritte zu bestimmen erlaubt.

$$t_n=\sqrt{\frac{2\cdot n\cdot\beta}{\alpha}}=\frac{\omega}{\alpha}$$ → Schritte bis zum Ende der Beschleunigungsphase - Gl. [4.9] $$n=\frac{\omega^2}{2\cdot\beta\cdot\alpha}$$

Nun scheint das Ziel erreicht und es gibt einen Algorithmus, welcher mit einfachen Grundrechenarten die Zählerwerte für die Schrittverzögerung von Schritt zu Schritt berechnen kann. Dies wurde aber durch eine Näherungslösung in Form der Taylor-Reihe mit drei Faktoren für den Wurzelausdruck erreicht, dessen Genauigkeit letztlich noch nicht betrachtet wurde.
Im Bild 4.2 wurde exemplarisch eine Verlauf mit $\omega=10\,;\alpha=10\,;spr=200\,;F_t=1\text{MHz}$ berechnet.

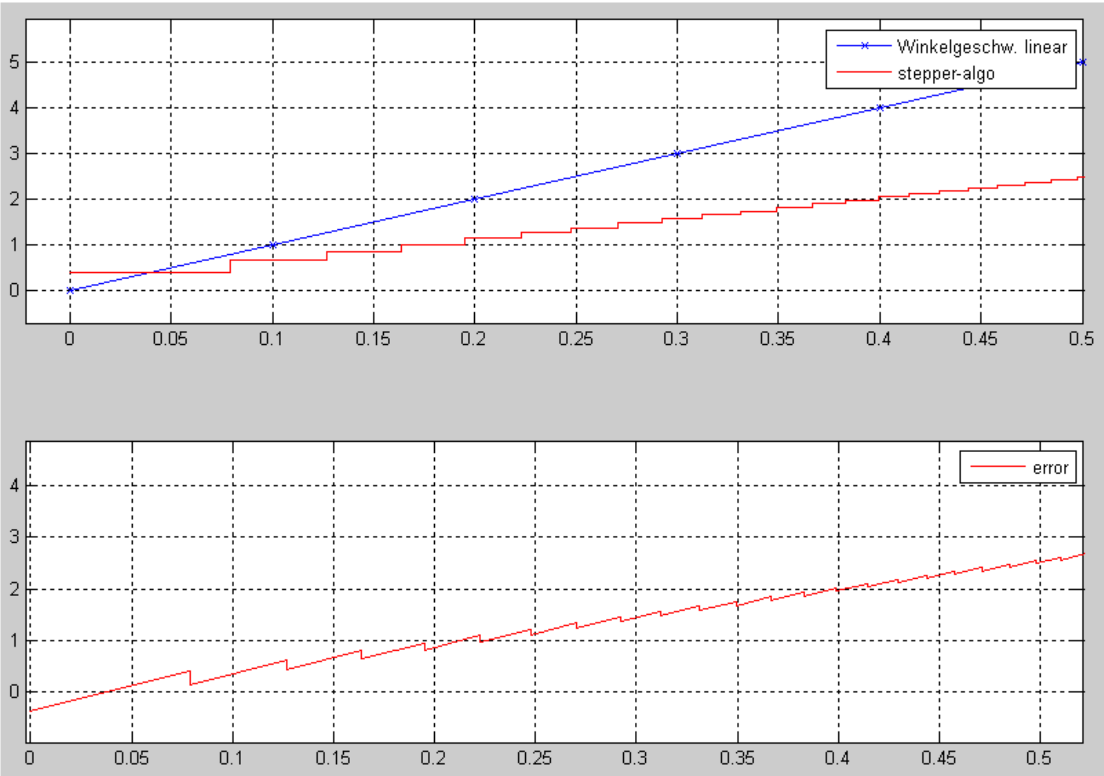

Bild 4.2)

$\omega=10\,;\alpha=10\,;spr=200\,;F_t=1\text{MHz}$

Nicht ganz das Ergebnis das man erwartet hätte – oder? Der untere, rote Verlauf zeigt den approximierten Verlauf der Winkelgeschwindigkeit und hat eine zunehmende Abweichung gegenüber dem oberen, linearen Verlauf. Verursacht wird dies in der Tat nur durch einen Fehler der Taylor-Reihe. Betrachten wir diesen Fehler näher. Die folgende Tabelle enthält die Werte für den Wurzelausdruck und dessen Approximation...

Approximation durch Taylor $\sqrt{1\pm\frac{1}{n}}\approx 1\pm\frac{1}{2\cdot n}-\frac{1}{8\cdot n^2}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
exakt	1,4142	1,2247	1,1547	1,1180	1,0954	1,0801	1,0690	1,0607	1,0541	1,0488
aprox.	1,0488	1,2188	1,1528	1,1172	1,0950	1,0799	1,0689	1,0605	1,0540	1,0488
delta	0,3654	0,0059	0,0019	0,0008	0,0004	0,0002	0,0001	0,0002	0,0001	0,0000

Zu sehen ist das der Fehler im ersten Schritt vergleichsweise groß ist, in den folgenden Schritten aber schon nahezu verschwindend gering. Noch deutlicher zeig diese die Graphik im Bild 4.3.

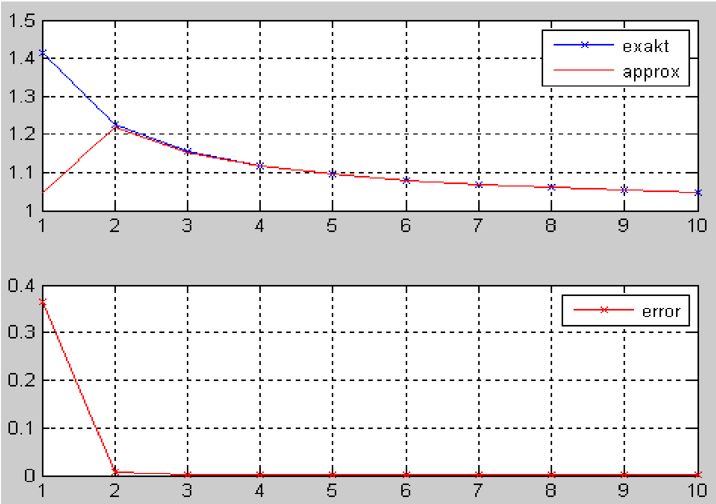

Bild 4.3)

Dadurch das der Algorithmus die Zählerwerte immer anhand des vorherigen Zählerwertes berechnet ergibt sich eine Fortpflanzung des relativen Fehlers im ersten Schritt, welcher sich damit in einer immer größer werdenden absoluten Abweichung vom Sollverlauf abbildet. Damit liegt die Lösung aber auch schon auf der Hand – wird der Fehler im ersten – und evtl. zweiten Schritt – korrigiert so ergeben sich im folgenden nur noch kleine Abweichungen. Zunächst wurde empirisch die erste Schrittdauer mit gemäß folgender Gleichung korrigiert... $cnt_0 = F_t \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \beta}{\alpha}} \cdot 0{,}676$

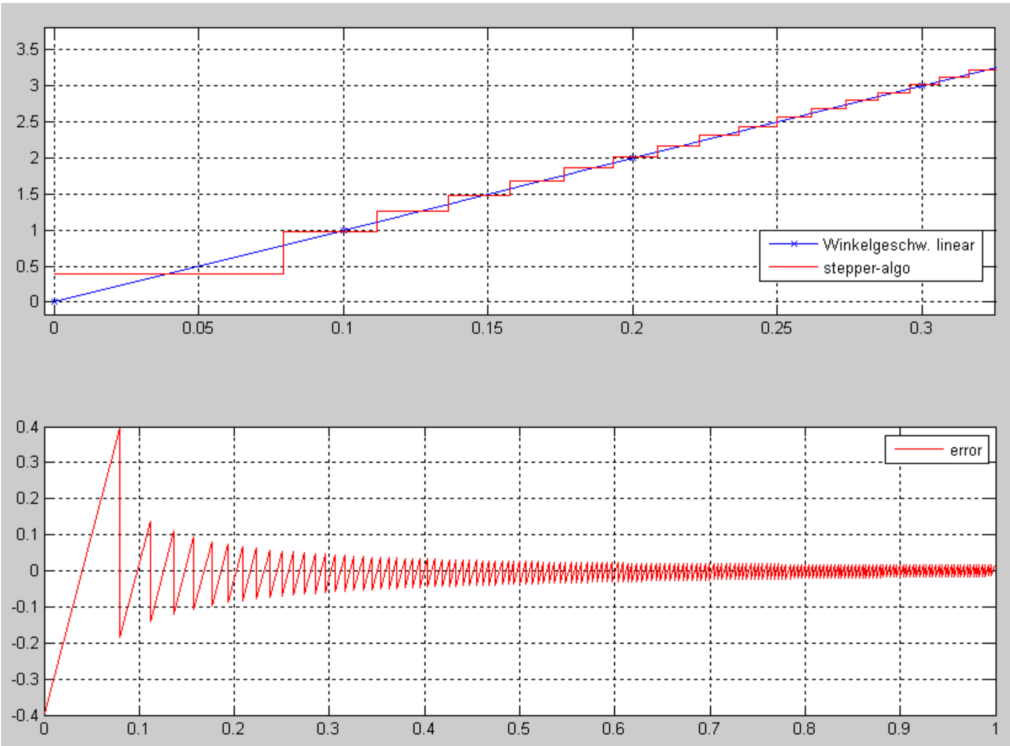

Bild 4.4) Approximation mit korrigierten Anfangszählerwert cnt_0

Das Ergebnis ist nun schon fast perfekt.

5 Ungleichförmig beschleunigte Bewegung

Ungleichförmig beschleunigte Bewegung – nun ja das bedeutet schlicht und einfach die Beschleunigung verändert sich. Der Algorithmus gemäß Gleichung 4.8 welcher die Zählwerte für den nächsten Schritt anhand des vorherigen Zählerwertes bestimmt ist nun schick für die Bearbeitung durch den Mikrocontroller, aber eine Änderung der Beschleunigung lässt dieser nun nicht mehr so einfach zu, da diese in der Gleichung nicht mehr – direkt – enthalten ist. Jedoch zeigt Gleichung 4.9 das die Anzahl der Schritte bis zum Ende der Beschleunigung invers proportional zu der vorgegeben Beschleunigung ist.
Dies bedeutet der Motor braucht mehr oder weniger Schritte je nach dem ob die Winkelbeschleunigung verkleinert oder vergrößert wird.

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{\frac{\omega^2}{2\cdot\beta\cdot n_1}}{\frac{\omega^2}{2\cdot\beta\cdot n_2}}$$ → Änderug der Beschleunigungen über den Schrittzähler- Gl. [5.1] $$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{n_2}{n_1}$$

Das bedeutet die Veränderung der Winkelbeschleunigung lässt sich durch eine Umrechnung des Schrittzählers bewerkstelligen

6 Anhang

Legende Formelzeichen:

- α - Winkelbeschleunigung
- β - Schrittwinkel des Motors
- γ - gesamter zurückgelegter Winkel der Drehbewegung
- T_t - Takt des Timers
- F_t - Frequenz des Timers
- cnt - Gesetzter Zählerwert des Timers
- n - Schrittzähler

Beispiele:

$\omega=10;\alpha=10;spr=200;F_t=1\text{MHz}$

Step	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Faktor	0,600000	0,777778	0,846154	0,882353	0,904762	0,920000	0,931034	0,939394	0,945946	0,951220	0,955556	0,959184
Count	53615,89	32169,54	25020,75	21171,4	18680,65	16901,54	15549,42	14477,04	13599,65	12864,53	12236,99	11693,13

$\omega=10;\alpha=;spr=200;F_t=2\text{MHz}$

Step	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Faktor	0,600000	0,777778	0,846154	0,882353	0,904762	0,920000	0,931034	0,939394	0,945946	0,951220	0,955556	0,959184
Count	65535	39321	30583	25877,92	22833,46	20658,85	19006,14	17695,37	16622,92	15724,39	14957,34	14292,57

$\omega=20;\alpha=26{,}74;spr=200;F_t=2\text{MHz}$

Step	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Faktor	0,600000	0,777778	0,846154	0,882353	0,904762	0,920000	0,931034	0,939394	0,945946	0,951220	0,955556	0,959184
Count	65535	39321	30583	25877,92	22833,46	20658,85	19006,14	17695,37	16622,92	15724,39	14957,34	14292,57

$\omega=10;\alpha=27;spr=200;F_t=2\text{MHz}$

Step	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Faktor	0,600000	0,777778	0,846154	0,882353	0,904762	0,920000	0,931034	0,939394	0,945946	0,951220	0,955556	0,959184
Count	65220,59	39132,36	30436,28	25753,77	22723,92	20559,73	18914,96	17610,48	16543,17	15648,95	14885,59	14224

$\omega=10;\alpha=2*27;spr=200;F_t=2\text{MHz}$

Step	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Faktor	0,600000	0,777778	0,846154	0,882353	0,904762	0,920000	0,931034	0,939394	0,945946	0,951220	0,955556	0,959184
Count	46117,92	27670,75	21521,7	18210,67	16068,24	14537,93	13374,89	12452,49	11697,79	11065,48	10525,7	10057,89

$\omega=10;\alpha=4*27;spr=200;F_t=2\text{MHz}$

Step	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Faktor	0,600000	0,777778	0,846154	0,882353	0,904762	0,920000	0,931034	0,939394	0,945946	0,951220	0,955556	0,959184
Count	32610,3	19566,18	15218,14	12876,89	11361,96	10279,87	9457,48	8805,24	8271,59	7824,47	7442,79	7112