<u>Zerlegung einer Sinusgröße in Sinus- und Kosinus-Anteil</u>

Jede allgemeine harmonische Schwingung der Form

$$\boxed{c(t) = \hat{C}\sin(\omega t + \varphi_{0c})} \qquad (1)$$

lässt sich wegen $\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}$ darstellen als

$$c(t) = \hat{C}[\sin(\omega t)\cos\varphi_{0c} + \cos(\omega t)\sin\varphi_{0c}] = \hat{C}\sin\varphi_{0c}\cos(\omega t) + \hat{C}\cos\varphi_{0c}\sin(\omega t),$$

d.h. als Summe $\boxed{c(t) = a(t) + b(t)}$ (2)

einer <u>reinen</u> <u>Kosinus</u>funktion <u>gleicher Frequenz</u> der Form

$$\boxed{a(t) = \hat{A}\cos(\omega t)} \qquad (3)$$

mit $\boxed{\hat{A} = \hat{C}\sin\varphi_{0c}}$ (4)

und einer <u>reinen</u> <u>Sinus</u>funktion <u>gleicher Frequenz</u> der Form

$$\boxed{b(t) = \hat{B}\sin(\omega t)} \qquad (5)$$

mit $\boxed{\hat{B} = \hat{C}\cos\varphi_{0c}}$. (6)

<u>Die Koeffizienten (4) und (6) können auch negativ werden, sind also keine Amplituden!</u>

Zusammengefasst gilt $c(t) = \hat{C}\sin(\omega t + \varphi_{0c}) = \hat{C}[\sin(\varphi_{0c})\cos(\omega t) + \cos(\varphi_{0c})\sin(\omega t)]$. (7)

Die Umformung in umgekehrter Richtung ist natürlich ebenfalls möglich:

<u>Vorzeichenbehaftete Überlagerung gleichfrequenter Sinus- und Kosinus-Schwingungen</u>

Die vorzeichenbehaftete Überlagerung (Addition/Subtraktion) zweier <u>gleichfrequenter</u> <u>reiner</u> Sinus- und Kosinusschwingungen der Form (5) bzw. (3) lässt sich darstellen als harmonische Schwingung der Form (1). Aus (4) und (6) folgt nämlich durch Quotientenbildung der vorzeichenbehafteten Koeffizienten $\hat{A}$ und $\hat{B}$

$$\frac{\hat{A}}{\hat{B}} = \tan\varphi_{0c}, \text{ also } \boxed{\varphi_{0c} = \arctan\frac{\hat{A}}{\hat{B}}} \quad \text{(Quadrantenproblematik beachten!).} \qquad (8)$$

Durch Summation der Quadrate von (4) und (6) folgt $\hat{A}^2 + \hat{B}^2 = \hat{C}^2(\sin^2\varphi_{0c} + \cos^2\varphi_{0c}) = \hat{C}^2$,

also $\boxed{\hat{C} = \sqrt{\hat{A}^2 + \hat{B}^2}}$ (9)

Zusammenfassend gilt

$$\boxed{\hat{A}\cos(\omega t) + \hat{B}\sin(\omega t) = \sqrt{\hat{A}^2 + \hat{B}^2}\,\sin(\omega t + \arctan\frac{\hat{A}}{\hat{B}})}. \qquad (10)$$

Eine Darstellung mittels der Kosinusfunktion ist einfach aus (10) ableitbar:

$$\boxed{\hat{A}\cos(\omega t) + \hat{B}\sin(\omega t) = \sqrt{\hat{A}^2 + \hat{B}^2}\,\cos(\omega t + \arctan\frac{\hat{A}}{\hat{B}} - \frac{\pi}{2})} \qquad (11)$$

Die oben gezeigten Umformungen sollen zeigen, dass es möglich ist, **jede harmonische Schwingung (Sinusgröße) beliebiger Phasenlage gleichwertig zu beschreiben durch**

- eine Sinusschwingung mit einem bestimmten Nullphasenwinkel
- eine Kosinusschwingung mit einem bestimmten Nullphasenwinkel
- eine <u>reine</u> Sinus- <u>und</u> eine <u>reine</u> Kosinusschwingung (ohne Nullphasenwinkel), die jedoch auch eine negative „Amplitude“ haben können (was einer Phasenverschiebung von $180^\circ \mathrel{\hat{=}} \pi$ entspricht).